BAB IV.

NOTASI MATRIKS DALAM PERSAMAAN REGRESI

4.1 Pendahuluan

Penyelesaian subyek permasalahan dalam regresi berganda dapat ditangani dengan sistematis melalui proses penyelesaian dengan aturan matriks. Analisis regresi berganda lebih dari dua variabel bebas X lebih mudah diselesaikan dengan metode matriks. Kasus permasalahan dalam regresi berganda yang lebih dari dua variabel dapat berupa beberapa variabel yang bersifat independen yaitu bebas sesamanya atau juga dalam bentuk polinomial dari satu variabel independen X sebagai contoh seperti berikut ini.

Kasus regresi berganda yang lebih dari dua variabel independen X seperti berikut:

[4.1]. $\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + \ldots + b_p X_p$

Dalam persamaan dengan model di atas, di mana X_1, X_2, X_3, . . .,dan X_p merupakan variabel yang dianggap berbeda atau independen.

Bila variabel bebas X merupakan satu variabel dengan pangkat (exponen) yang berbeda maka persamaannya menjadi seperti berikut ini.

[4 2]. $\hat{Y} = b_0 + b_1 X^1 + b_2 X^2 + b_3 X^3 + \ldots b_p X^p$

Penyelesaian persamaan seperti [4.1] dan [4.2] sangat mudah diselesaikan dengan metode penyelesaian matriks.

Dalam model persamaan regresi dengan **p** buah variabel prediktor X yang indevenden dan satu variabel dependen Y, maka model peresamaan statistikanya dapat ditulis dengan:

[4.3]. $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \ldots + \beta_p X_{pi} + \varepsilon_i$ i = 1,2, ,n

Persamaan [4.3] di atas merupakan persamaan umum model regresi linier berganda populasi dengan jumlah variabel bebas X sebanyak **p** buah.

Apabila terdapat sejumlah **n** pengamatan dan **p** variabel bebas **X** maka untuk setiap observasi atau responden mempunyai persamaannya seperti berikut:

[4.4].
$$\begin{array}{l}
Y_1 = \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \beta_2 X_{21} + \beta_3 X_{31} + \ldots + \beta_p X_{p1} + \varepsilon_1 \\
Y_2 = \beta_0 + \beta_1 X_{12} + \beta_2 X_{22} + \beta_3 X_{32} + \ldots + \beta_p X_{p2} + \varepsilon_2 \\
Y_3 = \beta_0 + \beta_1 X_{13} + \beta_2 X_{23} + \beta_3 X_{33} + \ldots + \beta_p X_{p3} + \varepsilon_3 \\
\vdots \\
Y_n = \beta_0 + \beta_1 X_{1n} + \beta_2 X_{2n} + \beta_3 X_{3n} + \ldots + \beta_p X_{pn} + \varepsilon_n
\end{array}$$

4.2 Notasi Matriks Persamaan Regresi

Apabila persamaan regresi populasi [4.3] dinyatakan dengan notasi matriks akan menjadi:

[4.5a]. $\underline{Y} = B[X] + \underline{\varepsilon}$ untuk populasi

[4.5b]. $\underline{Y} = b[X] + \underline{e}$ untuk sampel

Dalam persamaan regresi terdapat nilai-nilai dengan pernyataan matriks seperti:

1) ΣY^2 yang dalam notasi matriks menjadi $Y'Y$ = sebuah skalar
2) ΣX^2 yang dalam notasi matriks menjadi $[X'X]$ = sebuah matriks
3) ΣXY yang dalam notasi matriks menjadi $\underline{X'Y}$ = sebuah vektor
4) Σe^2 yang dalam notasi matriks menjadi $\underline{e'e}$ = sebuah vektor

Apabila persamaan regresi [4.4] untuk semua responden dinyatakan dengan notasi matriks akan menjadi:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ . \\ . \\ . \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & X_{31} & \ldots & X_{p1} \\ 1 & X_{12} & X_{22} & X_{32} & \ldots & X_{p2} \\ 1 & X_{13} & X_{23} & X_{33} & \ldots & X_{p3} \\ . & . & . & . & \ldots & . \\ . & & & & \ldots & . \\ . & & & & \ldots & . \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} & X_{3n} & \ldots & X_{p4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ . \\ . \\ B_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ E_3 \\ . \\ . \\ . \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

$\underline{Y}$= nx1 $\qquad$ [X] = n x k $\qquad$ $\underline{B}$ = nx1 $\qquad$ $\underline{e}$ = nx1

Keterangan:

$\underline{Y}$ = vektor kolom dengan n komponen, yaitu vektor dengan n baris dan 1 kolom,
[X] = matriks dengan n baris dan k kolom,
$\underline{B}$ = vektor kolom dengan n baris dan 1 kolom, dan
$\underline{\varepsilon}$ = vektor kolom dengan n baris dan 1 kolom.

Pada persamaan regresi [4.5b] untuk sampel ditulis dengan persamaan $\underline{Y} = \underline{b}[X] + \underline{e}$, dan persamaan regresi penduganya dapat ditulis dengan notasi matriks seperti:

[4.6]. $\quad \boldsymbol{\underline{\hat{Y}} = \underline{b}\,[X]}$

Sehingga didapatkan persamaan kesalahan pengamatan (*disturbance error*) yang ditulis dengan:

[4.7a]. $\quad \mathbf{e_i = Y_i - \hat{Y}.}$ $\qquad$ atau

[4.7b]. $\quad \boldsymbol{\underline{e} = \underline{Y} - \underline{b}\,[X].}$

4.3 Estimasi Parameter dan Statistik dalam Regresi

Pesamaan regresi penduga pada persamaan [4.5b] $\underline{\hat{Y}} = \underline{b}\,[X]$ dalam pernyataan matriks dapat digambarkan dengan:

$$\underline{\hat{Y}} = \begin{pmatrix} \hat{Y}_1 \\ \hat{Y}_2 \\ \hat{Y}_3 \\ . \\ . \\ . \\ \hat{Y}_n \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad [X] = \begin{pmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & X_{31} & \ldots & X_{p1} \\ 1 & X_{12} & X_{22} & X_{32} & \ldots & X_{p2} \\ 1 & X_{13} & X_{23} & X_{33} & \ldots & X_{p3} \\ . & . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & . & \ldots & . \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} & X_{3n} & \ldots & X_{p4} \end{pmatrix}$$

Pesamaan kesalahan pengganggu pada persamaan [4.7b] dalam pernyataan matriks digambarkan dengan:

$$\underline{E} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ . \\ . \\ . \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 - \hat{Y} \\ Y_2 - \hat{Y} \\ Y_3 - \hat{Y} \\ . \\ . \\ . \\ Y_n - \hat{Y} \end{pmatrix} \quad \text{sehingga:}$$

Dari persamaan [4.7b] $\underline{e} = \underline{Y} - \underline{b}\,[X]$, maka jumlah kuadrat kesalahan pengganggu menjadi:

[4.8]. $\mathbf{\Sigma e^2 = [e'e]}$

Persamaan di atas ini sebagai jumlah kuadrat kesalahan pengganggu dengan notasi matriks sebagai berikut di bawah ini.

Jumlah kuadrat kesalahan pengganggu Σe^2 dalam pernyataan matriks dapat digambarkan dengan:

$$e'e = (e_1\ e_2\ e_3\ .\ .\ .\ e_n) \begin{pmatrix} Y_1 - \hat{Y} \\ Y_2 - \hat{Y} \\ Y_3 - \hat{Y} \\ . \\ . \\ . \\ Y_n - \hat{Y} \end{pmatrix}$$

Dari persamaan [4.7b] $\underline{e} = (\underline{Y} - \underline{b}\ X)$ dan jumlah kuadrat kesalahan pengganggu Σe^2 dapat diselesaikan persamaan matriksnya menjadi:

$$\begin{aligned}
\text{[4.9].}\quad \mathbf{\Sigma e^2} &= \mathbf{e'e} \\
&= (\underline{Y} - \underline{b}X)'\,(\underline{Y} - \underline{b}X). \\
&= \{\underline{Y}' - (\underline{b}X)'\}\,(Y - \underline{b}X). \\
&= (\underline{Y}' - \underline{b}'X')\,(\underline{Y} - \underline{b}X). \\
&= (\underline{Y'Y} - Y'bX - b'X'Y + \underline{b}'X'X\underline{b}).
\end{aligned}$$

Karena $Y'bX = (Y'Xb)' = bX'Y$ merupakan bilangann riil atau skalar, maka

[4.10]. $\mathbf{e'e = \underline{Y'Y} - 2\,\underline{b}\,\underline{X'Y} + b'X'X\,b}$

Perlu diperhatikan bahwa dari persamaan [4.10] terdapat suatu nilai $\underline{Y'Y} = \Sigma Y^2$ yang dalam pernyataan matriks dapat digambarkan dengan:

$$Y'Y = (Y_1\ \ Y_2\ \ Y_3\ .\ .\ .\ Y_n) \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ . \\ . \\ . \\ Y_n \end{pmatrix}$$

Turunan pertama dari persamaaan [4.10] $e'e = \underline{Y'Y} - 2\,\underline{b}\,\underline{X'Y} + \underline{b}'[X'X]\,\underline{b}$ menjadi:.

$$[4.11].\quad \frac{d\,(e'e)}{d\,b} = -\,2\underline{X'Y} + 2[X'X]\,\underline{b}$$

Agar supaya nilai $e'e = \underline{Y'Y} - 2\,\underline{b}\,\underline{X'Y} + \underline{b}'\,\underline{X'X}\,\underline{b}$ minimum maka turunan pertama dari persamaan [4.11] terhadap $\underline{b}$ yaitu sebesar $-2\underline{X'Y} + 2[X'X]\,\underline{b}$ haruslah sama dengan nol sehingga menjadi:

$$[4.12].\quad -\,2\underline{X'Y} + 2[X'X]\,\underline{b} = 0 \qquad \text{atau}$$

$$\underline{X'Y} - [X'X]\,\underline{b} = 0 \qquad \text{atau}$$

$$\underline{X'Y} = [X'X]\,\underline{b} \qquad \text{sehingga:}$$

$$[4.13].\quad \underline{b} = \frac{X'Y}{X'X}$$

Ingat bahwa dalam operasi matriks tidak dikenal pembagian seperti pada persamaan [4.13] seperti $\underline{b} = \frac{X'Y}{X'X}$ sehingga operasi matriksnya menjadi seperti berikut.

Dari persamaan [4.12] $\underline{X'Y} = [X'X]\,\underline{b}$ dapat diubah menjadi

$$\underline{b}\,[X'X] = \underline{X'Y}$$

Persamaan di atas dikalikan dengan matriks kebalikan $[X'X]^{-1}$, sehingga menjadi:

$\underline{b}\,[X'X]\,[X'X]^{-1} = \underline{X'Y}\,[X'X]^{-1}$	sebab $[X'X][X'X]^{-1} = I$ di mana
$\underline{b}\,I = [X'X]^{-1}\,\underline{X'Y}$	I = matriks indentitas yaitu matriks
[4.14]. $\underline{b} = [X'X]^{-1}\,\underline{X'Y}$	yang bernilai satu = 1 pada diagonal

Perhatikan persamaan [4.14] di mana terdapat vektor koefisien regresi **b**, matrik kebalikan $[X'X]^{-1}$, dan vektor $\underline{X'Y}$

Selanjutnya, dari persamaan [4.14] dapat dinyatakan dengan matriks seperti di bawah ini.

Untuk vektor **b** dapat dilihat pada persamaan [4.6], dan matriks [X'X] merupakan hasil perkalian matriks [X'] dan matriks [X] seperti berikut:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ X_{11} & X_{12} & . & . & . & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & . & . & . & X_{2n} \\ X_{31} & X_{32} & . & . & . & X_{3n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ X_{p1} & X_{p2} & & & & X_{pn} \end{pmatrix}}_{[X'] \;=\; (k \times n)} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & X_{31} & \ldots & X_{p1} \\ 1 & X_{12} & X_{22} & X_{32} & \ldots & X_{p2} \\ 1 & X_{13} & X_{23} & X_{33} & \ldots & . \\ 1 & X_{14} & X_{24} & X_{34} & \ldots & . \\ . & & & & \ldots & . \\ . & & & & \ldots & . \\ . & & & & \ldots & . \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} & X_{3n} & \ldots & X_{pn} \end{pmatrix}}_{\underline{X} \;=\; (n \times k)} = [X'X]$$

Keterangan:

$\underline{X}$ = matriks dengan n baris dan k kolom,
$\underline{X}$ = matriks transpose dengan k baris dan n kolom,
n = jumlah sampel
k = p + 1,
p = jumlah variabel bebas X

Hasil perkalian matriks [X'] dan matriks [X] menjadi matriks **[X'X]** seperti berikut ini:

$$
\begin{array}{c}
 \\ \mathbf{X_0} \\ \mathbf{X_1} \\ \mathbf{X_2} \\ \mathbf{X_3} \\ \\ \mathbf{X_p}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc}
\mathbf{X_0} & \mathbf{X_1} & \mathbf{X_2} & \mathbf{X_3} & & \mathbf{X_p}
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
\mathbf{n=\Sigma X_0X_0} & \Sigma X_1 & \Sigma X_2 & \Sigma X_3 & \dots & \Sigma X_p \\
\Sigma X_1 & \mathbf{\Sigma X_1X_1} & \Sigma X_1X_2 & \Sigma X_1X_3 & \dots & \Sigma X_1X_p \\
\Sigma X_2 & \Sigma X_2X_1 & \mathbf{\Sigma X_2X_2} & \Sigma X_2X_3 & \dots & \Sigma X_2X_p \\
\Sigma X_3 & \Sigma X_{13} & \Sigma X_{23} & \mathbf{\Sigma X_3X_3} & \dots & \Sigma X_3X_p \\
\dots & & & & \dots & \\
\Sigma X_{11} & \Sigma X_{11} & \Sigma X_{11} & \Sigma X_{11} & \dots & \mathbf{\Sigma X_{pp}}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$[X^{'}X] = (p \times p)$$

Keterangan:

$[X^{'}X]$	=	matriks dengan k baris dan k kolom,	k	=	p + 1,
p	=	jumlah variabel bebas X	X_0	=	1
$\mathbf{\Sigma X_iX_i}$	=	$\mathbf{\Sigma X_i^2}$ seperti $\mathbf{\Sigma X_pX_p}$ = $\mathbf{\Sigma X_p^2}$ dan seterusnya	n	=	jumlah sampel

Vektor $X^{'}Y$ dan vektor $\underline{b_i}$.

Vektor X'Y merupakan vektor hasil perkalian matrik **[X']** dengan vektor **Y** berikut ini.

$$
\underbrace{\begin{pmatrix}
1 & X_{11} & X_{21} & X_{31} & \dots & X_{p1} \\
1 & X_{12} & X_{22} & X_{32} & \dots & X_{p2} \\
1 & X_{13} & X_{23} & X_{33} & \dots & . \\
1 & X_{14} & X_{24} & X_{34} & \dots & . \\
. & & & & \dots & . \\
. & & & & \dots & . \\
. & & & & \dots & . \\
1 & X_{1n} & X_{2n} & X_{3n} & \dots & X_{pn}
\end{pmatrix}}_{[X] \;=\; (n \times k)}
\times
\underbrace{\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ Y_n \end{pmatrix}}_{\underline{Y}}
\qquad \text{vektor } b_i =
\underbrace{\begin{pmatrix} bo \\ b1 \\ b2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ Bn \end{pmatrix}}_{\underline{b_i}}
$$

Selanjutnya, dari matriks [4.15] dapat dibuat matriks kebalikan $[X'X]^{-1}$ merupakan suatu operasi matrik khusus dari matriks [X'X] dengan metode tertentu seperti metode penyapuan atau metode Dolittle atau metode yang lain. Dalam hal ini tidak disebutkan cara-cara operasi tersebut, hanya hasilnya saja seperti matriks di bawah ini.

Untuk mendapatkan matriks kebalikan $[X'X\,]^{-1}$, maka dari matriks [4.15] [X'X] dengan mengikuti operasi matrik adjoin $[C^{*}_{ij}]$, maka matriks kebalikan $[X'X]^{-1}$ yang dikodekan dengan $[C_{ij}]$ dengan operasi seperti:

[4.15]. $\mathbf{[X'X\,]^{-1}} = \dfrac{1}{\left|X^{'}X\right|}$ adj [X'X] dan dapat diringkas menjadi

[4.16] $\mathbf{[C_{ij}]^{-}} = \dfrac{C^{*}_{ij}}{\left|X^{'}X\right|}$ di mana $\left|X^{'}X\right|$ adalah determinan matriks [X'X]

Pernyataan matriks [4.16] dapat digambarkan menjadi:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & & C_{41} & \dots & C_{p1} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & C_{42} & \dots & C_{p2} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{43} & \dots & C_{p3} \\ . & . & . & . & \dots & . \\ . & & & & \dots & . \\ . & & & & \dots & . \\ C_{1n} & C_{2n} & C_{3n} & C_{4n} & \dots & C_{pn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} C^*_{11} & C^*_{21} & C^*_{31} & C^*_{41} & \dots & C^*_{p1} \\ C^*_{12} & C^*_{22} & C^*_{32} & C^*_{42} & \dots & C^*_{p2} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{43} & \dots & C_{p3} \\ . & . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & . & \dots & . \\ C^*_{1n} & C^*_{2n} & C^*_{3n} & C^*_{4n} & \dots & C^*_{pn} \end{pmatrix}$$

Matriks $[\underline{X}'\underline{X}]^{-1}$ — Adj matriks $[\underline{X}'\underline{X}]$

Dari persamaan [4.10] dapat ditulis kembali menjadi:

[4.17]. $\mathbf{e'e = \underline{Y'Y} - 2\,\underline{b}\,\underline{X'Y} + b'X'Xb}$

$\mathbf{e'e = \underline{Y'Y} - 2\,\underline{b}\,\underline{X'Y} + \underline{b}'X'Y}$

$\mathbf{e'e = \underline{Y'Y} - \underline{b}'\,\underline{X'Y}}$

Ingat Y = bX, dan $\underline{b}X'Y = b\,X'Y$, sehingga

Selanjutnya, persamaan [4.17] dapat dirubah menjadi

[4.18]. $\mathbf{\underline{b}\,\underline{X'Y} = \underline{Y'Y} - e'e}$

$\mathbf{= \Sigma y^2_i - \Sigma e_i}$

$\mathbf{= \Sigma y_i^2 + \frac{1}{n}(\Sigma Y_i)^2 - \Sigma e_i^2}$. Ingat $y_i = Y_i - \bar{Y}$ dan Σy_i^2 = JK total = JK Y

Penyelesaian persamaan [4.18] menjadi:

[4.19]. $\mathbf{\Sigma y^2_i = \Sigma e_i^2 + \underline{b}\,\underline{X'Y} + \frac{1}{n}(\Sigma Y_i)^2}$

$\mathbf{= \underline{Y'Y} - \frac{1}{n}(\Sigma Y_i)^2}$ disebut dengan JK total atau JK Y.

$= \mathbf{\underline{Y'Y} - \underline{b}\,\underline{X'Y} + \underline{b}'X'Y - \frac{1}{n}(\Sigma Y_i)^2}$ Di mana $\underline{Y'Y} = \Sigma Y^2_{i.}$

Dari persamaan [4.14] di mana $\underline{b} = [X'X]^{-1}\,\underline{X'Y}$ sekaligus memperlihatkan sifat OLS (ordinary least squares) atau metode kuadrat terkecil yang menunjukkan bahwa penaksir parameter merupakan fungsi dari variabel tergantung (Y) dan persamaan tersebut dapat ditulis menjadi:

[4.20]. $\mathbf{\underline{b} = [W]\underline{Y}}$ di mana $[W] = [X'X]^{-1}\,\underline{X}'$

Dari persamaan [4.14] di mana $\underline{b} = [X'X]^{-1}\,\underline{X'Y}$ dapat pula diketahui bahwa sifat lain dari OLS yaitu penasir parameter β_i yang sama dengan nilai penduga $\mathbf{b}_i$ hal ini dapat diterangkan dengan uraian berikut:

[4.21]. $\mathbf{\underline{b} = [X'X]^{-1}\,\underline{X'Y}}$

$\mathbf{= [X'X]^{-1}\,\underline{X}'\,(Xb + e)}$ Di mana Y = (Xb + e).

$\mathbf{= [X'X]^{-1}\,\underline{[X'X]}\,\underline{b} + [X'X]^{-1}\,\underline{X}'\,e}$

$\mathbf{= I\underline{b} + [X'X]^{-1}\,\underline{X'}\,e}$

$\mathbf{= \beta + [X'X]^{-1}\,\underline{X}'\,e}$

Diketahui bahwa E(e) = 0 maka $b = \beta + [X'X]^{-1}\,\underline{X}'\,e$ bisa diubah menjadi:

[4.22]. $\mathbf{E(b) = E(\beta) + E([X'X]^{-1}\,\underline{X}'e)}$

$\mathbf{= \beta + [X'X)]^{-1}X'\,E(e)}$ Di mana E(e) = 0

$\mathbf{= \beta}$

Untuk dapat menunjukkan bahwa nilai b_i adalah penaksir OLS yang terbaik dalam arti bahwa varians (b_i) adalah nilai yang terkecil maka haruslah diketahui dari matriks varians-kovarians (b).

4.4 Matriks Varians-kovarians $\mathbf{b_i}$ dan Sifat-sifatnya

Dalam pendekatan matriks memmungkinkan untuk mengembangkan rumus-rumus, bukan saja untuk menghitung varians $\mathbf{b}_i$ sebagai komponen vektor $\underline{\mathbf{b}}$, tetapi juga sekaliagus dapat menghitung varians-kovarians antara $\mathbf{b}_i$ dan $\mathbf{b}_j$ yaitu antara dua nilai komponen vektor **b**. Perhitungan nilai varians-kovarians dari komponen-komponen vektor **b** sangat berguna dalam ststistik induktif (statistik infrensia) yaitu untuk pengujian hipotesis dan perkiraan interval bagi koefisien regresi parsial $\mathbf{b_i}$.

Berdasarkan definisi matriks varians-kovarians dari komponen-komponen vektor **b** dapat ditulis dengan rumus sebagai berikut.

$$[4.23].\quad \textbf{Var-kovar (b)} = E(\{\underline{b} - (\underline{\beta})\}\{\underline{b} - (\underline{\beta})\}')$$

Pernyataan persamaan [4.23] dapat ditulis dengan matriks:

$$\begin{pmatrix} E(b_1 - \beta_1) \\ E(b_2 - \beta_2) \\ E(b_3 - \beta_3) \\ . \quad . \\ . \quad . \\ . \quad . \\ E(b_p - \beta_p) \end{pmatrix} \times \; [E(b_1 - \beta_1) \ldots \; E(b_2 - \beta_2) \; . \; . \; . \; E(b_3 - \beta_3) \; . \; . \; . \; E(b_p - \beta_p)] =$$

E adalah nilai harapan atau *expectation value*

Hasil kali dari perkalian matriks di atas akan menghasilkan matriks seperti berikut ini.

$$\begin{pmatrix} E(b_1 - \beta_1)^2 & E(b_1 - \beta_1)(b_2 - \beta_2) & E(b_1 - \beta_1)(b_3 - \beta_3) & \ldots & E(b_1 - \beta_1)(b_p - \beta_p) \\ E(b_1 - \beta_1)(b_2 - \beta_2) & E(b_2 - \beta_2)^2 & E(b_2 - \beta_2)(b_3 - \beta_3) & \ldots & E(b_2 - \beta_2)(b_p - \beta_p) \\ E(b_1 - \beta_1)(b_3 - \beta_3) & E(b_3 - \beta_3 (b_2 - \beta_2) & E(b_3 - \beta_3)^2 & & E(b_3 - \beta_3)(b_p - \beta_p) \\ . \; . \; . \; . & . \; . \; . \; . & . \; . & \ldots & . \; . \; . \; . \\ . \; . \; . \; . & . \; . \; . \; . & . \; . & & . \; . \; . \; . \\ . \; . \; . \; . & . \; . \; . \; . & . \; . & \ldots & . \; . \; . \; . \\ E(b_1 - \beta_1)(b_p - \beta_p) & E(b_p - \beta_p)(b_2 - \beta_2) & E(b_p - \beta_p)(b_3 - \beta_3) & \ldots & E(b_p - \beta_p)^2 \end{pmatrix}$$

Hasil perkalian matriks di atas selanjutnya dapat ditulis dengan matriks berikut ini.

$$\begin{pmatrix} \text{Var}(b) & \text{Kovar}(b_1\, b_2) & \text{Kovar}(b_1\, b_3) & \ldots & \text{Kovar}(b_1\, b_p) \\ \text{Kovar}(b_1\, b_2) & \text{Var}(b_2) & \text{Kovar}(b_2\, b_3) & \ldots & \text{Kovar}(b_2\, b_p) \\ \text{Kovar}(b_2\, b_3) & \text{Kovar}(b_2\, b_3) & \text{Var}(b_3) & & \text{Kovar}(b_3\, b_p) \\ . \; . \; . & . \; . \; . & . & \ldots & . \; . \; . \\ . \; . \; . & . \; . \; . & . & \ldots & . \; . \; . \\ . \; . \; . & . \; . \; . & . & \ldots & . \; . \; . \\ \text{Kovar}(b_1\, b_p) & \text{Kovar}(b_1\, b_2) & \text{Kovar}(b_1\, b_2) & \ldots & \text{Var}(b_p) \end{pmatrix}$$

Hasil perkalian matriks di atas selanjutnya menghasilkan nilai varians-kovarians seperti di bawah ini..

Nilai varians-kovarians dapat dijabarkan menjadi:

$$\begin{aligned} \text{Var}(b_i) &= E(\{\underline{b_i} - \underline{\beta_i}\}\{\underline{b_i} - \underline{\beta_i}\}') \\ &= E(\underline{b_i} - \underline{\beta_i})^2 \\ &= \sigma^2 b_{\underline{i}} \end{aligned}$$

Di mana i = 1, 2, …., p

$$\begin{aligned} \text{Kovar}(b_i b_j) &= E\{\underline{b_i} - \underline{\beta_i}\}\{\underline{b_j} - \underline{\beta_j}\}' \\ &= \sigma b_{\underline{i}} b_j \quad \text{atau} \quad = \sigma b_j b_i \end{aligned}$$

Dari pernyataan matriks di atas diketahui bahwa var(b_i) adalah elemen ke-i dari diagonal utama dari matriks $[X'X]^{-1}$ dikalikan dengan σ^2_e yang dapat dijelaskan dengan uraian berikut ini:

[4.24]. $$\begin{aligned} \textbf{Var-kovar}\ (\mathbf{b_i}) &= \mathbf{E(\{\underline{b_i} - \underline{\beta_i}\}\{\underline{b_i} - \underline{\beta_i}\}')} \\ &= \mathbf{E\{[X'X]^{-1} X'e\}\{[X'X]^{-1} X'e\}'} \\ &= \mathbf{\{[X'X]^{-1} X' E(e'e) X [X'X)^{-1}]^{-1}} \\ &= \mathbf{\{[X'X]^{-1} \sigma^2_e [X'X] [(X'X)^{-1}]'} \\ &= \mathbf{\sigma^2_e [X'X]^{-1} [X'X] [X'X]^{-1}} \\ &= \mathbf{\sigma^2_e [X'X]^{-1}} \end{aligned}$$

Dalam prakteknya nilai $\boldsymbol{\sigma^2_e}$ = e'e/(n – k) atau $\boldsymbol{\sigma^2_e}$ = Σe_i/(n-k) yang dapat diduga dengan $\mathbf{S^2_e}$/(n-k) di mana **k** = p + 1 dan **p** adalah jumlah variabel bebas X.

Pada dasarnya nilai $e'e$ dapat dihitung dari nilai Y_i dari data pengamatan dan nilai Y penduga ($\hat{Y}$), yang dapat dihitung melalui rumus JK Total - JK Regresi. Pernyataan ini dapat ditulis dengan persamaan seperti berikut ini:

[4.25]. $$\begin{aligned} \mathbf{\Sigma e_i} &= \mathbf{\sigma^2_e (n - k)} \\ &= \mathbf{(JK\ Total - JK\ Regresi)/(n\text{-}k)} \\ &\quad \textbf{atau} \\ \mathbf{\sigma^2_e} &= \mathbf{(y'y - b'XY)/(n\text{-}k)} \end{aligned}$$

Ingat! JK Total = $y'y - n\,\overline{Y}^2$
JK Regresi = $\Sigma(b_i\, \Sigma x_i y_i)$
= $b'(X'Y) - (\Sigma Y)^2/n$
Di mana: $\Sigma Y)^2/n = n\,\overline{Y}^2$ = (faktor koreksi)

4.5 Pengujian Hipotesis

Dalam pengujian hipotesis untuk nilai penduga **β** tergantung pada tujuan dan hipotesis nol (H0) yang didefinisikan, seperti:

a) nilai **β** diketahui,
b) nilai **β** tidak diketahui, dan
c) jika menguji kesamaan nilai **β.**

4.5.1 Jika nilai β diketahui.

Model ini diajukan apabila hipotesisi nol (H_0) yang menyatakan bahwa H_0: $\mathbf{b_j = \beta_j}$. Nilai $\boldsymbol{\beta_j}$ adalah suatu parameter yang diketahui besarnya, sehingga kaidah keputusannya menentukan nilai statistik b yang diduga sama besarnya dengan nilai parameter populasi **β** atau berada dalam kisaran daerah penerimaan H_0, ataukah berada dalam daerah penolakan H_0. Untuk menentukan pengujian hipotesis dapat menggunakan metode pengujian t-student atau uji-t.

Suatu syarat yang harus dipenuhi dalam pengujian ini adalah normalitas parameter/statistik, yang dapat dinyatakan dengan:

$$B \sim N\{B, \sigma^2_e (X'X)^{-1}\}$$

Biasanya nilai σ^2_e tidak diketahui besarnya, maka dapat diduga dengan nilai varians estimate dari $\hat{d}^2$.

Kaedah dalam pengujian adalah:

H_0: $\mathbf{b_i = \beta_i}$ lawan
1) H_1: $\mathbf{b_i < \beta_i}$
2) H_1: $\mathbf{b_i > \beta_i}$
3) H_1: $\mathbf{b_i \neq \beta_i}$

Untuk pengujian hipotesis menggunakan uji-t dengan rumus:

$$[4.26]. \quad \mathbf{t_{hitung}} = \frac{b_i - b_i}{se(b_i)}$$

Dengan Derajat Bebas (Db) Galat Regresi = n – p - 1 dan se(b_i) = $\sqrt{\operatorname{var}(b_i)}$

di mana p = jumlah variabel bebas X dan n = jumlah sampel.

Hipotesis alternatif H_1: $\mathbf{b_i < \beta_i}$ atau H_1:$\mathbf{b_i > \beta_i}$ merupakan uji eka arah. Apabila Hipotesis alternatif H_1: $\mathbf{b_i \neq \beta_i}$ merupakan uji dwi arah.

Daerah kritis penolakan H_0 adalah

Untuk uji eka arah menjadi: $t_{hitung} < t_{\alpha\,(n-p-1)}$ dan atau
$t_{hitung} > t_{\alpha\,(n-p-1)}$

Sedangkan, untuk uji dwi arah menjadi: $|\, t_{hitung} \,| \geq t_{1/2\alpha\,(n-p-1)}$

4.5.2 Jika nilai β tidakdiketahui.

Dalam pengujian ini, oleh karena $\boldsymbol{\beta_j}$ tidak diketahui, maka sebaiknya digunakanuji dwi arah untuk melakukan pengujian terhadap hipotesisi nol (H_0) yang menyatakan bahwa H_0: $\mathbf{b_j = 0}$ dan hipotesis alternatif H_1: $\mathbf{b_j \neq 0}$.

Untuk pengujian hipotesis tetap menggunakan uji-t.dengan rumus:

$$[4.27]. \quad \mathbf{t_{hitung}} = \frac{b_i - b_i}{se(b_i)}$$

Dengan Derajat Bebas (Db) Galat Regresi = n – p - 1 dan se(b_i) = $\sqrt{\operatorname{var}(b_i)}$

di mana p = jumlah variabel bebas X dan n = jumlah sampel.

Hipotesis alternatif untuk penolakan hipotesis nol adalah nilai t_{hitung} yang lebih besar dari nilai $t_{\{\alpha/2\,(n-k-1)\}}$. Jika H_0 ditolak atau $\mathbf{b}_i \neq \mathbf{0}$, berarti nilai penduga $\mathbf{b}_i \neq \mathbf{0}$ atau variabel bebas X_i mempunyai pengaruh yang nyata terhadap variabel tak bebas Y.

4.5.3 Jika nilai β dikomperatifkan.

Dalam pengujian ini, di mana nilai-nilai b_i diperbandingkan sesamanya, maka perlu dilakukan pengunian dengan menggunakan uji Fisher atau uji F atau menggunakan analisis varians.

Analisis varians adalah untuk membandingkan antar $\boldsymbol{\beta_i}$, dengan hipotesis nol (H_0) menyatakan bahwa nilai b_i pendugan adalah sana dengan nol atau H_0: $b_1 = b_2 = b_3 \ldots = b_p = 0$. Dengan hipotesis alternatif H_1: paling tidak terdapat satu nilai dari $\mathbf{b_i}$ penduga yang tidak sama dengan nol. Tabel analisis varians dalam catatan matriks seperti Tabel 4.1 berikut ini.

Tabel 4.1 Analisis Varians dalam Catatan Matriks.

Sumber keragaman (SK)	Derajat bebas (DB)	Jumlah kuadrat (JK)	Kuadrat tengah (KT)	F-hitung
Regresi	P	$b'(X'Y) - n\bar{Y}^2$	$\frac{b'(X'Y) - n\bar{Y}^2}{p}$	$\frac{KT\,Regresi}{KT\,Residu}$
Galat atau residu	n - p -1	$y'y - b'(X'Y)$	$\frac{y'y - b'(XY)}{n-p-1}$	
Total	N - 1	$y'y - n\bar{Y}^2$		

Selanjutnya, lakukan uji F = $\frac{KT\,Regresi}{KT\,Residu}$

$$= \frac{R^2/p}{(1-R^2)/(n-p-1)}$$ (rumus ini dibuktikan kemudian).

Dengan Derajat Bebas = (p, n – p – 1).

Kaidah pengujian untuk mengambil keputusan adalah:
Jika terjadi:

$F_{hitung} < F_{\alpha\,(p,\,n-p-1)}$ terima H_0 yang berarti bahwa $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = b_p = 0$.
$F_{hitung} \geq F_{\alpha\,(p,\,n-p-1)}$ tolak H_0 yang berarti paling tidak terdapat satu nilai $b_i \neq 0$

Nilai α merupakan peluang kesalahan yang diterima dalam pengujian bisa 1%, 5%, atau yang lain.

Bila dihubungkan dengan koefisien determinasi (R^2) maka besarnya JK Regresi menjadi:

[4.28]. $\mathbf{R^2 (y'y - n\bar{Y}^2) = JK\ Regresi}$ dan rumus JK Galat akan menjadi:

[4.29]. **JK Galat = JK Total - JK Regresi**

$$= (y'y - n\bar{Y}^2) - R^2 (y'y - n\bar{Y}^2)$$
$$= (1 - R^2)(y'y - n\bar{Y}^2)$$

Selanjutnya, F_{hitung} akan menjadi:

[4.30]. $$\mathbf{F_{hitung}} = \frac{R^2(y'y - n\bar{Y}^2)/p}{(1-R^2)(y'y - n\bar{Y}^2)/(n-p-1)}$$

$$= \frac{R^2/p}{(1-R^2)/(n-p-1)}$$

Persamaan [4.30] dapat dipakai menguji signifikansi nilai R^2 (koefisien determinasi) melalui metode uji-F untuk masalah regresi.

4.6 Matriks Koefisien Korelasi dan Koefisien Determimasi

Dalam analisis regresi linier berganda terdapat beberapa macam koefisien korelasi, yang tergantung pada pendekatan hubungan atau model regresi yang dicari.

Adapun macam-macam koefisien korelasi tersebut adalah:

1). Koefisien korelasi sederhana.
2). Koefisien korelasi parsial.
3). Koefisien korelasi berganda.
4). Koefisien determinasi.

Yang dimaksud dengan matriks korelasi adalah suatu matriks simetri yang elemen-elemennya terdiri atas koefisien korelasi order nol (*zero order correlation*). Koefidien yang merupakan elemen-elemen matriks tersebut adalah koefisien yang dihasilkan oleh setiap pasangan variabel yang terdapat pada setiap model regresi. Sebagai teladan dari model regresi p variabel bebas X dengan satu variabel tak bebas Y dapat dinyatakan dalam bentuk matriks seperti berikut.

Var	X_1	X_2	X_3	X_4		X_p
X_1	r_{11}	r_{21}	r_{31}	r_{41}	…	r_{p1}
X_2	r_{12}	R_{22}	r_{32}	r_{42}	…	r_{p2}
X_3	R_{13}	R_{23}	r_{33}	r_{43}		r_{p3}
	.	.	.	.	…	.
	.	.	.	.		.
	.	.	.	.	…	.
X_p	r_{1p}	R_{2p}	r_{3p}	r_{4p}	…	r_{pp}
Y	r_{Y1}	r_{Y2}	r_{Y3}	r_{Y4}	…	r_{Yp}

Ingat $r_{31} = r_{13}$, $r_{YX} = r_{XY}$, dan

$r_{ii} = 1$ seperti $r_{11} = 1$, $r_{22} = 1$, dan $r_{pp} = 1$

Atau tabel di atas dapat ditulis seperti berikut:

Var	X_1	X_2	X_3	X_4		X_p
X_1	1	r_{21}	r_{31}	r_{41}	…	r_{p1}
X_2	r_{12}	1	r_{32}	r_{42}	…	r_{p2}
X_3	r_{13}	r_{23}	1	r_{43}		r_{p3}
.	.	.	.	.	…	.
.	.	.	.	.		.
.	.	.	.	.	…	.
X_p	r_{1p}	r_{2p}	r_{3p}	r_{4p}	…	1
Y	r_{Y1}	r_{Y2}	r_{Y3}	r_{Y4}	…	r_{Yp}

Dari tabel matriks koefisien korelasi di atas dapat diketahui secara langsung besarnya nilai koefisien korelasi linier sederhana atau nilai koefisien korelasi order nol antarvariabel yang menyusun model regresi. Selanjutnya, dapat dihitung besarnya koefisien korelasi parsial order satu, dua, dan sterusnya tergantung pada jumlah variabel bebas X yang ada pada persamaan regresi.

4.6.1 Korelasi linier sederhana

Koefisien korelasi sederhana atau koefisien korelasi order nol atau koefisien korelasi *product moment* atau koefisien korelasi Pearson yang disimbulkan dengan $\mathbf{r_{ij}}$**;** yaitu suatu nilai mengukur keeratan hubungan antar dua variabel ke-i dengan variabel ke-j, dan tidak memperhatikan pengaruh variabel-variabel yang lainnya, seperti variabel tak bebas Y atau sesama variabel bebas X lainnya dalam analisis regresi berganda.

Dalam analisis regresi berganda tiga variabel atau dua prediktor yaitu analisis regresi yang terdiri atas dua pubah bebas X yaitu X_1 dan X_2 serta sebuah variabel tak bebas Y, maka terdapat tiga nilai koefisien korelasi linier sederhana **r** yaitu:

(1) $\mathbf{r}_{Y1}$ atau $\mathbf{r}_{YX1}$ yaitu koefisien korelasi antara Y dengan X_1;

(2) $\mathbf{r}_{Y2}$ atau $\mathbf{r}_{YX2}$ yaitu koefisien korelasi antara Y dengan X_2; dan

(3) $\mathbf{r}_{\mathbf{12}}$ atau $\mathbf{r}_{X2X1}$ yaitu koefisien korelasi antara X_1 dengan X_2.

Koefisien-koefisien korelasi tersebut di atas disebut dengan koefisien korelasi linier sederhana atau koefisien korelasi tahap satu atau koefisien korelasi order nol (*simple coeficient of correlation or correlation coeficients of zero order*).

Adapun rumus dari koefisien korelasi sederhana ini adalah:

[4.31a]. $$\mathbf{r}_{XY} = \frac{\sum XY - \frac{\sum X \sum Y}{n}}{\sqrt{\left(\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{n}\right)\left(\sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n}\right)}}$$ atau

[4.31b]. $$\mathbf{r}_{XY} = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \sum y^2}}$$ atau

[4.31c]. $$\mathbf{r}_{XY} = \frac{JHK\ XY}{\sqrt{JK\ X \quad JK\ Y}}$$ (n = jumlah sampel)

Memperhatikan rumus di atas dapatkah dikatakan bahwa $\mathbf{r}_{YX1}$ merupakan ukuran dari keeratan huhungan antara Y dengan X_1 yang sebenarnya tanpa ada pengaruh yang lain, sementara diketahui bahwa yang mempengaruh nilai Y adalah X_2 selain nilai X_1 dan selain itu memungkin juga X_2 mempengaruhi X_1 .

Jadi tegasnya bahwa dalam regresi berganda untuk mendapatkan hubungan yang sebenarnya antara sebuah variabel bebas X_i dengan variabel tak bebas Y, yaitu dengan cara menghilangkan pengaruh variabel-variabel bebas yang lainya. Cara ini terkenal dengan analisis **korelasi parsial**.

4.6.2 Koefisien korelasi parsial

Korelasi parsial (*partial corelation*) dapat dibedakan menjadi: (1) korelasi parsial order satu, (2) korelasi parsial order dua, (3) korelasi parsial order tiga, dan (4) korelasi parsial order seterusnya sampai korelasi parsial order banyak.

Korelasi parsial order satu, dengan simbul $\mathbf{r}_{XiXj \cdot Xk.}$ yang berari hubungan antara variabel X ke-i dengan variabel X ke-j yang bebas dari pengaruh variabel X ke-k.

Korelasi parsial order dua, dengan simbul $\mathbf{r}_{YXi\ XjXk.}$ yang berari hubungan antara variabel Y dengan variabel X ke-i yang bebas dari pengaruh variabel X ke-j dan variabel X ke-k.

Korelasi parsial order tiga, dengan simbul $\mathbf{r}_{YXi \cdot\ XjXkXl.}$ yang berari hubungan antara variabel Y dengan variabel X ke-i yang bebas dari pengaruh variabel-variabel X ke-j; X ke-k; dan X ke-l

Korelasi parsial order banyak, dengan simbul $\mathbf{r}_{YXi \cdot XjXk\ \ldots\ Xp.}$ yang berarti hubungan antara variabel Y dengan variabel X ke-i yang bebas dari pengaruh variabel-variabel X ke-j; X ke-k; . . .; dan X ke-p

Rumus dari masing-masing korelasi parsial order di atas, seperti contoh berikut di bawah ini.

1. Korelasi parsial order satu:

Dalam korelasi parsial order satu, dengan simbul $\mathbf{r}_{XiXj\cdot Xk.}$ yang berari hubungan antara variabel X ke-i dengan variabel X ke-j yang bebas dari pengaruh variabel X ke-k. Perhitungan nilai-nilai koefisien korelasi parsial order satu yang berasal dari regresi tiga variabel dapat dinyatakan dengan:

1). $\mathbf{r}_{YX1\cdot X2}$ korelasi parsial antara Y dengan X_1 jika X_2 pengaruhnya konstan
2). $\mathbf{r}_{YX2\cdot X1}$ korelasi parsial antara Y dengan X_2 jika X_1 pengaruhnya konstan
3). $\mathbf{r}_{X1X2\cdot Y}$ korelasi parsial antara X_1 dengan X_2 jika Y pengaruhnya konstan

Perhitungan nilai-nilai koefisien korelasi parsial order satu untuk tiga variabel, didasarkan pada nilai-nilai koefisien korelasi sederhana atau koefisien korelasi order nol yang mempunyai rumus:

[4.32a]. $\mathbf{r}_{YX1\cdot X2} = \dfrac{r_{YX1} - r_{YX2}\ r_{X1X_2}}{\sqrt{(1 - r^2_{YX2})\ (1 - r^2_{X1X_2})}}$

[4.32b]. $\mathbf{r}_{YX2\cdot X1} = \dfrac{r_{YX2} - r_{YX1}\ r_{X1X_2}}{\sqrt{(1 - r^2_{YX1})\ (1 - r^2_{X1X_2})}}$

[4.32c]. $\mathbf{r}_{X1X2.Y} = \dfrac{r_{X1X2} - r_{YX1}\ r_{Y1X_2}}{\sqrt{(1 - r^2_{YX1})\ (1 - r^2_{YX_2})}}$

Apabila nilai koefisien korelasi parial ≤ 0 atau bernilai negatif, maka dianggap sama dengan nol.

2. Korelasi parsial order dua:

Di dalam korelasi parsial order dua, dengan simbul $\mathbf{r}_{XiXj\cdot XkXl.}$ yang berari hubungan antara variabel X ke-i dengan variabel X ke-j yang bebas dari pengaruh variabel X ke-k dan variabel X ke-l. Perhitungan nilai-nilai koefisien korelasi parsial order dua yang berasal dari regresi empat variabel termasuk satu variabel tak bebas Y seperti: $\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3$ akan terdapat tiga koefisien korelasi parsial order dua terhadap Y:

1). $\mathbf{r}_{YX1\cdot X2X3}$ koefisien korelasi parsial antara Y dengan X_1 jika X_2 dan X_3 pengaruhnya konstan atau bebas terhadap Y
2). $\mathbf{r}_{YX2\cdot X1X3}$ koefisien korelasi parsial antara Y dengan X_2 jika X_1 dan X_3 pengaruhnya konstan atau bebas terhadap Y
3). $\mathbf{r}_{YX4.X1X2}$ koefisien korelasi parsial antara Y dengan X_3 jika X_1 dan X_2 pengaruhnya konstan atau bebas terhadap Y

Perhitungan nilai-nilai koefisien korelasi parsial order dua, didasarkan pada nilai-nilai koefisien korelasi order satu dengan rumus seperti:

[4.33a]. $\mathbf{r}_{YX1\cdot X2\,X3} = \dfrac{r_{YX1.X2} - r_{YX3.X2}\, r_{X1X3.X_2}}{\sqrt{(1 - r^2_{YX3.X2})\ (1 - r^2_{X1X3.X2})}}$

[4.33b]. $\mathbf{r_{YX2 \cdot X1X3}}$ = $$\frac{r_{YX2.X1} - r_{YX3.X1}\, r_{X2X_{3.X1}}}{\sqrt{(1 - r^2_{YX3.X1})\,(1 - r^2_{X1X_{3.X2}})}}$$

[4.33c]. $\mathbf{r_{X1X2.YX3}}$ = $$\frac{r_{X1X2.Y} - r_{YX3.Y}\, r_{X_2X3.Y}}{\sqrt{(1 - r^2_{YX3.Y})\,(1 - r^2_{X_{2X3}.Y})}}$$

3. Korelasi parsial order tiga dan sterusnya

Berdasarkan matriks korelasi, yang menunjukkan korelasi order satu atau korelasi linier sederhana dapat dihitung koefisien korelasi parsial order selanjutnya sesuai dengan banyaknya peubah yang dianalisis.

Untuk menghitung koefisien korelasi parsial order selanjutnya dengan **p** variabel bebas X dinyatakan dalam k koefisien korelasi parsial order **p – 1,** dengan rumus**:**

[4.34]. $\mathbf{r_{X1X2.X3\,X4....Xp.}}$ = $$\frac{r_{X1X2.X3X4...(Xp-1)} - r_{X1Xp.X3X4...(x.p-1)}\, r_{X2Xp.X3X4...(xp-1)}}{\sqrt{(1 - r^2_{X1Xp.X3X4...(xp-1)})\,(1 - r^2_{X2Xp.X3X4...(xp-1)})}}$$

Sebagai ilustrasi dari rumud [4.34] dapat dilihat pada contoh di bawah ini.

Koefisien korelasi order satu:

[4.35a]. $\mathbf{r_{X1X2.X3}}$. = $$\frac{r_{X1X2} - r_{X1X3}\, r_{X2X3}}{\sqrt{(1 - r^2_{X1X3})\,(1 - r^2_{X2X3})}}$$

Koefisien korelasi order dua:

[4.35b]. $\mathbf{r_{X1X2.X3\,X4}}$ = $$\frac{r_{X1X2.X3} - r_{X1X4.X4}\, r_{X2X4.X3}}{\sqrt{(1 - r^2_{X1X4.X3})(1 - r^2_{X2X4.X3})}}$$

Koefisien korelasi order tiga:

[4.35c]. $\mathbf{r_{X1X2.X3\,X4X5.}}$ = $$\frac{r_{X1X2.X3X4} - r_{X1X5.X3X4}\, r_{X2X5.X3X4}}{\sqrt{(1 - r^2_{X1X5.X3X4})\,(1 - r^2_{X2X5.X3X4})}}$$

Koefisien regresi order banyak:

Apabila koefisien korelasi oder **p** telah dihitung yang dinyatakan dengan koefisien korelasi oder **p –1,** maka selanjutnya dapat dihitung koefisien regresi parsial dengan rumus seperti berikut:

[4.36]. $\mathbf{b_{YX1.X2.X3X4....Xp.}}$ = $$\frac{b_{YX1.X2.X3X4...(.Xp-1)} - b_{YXp.X2X3X4...(x.p-1)}\, b_{X1Xp.X2X3X4...(x.p-1)}}{\sqrt{(1 - r^2_{YXp.X2X3X4...(Xp-1)})\,(1 - r^2_{X1Xp.X2X3X4...(Xp-1)})}}$$

3.6.3 Koefisien determinasi dan koefisien korelasi berganda

Koefisien determinasi = R^2 dapat dihitung langsung dari data bersamaan dengan koefisien regresi $\mathbf{b_i}$**.** Kegunaan dari koefisien determinasi R^2 adalah untuk mengukur tingkat ketepatan yang paling baik dari analisis regresi.

Jika data observasi dapat tepat pada garis atau bidang regresi yang diestimasi, maka dikatakan terjadi kecocokan garis atau bidang regresi dengan sempurna, dan nilai koefisien determinasi akan maksimum yaitu R^2 = 1.

Dalam kenyataan terhadap data pengamatan (Y_i) akan terjadi penyimpangan dengan garis atau bidang regresi penduga ($\hat{Y}$) yang dikodekan dengan $\mathbf{e_i}$. Di dalam analisis regresi dengan metode kuwadrat terkecil (OLS) diusahakan supaya agar nilai $\mathbf{e_i}$ sekecil mungkin mendekati nol atau nilai koefisien determinasi semaksimum mungkin mendekati satu.

Koefisien determinasi berganda (R^2) didefinisikan sebagai berikut:

[4.37]. $$\mathbf{R^2} = \frac{Jumlah\ Kuadrat\ \mathrm{Re}gresi}{Jumlah\ Kuadrat\ Total}$$

$$= \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2}$$

$$= \frac{\sum y_i^2 - \sum e_i^2}{\sum y_i^2}$$ Di mana Σe_i^2 = JK Residu = JK Gakat Regresi

$$= 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^{\ 2}}$$

Untuk regresi dua variabel dengan satu variabel bebas X maka:

[4.38a]. $$\mathbf{R^2} = \frac{b_i^2 \sum x_i^2}{\sum y_i^2}$$ atau

$$= \frac{b_i \sum X_i Y_i}{\sum y_i^2}$$ Ingat Σy^2 = JK Total = JK Y

Untuk regresi tiga variabel dengan dua variabel bebas X (X_1 dan X_2) maka:

[4.38b]. $$\mathbf{R^2} = \frac{b_1 \sum x_1 y_i + b_2 \sum x_2 y_i}{\sum y_i^2}$$

Untuk regresi k variabel dengan k-1 = p variabel bebas X ($X_1, X_2, \ldots, X_p$) maka:

[4.38c]. $$\mathbf{R^2} = \frac{b_1 \sum x_1 y_i + b_2 \sum x_2 y_i + \ldots + b_p \sum x_p y_i}{\sum y_i^2}$$

Bentuk umum koefisien determinasi dalam catatan matriks dari rumus di atas berbentuk seperti berikut ini.

[4.38d]. $$\mathbf{R^2} = \frac{b^{'}(X^{'}Y) - n\overline{Y}^2}{(Y^{'}Y) - n\overline{Y}^2}$$

Nilai harapan R^2 = $E(R^2)$ didefinisikan sebagai berikut:

[4.39]. $\mathbf{E(R^2)}$ **=** $E(1-\frac{s_e^{\,2}}{s_y^{\,2}})$

$$= 1 - \frac{\sum e^2/(n-p-1)}{\sum y^2/(n-1)}$$

$$= 1 - \frac{n-1}{n-p-1}\frac{\sum e^2}{\sum y^2}$$

p = jumlah variabel bebas X

$$= 1 - \frac{n-1}{n-p-1}(1-R^2)$$

$$= 1 - \frac{n-1}{n-p-1} + (\frac{n-1}{n-p-1})R^2$$

Sehingga persamaan [4.39] memnjadi:

$$E(R^2) = \frac{n-p-1-n+1}{n-p-1} + (\frac{n-1}{n-p-1})R^2$$

$$= \frac{1-p-1}{n-p-1} + (\frac{n-1}{n-p-1})R^2$$

Dari penyelesaian persamaan [4.39]di atas, maka didapatkan bahwa nilai harapan koefisien determinasi = $E(R^2)$ yang disebut dengan nilai koefisien determinasi terkoreksi $(\overline{R}^2)$ sehingga persamaan terakhir di atas dapat ditulis menjadi:

[4.40]. $\overline{R}^2$ **=** $R^2\frac{n-1}{n-p-1} + \frac{1-p-1}{n-p-1}$

$$= R^2\frac{n-1}{n-p-1} - \frac{p+1-1}{n-p-1})$$

Penyelesaian selanjutnya dari persamaan [4.40] akan menjadi:

[4.41]. $\overline{R}^2$ **=** $\frac{nR^2-R^2+(p+1)R^2-(p+1)R^2}{n-p-1} - \frac{1+p-1}{n-p-1}$

$$= \frac{R^2(n-p-1)}{n-p-1} - \frac{p+1-1}{n-p-1} + \frac{R^2(p+1-1)}{n-p-1}$$

$$= R^2 - \frac{p+1-1}{n-p-1}(1-R^2)$$

$$= R^2 - \frac{p}{n-p-1}(1-R^2)$$

Sehingga, terdapat dua rumus untuk nilai koefisien determinasi terkoreksi ($\bar{R}^2$) yaitu:

[4.42a]. $\bar{R}^2 = 1 - \frac{JK\ Galat}{JK\ Total}$

[4.42b]. $\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2)\frac{n-1}{n-p-1}$

Dari rumus di atas didapatkan $R^2 \leq 1$ dan $\bar{R}^2 \leq R^2$ dan $\bar{R}^2 = R^2$ hanya terjadi pada $R^2 = 1$. Mudah untuk dipahami apabila melihat rumus [4.33a dan 4.33b], bahwa $\bar{R}^2$ dan R^2 saling berhubungan yang dapat dinyatakan dengan:

1). Apabila p>1 maka $\bar{R}^2 < R^2$ yang berarti bahwa apabila banyaknya variabel bebas X bertambah maka $\bar{R}^2$ (R^2 yang disesuaikan) akan meningkat. Akan tetapi peningkatannya akan lebih keci dari peningkat R^2.

2). $\bar{R}^2$ dapat bernilai negatif, walaupun R^2 adalah non negatif atau definit positif. Apabila dalam praktek didapatkan nilai $\bar{R}^2$ yang negatif maka dianggap nilai $\bar{R}^2$ sama dengan nol.

Perlu diperhatikan bahwa untuk membandingkan dua model regresi berdasarkan nilai koefisien determinasi, baik yang disesuaikan maupun tidak ($\bar{R}^2$ atau R^2) seharusnya variabel tergantung Y haruslah sama, sedangkan variabel bebas X boleh mengambil bentuk apapun.

Sebagai contoh dari dua persamaan dibawah ini:

$\text{Ln}\ \hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3$

$\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3$

Dari kedua persamaan di atas tidak dapat dilakukan perbandingan baik dengan $\bar{R}^2$ maupun dengan R^2 karena variabel tergantung Y berdemensi tidak sama.

Sedangkan, dari kedua contoh persamaan di bawah ini:

$\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + \ldots + b_4 X_4$

$\hat{Y} = b_0 + b_1 \log X_1 + b_2 \log X_2 + b_3 \log X_3$

Masih dapat dilakukan perbandingan baik dengan $\bar{R}^2$ maupun dengan R^2, karena mempunyai nilai variabel tergantung Y yang sama.

Koefisien korelasi berganda (R) didefinisikan sebagai berikut:

[4.43a]. **R** $= \sqrt{\frac{Jumlah\ Kuadrat\ \mathrm{Re}gresi}{Jumlah\ Kuadrat\ Total}}$ model umum

[4.43b]. **R** $= \sqrt{\frac{\sum y_i^2 - \sum e_i^2}{\sum y_i^2}}$ model umum

[4.43c]. **R** $= \sqrt{1 - \frac{\sum e_i^2}{y_i^2}}$ model umum

[4.43d] R $= \sqrt{\frac{b_i^2 \sum x_i^2}{\sum y_i^2}}$ untuk regresi linier sederhana

[4.43e]. **R** = $\sqrt{\dfrac{b_1 \sum x_1 y_i + b_2 \sum x_2 y_i}{\sum y_i^2}}$ untuk regresi dua var X_i

[4.43f]. **R** = $\sqrt{\dfrac{b_1 \sum x_1 y_i + b_2 \sum x_2 y_i + \ldots + b_k \sum x_k y_i}{\sum y_i^2}}$ untuk regresi > dua var X_i

[4.43g]. **R** = $\sqrt{\dfrac{b'(X'Y) - n\bar{Y}^2}{(Y'Y) - n\bar{Y}^2}}$ model umum

Koefisien korelasi berganda (R) menyatakan keeratan hubungan antara variabel bebas X dengan variabel tak bebas Y secara simultan.

4.7 Hubungan Koefisien Korelasi dan Koefisien Regresi Sederhana, Parsial, dan Berganda

Dalam pembicaraan ini akan diperlihatkan berbagai hubungan antara koefisien korelasi dan koefisien regresi linier sederhana dengan koefisien korelasi dan koefisien regresi parsial serta dengan koefisien determinasi berganda, sederhana, dan parsial.

4.7.1 Hubungan antara koefisien regresi parsial dan sederhana

[4.44a]. $\mathbf{b_{YX1}} = \mathbf{r_{YX1}} \dfrac{S_Y}{S_{X1}}$

[4.44b]. $\mathbf{b_{YX3}} = \mathbf{r_{YX3}} \dfrac{S_Y}{S_{X3}}$

[4.44c]. $\mathbf{b_{X2X3}} = \mathbf{r_{X2X3}} \dfrac{S_{X2}}{S_{X3}}$

[4.45a]. $\mathbf{b_{YX1.X3}} = \dfrac{b_{YX1} - b_{YX3}\, b_{X3X2}}{1 - b_{X2X3}\, b_{X3X2}}$

$= \dfrac{r_{YX1} - r_{YX3}\, r_{X1X3}}{1 - r_{X1X3}^2} \dfrac{S_Y}{S_{X1}}$

[4.45b]. $\mathbf{b_{YX1.X2}} = \dfrac{b_{YX1} - b_{YX2}\, b_{X2X1}}{1 - b_{X1X2}\, b_{X2X1}}$

$= \dfrac{r_{YX1} - r_{YX2}\, r_{X1X2}}{1 - r_{X1X2}^2} \dfrac{S_Y}{S_{X1}}$

[4.45c]. $\mathbf{b_{YX4.X2}} = \dfrac{b_{YX3} - b_{YX2}\, b_{X2X3}}{1 - b_{X3X2}\, b_{X2X3}}$

$= \dfrac{r_{YX3} - r_{X1X2}\, r_{X2X3}}{1 - r_{X2X3}^2} \dfrac{S_Y}{S_{X3}}$

S_Y = simpangan baku Y

S_{X1} = simpangan baku X_1

S_{X3} = simpangan baku X_3

b_{YX1} = koefisien regresi Y terhadap X_1

b_{YX3} = koefisien regresi Y terhadap X_3

b_{X3X2} = koefisien regresi X_3 terhadap X_2

$S_{X1} = \sqrt{\sum x_1^2 / n}$ $S_Y = \sqrt{\sum x_Y^2 / n}$

$S_2 = \sqrt{\sum x_2^2 / n}$ $S_3 = \sqrt{\sum x_3^2 / n}$

Sehingga didapatkan:

[4.46]. $\mathbf{b_{YX2.X3}} = \dfrac{b_{YX2} - b_{YX3}\, b_{X2X3}}{1 - b_{X2X3}\, b_{X3X2}}$

$= \dfrac{r_{YX2} - r_{YX3}\, r_{X2X3}}{1 - r^2_{X2X3}} \dfrac{S_Y}{S_{X2}}$

4.7.2 Hubungan antara koefisien regresi parsial dengan koefisien korelasi parsial

[4.47a]. $\mathbf{b_{YX1.X2}} = r_{YX1.X2} \sqrt{\dfrac{\Sigma e_{YX3}}{\Sigma e^2_{X2X3}}}$

di mana $\sum e^2_{YX3}$ = JK kesalahan pengganggu dalam regresi Y trehadap X_3

[4.47b]. $\mathbf{b_{YX4.X2}} = r_{YX4.X2} \sqrt{\dfrac{\Sigma e_{YX2}}{\Sigma e^2_{X3X2}}}$

$\sum e^2_{X3X2}$ = JK kesalahan pengganggu dalam regresi X_3 trehadap X_2

4.7.3 Hubungan antara koefisien determinasi dengan koefisien korelasi sederhana

[4.48a]. $\mathbf{R^2} = \dfrac{r^2_{YX2} + r^2_{YX3} - 2\, r_{YX2}\, r_{YX1}\, r_{X2X3}}{1 - r^2_{X2X3}}$

[4.48b]. $\mathbf{R^2 = r^2_{YX2} + (1 - r^2_{YX2})\, r^2_{YX4.X2}}$

[4.48c]. $\mathbf{R^2 = r^2_{YX3} + (1 - r^2_{YX3})\, r^2_{YX2.X3}}$

[4.48d]. $\mathbf{R^2} = \dfrac{b_{YX2}\, \Sigma x_2\, y + b_{YX3}\, \Sigma x_3\, y}{\Sigma y^2}$

4.8 Aplikasi Matriks dengan *Solf-Wares Excel*

Aplikasi matriks dengan komputer terutama dengan metode *solf-wares Excel* sangat membantu menyelesaikan analisis regresi berganda terutama perhitungan matriks [X'X]; vektor X'Y; matriks kebalikan (*invers*) [X'X] $^{-1}$; vektor b;' dan estimasi vektor statistik **b$_i$** serta uji-ujinya.

Di bawah ini ditunjukkan potongan lembaran (sheet) Excel untuk memberikan gambaran operasi matriks yang akan dilakukan.

Dalam lembaran (sheet) Excel selalu dibedakan antarkolom dan anratbaris. Antarkolom diberi nama dengan huruf kapital dari A sd IV sehingga terdapat 256 kolom, dan antarbaris diberi nama dengan angka dari 1 sd 65536 sehingga terdapat 65536 baris. Jadi dalam satu sheet terdapat 16777216 sel. Sehingga satu sheet dibagi menjadi sel-sel seperti A1, B2, C3, dan seterusnya sampai pada IV65536 sebagai sel terakhir seperti pada Tabel 4.2.

Tabel 4.2. Gambaran Sebuah Sheet, Potongan Sheet dengan Area atau Daerah yang Diarsir Seperti Daerah B3 sd J10, dan Sel-sel yang Berisi Data

	A	B	C	D	F	G	F	I	J	K	L	M	. . .	IT	IU	IV
1																
2																
3																
4																
5																
6																
7				19975a												
8																
9																
10																
11																
.																
.												Dua koli				
.																
.																
65533							165 ton									
65534										NO_3						
65535																
65536																

Data (isi) pada setiap sel dapat berupa angka, huruf, kata, kalimat, maupun campuran huruf, kata, kalimat dengan angka, seperti 19975a, dua koli, 65 ton, NO_3, dan sebagainya. Seperti sheet di atas.

Operasi matematika dalam Excel mengikuti aturan matematika biasa yang didahului oleh tanda matematika seperti tanda tambah (+), tanda sama dengan (=), dan tanda kurang (-) yang diakhiri dengan menekan tombol Enter.

Tabel 4.4. Operasi Matematika dalam Excel

	A	B	C	D	F	G	F	I	J	K	L	. . .	IT	IU	IV
1				= 3*4											
2								+ 4/5							
3	-6^2														
4															
5															

Matriks pada Excel dinyatakan dengan baris dan kolom dan dapat dioperasikan dengan aturan matriks apabila setiap selnya berupa angka, serta memenuhi aturan-aturan matriks. Operasi matriks pada Excel diakhiri dengan menekan tombol **Shift, Ctrl, dan Enter** secara bersamaan.

Apabila operasi matriks tidak berjalan semestinya, maka hasil yang diharapkan tidak akan tampak dan pada sel-sel akan muncul tanda seperti**: #NAME?**

Beberapa contoh operasi matriks yang diperlukan dalam analisis regresi berganda, seperti berikut ini.

Contoh 1. Operasi matriks melakukan transpose matriks A (5x2) akan menjadi matriks B (2x5) dengan cara seperti berikut:

1). Buat matriks A (5x2)

2). Tentukan **area** di mana matriks B (2x5) diletakan, lalu diarsir/diblok, segera

3). Pada sheell pertama (disebelah kiri atas) **area** matriks B ditulis perintah: **= transpose** dilanjutkan dengan arsir/blok matriks A yang didahului dengan tanda buka kurung biasa [( ] dan ditutup kurung biasa [ )] serta diakhiri dengan perintah menekan tombol **Shift, Ctrl, dan Enter** secara bersamaan. Perhatikan gambar sheet seperti pada Tabel 4.4 dan Tabel 4.5 berikut ini.

Tabel 4.5 Operasi Matriks Transpose

	A	B	C	D	F	G	F	I	J	K	L	M	.	.	.	IT	IU	IV
1																		
2		2	5															
3		4	8			=Transpose(b2.c6)												
4		21	6															
5		3	12					B (2x5)										
6		0	55															
7																		
8		A (5x2)																
9																		

Tabel 4.6. Sheet Operasi Perkalian Matriks dari Tabel 4.5.

	A	B	C	D	F	G	F	I	J	K	L	M	.	.	.	IT	IU	IV
1																		
2		2	5			2	4	21	3	0								
3		4	8			5	8	6	12	55								
4		21	6															
5		3	12					B (2x5)										
6		0	55															
7																		
8		A (5x2)																
9																		

Contoh 2. Operasi perkalian dua buah matriks A (5x2) dengan matrik B (2x5) seperti berikut.

1). Tentukan matriks A (5x2)

2). Tentukan matriks B (2x5)

3). Tentukan **area** di mana matriks C (5x5) hasil perkalian matriks A dan B akan diletakan dan diarsir/diblok, segera setelah itu lakukan

4). Pada sheell pertama (disebelah kiri atas) **area** pada matriks C ditulis perintah: **= mmult(arsir area matriks A, arsir area matriks B)** diakhiri oleh perintah dengan menekan tombol **Shift, Ctrl, dan Enter** secara bersamaan. Perhatikan gambar pada lembaran (sheet) seperti pada Tabel 4.7, Tabel 4.8, dan Tabel 4.9 berikut.

Di dalam perkalian matriks selalu mengikuti aturan main domino, seperti 5,2-2,5; 4,6-6,4; dan seterusnya.
Gambar dalam sheet Excel operasi perkalian dua buah matriks B (2x5) dengan matrik A (5x2) dan hasilnya sebuah matriks C yang berukuran (5x5) seperti seperti pada Tabel 4.7.

Tabel 4.7 Operasi Perkalian Dua Matriks

	A	B	C	D	F	G	F	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	. . .
1																	
2		2	5		2	4	21	3	0								
3		4	8		5	8	6	12	55								
4		21	6									=MMULT(A,B)					
5		3	12				B (2x5)										
6		0	55														
7																	
8		A (5x2)															
9														C (5x5)			
.																	

Gambar **hasil operasi perkalian** dua buah matriks A (5x2) dengan matrik B (2x5) dan hasilnya sebuah matriks C (5x5) seperti pada Tabel 4.8.

Tabel 4.8. Hasil Operasi Perkalian Dua Matriks [A] dengan Matriks [B]

	A	B	C	D	F	G	F	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	. . .
1																	
2		2	5		2	4	21	3	0								
3		4	8		5	8	6	12	55								
4		21	6									29	48	72	66	275	
5		3	12				B (2x5)					48	80	132	108	440	
6		0	55									72	132	477	135	330	
7												66	108	135	153	660	
8		A (5x2)										275	440	330	660	3025	
9																	
10														C (5x5)			

Kalau perkalian matriks di atas dibalik menjadi matriks B (2x5) dikali matriks A (5x2) akan menghasilkan matrikx C (2x2) seperti seperti pada Tabel 4.8.

Tabel 4.9. Hasil Operasi Perkalian Dua Matriks [B] dengan [A]

	A	B	C	D	F	G	F	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	. . .
1																	
2		2	5		2	4	21	3	0								
3		4	8		5	8	6	12	55				470	204			
4		21	6										204	3294			
5		3	12				B (2x5)										
6		0	55										C (2x2)				
7																	
8		A (5x2)															

Dari gambaran operasi matriks di atas dapat diturunkan operasi matriks yang lainnya seperti berikut ini.

Contoh 4. Operasi matriks inverse C (5x5) dengan cara.seperti berikut.

1). Tentukan matriks C (5x5)
2). Tentukan **area** matriks D (5x5) atau C^{-1} hasil inverse dari matriks C akan diletakan.
3). Pada sheell pertama (disebelah kiri atas) **area** matriks D atau matriks C^{-1} ditulis perintah: **= minverse(arsir area matriks C)** diakhiri oleh perintah dengan menekan tombol **Shift, Ctrl, dan Enter** secara bersamaan. Perhatikan gambar sheet pada Tabel 4.10 dan Tabel 4.11 berikut.

Tabel 4.10. Operasi Matriks Inverse

	A	B	C	D	F	G	F	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	. . .
1																	
2		29	48	72	66	275					=Minverse(C)						
3		48	80	132	108	440											
4		72	132	477	135	330											
5		66	108	135	153	660											
						302											
6		275	440	330	660	5											
7																	
8				C (5x5)								D (5x5) atau C^{-1}					
9																	
.																	

Tabel 4.11. Hasil Matriks Inverse C(5x5) Menghasilkan Matriks C^{-1} atau Matriks D.

	A	B	C	D	F	G	F	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	. . .
1																	
2		29	48	72	66	275				$-6E^{+14}$	$-2E^{+14}$	$1E^{+14}$	-3^{E+14}	$1E^{+14}$			
3		48	80	132	108	440				$4E^{+13}$	$-6E^{+13}$	$5E^{+11}$	$5E^{+13}$	$-6E^{+12}$			
4		72	132	477	135	330				$4E^{+13}$	$3E^{+13}$	$-1E^{+13}$	$3E^{+13}$	$-1E^{+13}$			
5		66	108	135	153	660				$1E^{+14}$	$-4E^{+12}$	$-5E^{+12}$	$-4E^{+13}$	$-6E^{+11}$			
6		275	440	330	660	3025				$2E^{+13}$	$2E^{+13}$	$-1E^{+13}$	$3E^{+13}$	$-1E^{+13}$			
7																	
8				C (5x5)							D (5x5) atau C^{-1}						
9																	
.																	

Contoh 4. Operasi matriks determinan D (5x5) dengan cara.seperti berikut.

1). Tentukan matriks D (5x5)
2). Tentukan sebuah sel hasil determinan matriks D (5x5) akan diletakan. Determinan suatu matriks merupakan skalar atau bilangan konstan, dalam hal ini hasilnya dalam satu sel.
3). Pada sel hasil determinasi dari matriks matriks D ditulis perintah:
= determ(area matriks D) diakhiri dengan perintah dengan menekan tombol **Shift, Ctrl, dan Enter** secara bersamaan. Perhatikan gambar sheet pada Tabel 4.12 berikut ini.

Tabel 4.12. Operasi Matriks Determinan

	A	B	C	D	F	G	F	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	.	.
1																		
2		29	48	72	66	275												
3		48	80	132	108	440			=Determinan (D)									
4		72	132	477	135	330												
5		66	108	135	153	660			Determinan (D)									
6		275	440	330	660	3025												
7																		
.				D (5x5)														

4.9 Aplikasi Matriks pada Analisis Regresi Berganda

Dalam analisis regresi berganda yang lebih dari dua variabel independen X (variabel bebas X) dapat ditulis dengan persamaan seperti berikut:

[4.40] $\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + \ldots + b_p X_p$

Dalam persamaan dengan model di atas, X_1, X_2, X_3, . . ., dan X_p merupakan variabel-variabel bebas yang berbeda (independen) satu sama lain.

Suatu contoh analisis dengan lima variabel bebas X dan jumlah sampel 47 responden. Datanya seperti Tabel 4.13 mengenai pemeliharaan sapi di peternakan sistem intensif dengan kandang berlantai semen dengan data seperti di bawah ini..

Tabel 4.13. Data Pemeliharaan Peternakan Sapi dengan Sistem Intensif

No. Responden	Berat Bibit (Kg) (X1)	Hijauan (Kg) . (X2)	Jerami (Kg) (X3)	Dedak (Kg) (X4)	Tenaga Kerja (Jam) (X5)	*Output* (Kg) (Y)
1	555	14,400	7,200	360	112,5	785
2	575	16,200	6,480	360	101,25	817
3	600	18,000	5,400	360	99,00	822
4	525	17,280	7,200	180	90,00	796
5	575	18,000	5,400	180	92,25	804
6	575	14,400	7,200	360	90,00	781
7	584	16,200	6,480	360	90,00	813
8	575	18,000	5,760	180	101,25	809
9	865	21,600	9,720	540	90,00	1167
10	885	23,400	9,000	540	99,00	1214
11	862	23,400	9,720	540	101,25	1238
12	875	25,200	10,800	720	90,00	1252
13	875	27,000	9,000	540	103,50	1251
14	883	21,600	10,800	540	99,00	1186
15	870	25,920	8,640	540	90,00	1211
16	1158	32,400	12,600	720	112,50	1609
17	1065	30,600	12,960	720	101,25	1551
18	1138	34,200	12,600	900	123,75	1598
19	1117	34,560	11,520	900	108,00	1558
20	1125	36,000	9,000	900	112,50	1544

Tabel 4.13. Sambungan

No. Responden	Berat Bibit (Kg) (X1)	Hijauan (Kg) . (X2)	Jerami (Kg) (X3)	Dedak (Kg) (X4)	Tenaga Kerja (Jam) (X5)	*Output* (Kg) (Y)
21	1200	34,560	12,960	720	117,00	1628
22	1171	32,400	14,400	900	112,50	1695
23	1419	36,000	16,200	1080	126,00	2042
24	1460	34,200	16,200	1080	148,50	2041
25	1455	43,200	10,800	1080	135,00	1990
26	1731	54,000	14,400	1080	126,00	2381
27	1682	45,000	21,600	1080	148,50	2369
8	1771	46,800	19,800	1260	137,25	2052
29	2001	57,600	21,900	1260	157,50	2803
30	2200	63,000	27,000	1460	194,50	3082
31	546	23,400	12,600	1080	171,90	976
32	566	21,600	16,200	1080	149,85	973
33	544	21,600	14,400	1080	149,40	989
34	534	23,400	17,280	1080	160,60	938
35	807	33,400	23,760	1620	157,50	1460
36	799	32,400	21,600	1620	180,00	1430
37	798	32,400	23,400	1620	157,50	1451
38	793	33,400	21,600	1620	168,75	1431
39	794	34,200	23,400	1620	135,00	1443
40	807	36,000	21,600	1620	168,75	1460
41	783	30,600	27,000	1620	191,25	1417
42	813	36,000	21,600	1620	172,35	1447
43	1140	36,000	36,000	2160	187,20	2007
44	1065	45,000	28,800	2160	209,00	1778
45	1061	39,600	32,400	2160	187,20	1937
46	1172	43,200	36,000	2160	198,45	1985
47	1131	37,800	34,200	2160	175,95	1994

Untuk analisis selanjutnya digunakan kode X_{ij} dan Y_i. Di mana I = baris dan j = kolom.

Dari contoh data di atas sebagai dasar untuk dilakukan perhitungan dengan analisis regresi berganda, maka perlu dibentuk matriks-matriks seperti matriks [X]; [X']; [XX']; $[X\ X']^{-1}$; vektor $\underline{X'Y}$;dan skalarYY'. Dari analisis regresi berganda selanjutnya maka akan didapatkan nilai vektor penduga $\underline{b}_i$ dan uji-ujinya.

Operasi matriks dari contoh data di atas Tabel 4.13 dengan p = 6 termasuk X_0 dan jumlah sampel (n) = 47 seperti berikut ini.

Dari contoh data di atas sebagai dasar untuk melakukan perhitungan dengan analisis regresi linier berganda, di mana matriks yang dibuat hanya dinyatakan dengan baris dan kolom saja serta diberi nama di bawahnya, seperti: matriks [X']; [XX']; $[X\ X']^{-1}$; vektor [X'Y]; dan skalar YY'.

Step-step operasi matriks dalam analisis regresi linier berganda seperti berikut ini.

1). Tentukan matriks [X] termasuk $X_0 = 1$ untuk semua sampel.

2). Tentukan vektor $\underline{Y}$ untuk semua sampel..

3). Buat matriks [X] transpose atau $[X']$.

4). Hitung hasil perkalian matriks $[X']$ dengan matriks [X] yang menghasilkan matriks $[X'X]$.

5). Hitung hasil perkalian matriks $[X']$ dengan vektor $\underline{Y}$ yang menghasilkan vektor $\underline{X'Y}$.

6). Buat matriks $[X'X]^{-1}$ dengan cara meng-inverse matriks $[X'X]$.

7). Hitung vektor $\underline{b_i}$ termasuk b_0 dari hasil perkalian matriks $[X'X]^{-1}$ dengan vektor $\underline{X'Y}$.

8). Hitung nilai matriks varian-kovarian (b_i).

9). Uji keberartian nilai b_i dengan uji t.

Dari data Tabel 4.13 di atas dapat dijadikan dua matriks yaitu matriks [X], dan vektor $\underline{Y}$ yang dapat dilihat pada Tabel 4.14 di bawah ini. Perhatikan pada kolom satu Tabel 4.14 di mana ditambahkan satu kolom untuk X0 yang semua nilainya = 1, yang merupakan variabel bebas X dari b0 pada persamaan [4.40] yang menjadi seperti persamaan: $\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + \dots + b_p X_p$

Untuk analisis selanjutnya digunakan kode $\mathbf{X_{ij}}$ dan $\mathbf{Y_i}$. $i = 1, 2, 3, \dots, 47$. $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Dalam analisis regresi berganda dengan metode matriks, selanjutnya maka perlu dilakukan pembentukan matriks: [X']; [XX']; $[XX']^{-1}$; vektor $\underline{X'Y}$; vektor $\underline{b_i}$; dan skalar YY'. Operasi matriks selanjutnya seperti berikut ini.

4.9.1 Pembentukan Matriks [X] Transpose; Matriks [X'X]; Matriks $[X'X]^{-1}$; Vektor $\underline{X'Y}$; dan Skalar Y'Y

1). **Pembentukan matriks [X] transpose atau [X']**. Pada matriks [X] transpose di mana nilai-nilai pada baris matriks [X] akan menjadi nilai-nilai kolom pada matriks $[X']$ dan nilai-nilai pada kolom matriks [X] akan menjadi nilai-nilai baris pada matriks $[X']$. Perhatikan Tabel 4.15, bahwa X_0 sd X_5 sebagai baris dan nilai **n** dari 1 sd 47 sebagai kolom.

2). **Pembentukan matriks [X'X]**. Dari dua tabel di atas Tabel 4.14 dan Tabel 4.15 dapat dibentuk matriks [X'X] dengan cara operasi matriks seperti yang disebutkan pada Tabel 4.6 sd Tabel 4.9 terdahulu di atas yang hasilnya dinyatakan pada Tabel 4.16. Matriks [X'X] hasil perkalian matriks [X'] dari Tabel 4.15 dengan matriks [X] jadi Tabel 4.14 dan hasilnya sebuah matriks dengan ukuran 6x6 seperti pada Tabel 4.16 di bawah ini.

Dari nilai-nilai matriks pada Tabel 4.16 di atas dapat dilihat bahwa matriks [X'X] adalah matriks segi, yaitu suatu matriks di mana unsur X_iX_i adalah sama dengan $\sum X_i^2$ dan unsur X_iX_j adalah sama dengan $\sum X_iX_j$. Nilai $\sum X_0^2 = n = 47$ adalah sama dengan jumlah sampel (n) . Nilai X_iY adalah sama dengan $\sum X_iY$.

Jadi pada penulisan matriks [X'X] di mana tanda sigma (= ∑) dihilangkan.

3). **Pembentukan vektor $\underline{X'Y}$.** Dari dua Tabel 4.14 dan Tabel 4.13 dapat dibentuk vektor $\underline{X'Y}$ dengan cara operasi matriks seperti yang disebutkan pada Tabel 4.6 sd Tabel 4.8 di atas yang hasilnya dinyatakan pada Tabel 4.16 di atas.

4). **Pembentukan matriks kebalikan $[X'X]^{-1}$.** Dari matriks [X'X] Tabel 4.16 di atas dengan cara operasi matriks seperti yang disebutkan pada Tabel 4.11 yang hasilnya dinyatakan pada Tabel 4.16, umumnya kode matriks kebalikan adalah [C], dengan kode setiap sel $\mathbf{C_{ij}}$.

Tabel 4.14. Matriks [X], dan Vektor Y

X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Y
1	555	14,400	7,200	360	112,50	785
1	575	16,200	6,480	360	101,50	817
1	600	18,000	5,400	360	99,00	822
1	525	17,280	7,200	180	90,00	796
1	575	18,000	5,400	180	92,25	804
1	575	14,400	7,200	360	90,00	781
1	584	16,200	6,480	360	90,00	813
1	575	18,000	5,760	180	101,25	809
1	865	21,600	9,720	540	90,00	1167
1	885	23,400	9,000	540	99,00	1214
1	862	23,400	9,720	540	101,25	1238
1	875	25,200	10,800	720	90,00	1252
1	875	27,000	9,000	540	103,50	1251
1	883	21,600	10,800	540	99,00	1186
1	870	25,920	8,640	540	90,00	1211
1	1158	32,400	12,600	720	112,50	1609
1	1065	30,600	12,960	720	101,25	1551
1	1138	34,200	12,600	900	123,75	1598
1	1117	34,560	11,520	900	108,00	1558
1	1125	36,000	9,000	900	112,50	1544
1	1200	34,560	12,960	720	117,00	1628
1	1171	32,400	14,400	900	112,50	1695
1	1419	36,000	16,200	1080	126,00	2042
1	1460	34,200	16,200	1080	148,50	2041
1	1455	43,200	10,800	1080	135,00	1990
1	1731	54,000	14,400	1080	126,00	2381
1	1682	45,000	21,600	1080	148,50	2369
1	1771	46,800	19,800	1260	137,25	2052
1	2001	57,600	21,900	1260	157,50	2803
1	2200	63,000	27,000	1460	194,50	3082
1	546	23,400	12,600	1080	171,90	976
1	566	21,600	16,200	1080	149,85	973
1	544	21,600	14,400	1080	149,40	989
1	534	23,400	17,280	1080	160,60	938
1	807	33,400	23,760	1620	157,50	1460
1	799	32,400	21,600	1620	180,00	1430
1	798	32,400	23,400	1620	157,50	1451
1	793	33,400	21,600	1620	168,75	1431
1	794	34,200	23,400	1620	135,00	1443
1	807	36,000	21,600	1620	168,75	1460
1	783	30,600	27,000	1620	191,25	1417
1	813	36,000	21,600	1620	172,35	1447
1	1140	36,000	36,000	2160	187,20	2007
1	1065	45,000	28,800	2160	209,00	1778
1	1061	39,600	32,400	2160	187,20	1937
1	1172	43,200	36,000	2160	198,45	1985
1	1131	37.800	34,200	2160	175,95	1.994

Matriks [X] **Vektor Y**

Tabel 4.15. Pembentukan Matriks [X] Transpose atau [X']

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		46	47
X_0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1	1
X_1	555	575	600	525	575	575	584	575	865	885	·	1172	1131
X_2	14,40	16,20	18,0	17,28	18,00	14,40	16,2	18,0	21,6	23,4	·	43,2	37,80
X_3	7200	6480	5400	7200	5400	7200	6480	5760	9720	9000	·	36000	34200
X_4	360	360	360	180	180	360	360	180	540	540	·	2160	2160
X_5	112,5	101,25	99	90	92,25	90	90	101,25	90	99	·	198,45	175,95

Matriks [X] Transpose atau [X']

Tabel 4.16. Hasil Pembentukan Matriks [X'X] dan Vektor X'Y

	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5		Y
X_0	47	46525,00	1475,12	764,58	49520,00	6330,40	X_0	70005,00
X_1	46525,00	53635341,00	1648030,12	815269,14	52445600,00	6450528,10	X_1	78925708,00
X_2	1475,12	1648030,12	52155,63	26812,86	1747490,40	209732,67	X_2	2466952,76
X_3	764,58	815269,14	26812,86	15803,38	1026507,60	115645,25	X_3	1269186,42
X_4	49520,00	52445600,00	1747490,40	1026507,60	67936000,00	7558715,00	X_4	82047860,00
X_5	6330,40	6450528,10	209732,67	115645,25	7558715,00	912777,74	X_5	9890640,40

Matriks [X'X] **Vektor X'Y**

Untuk menguji bahwa hasil matriks kebalikan [C] itu benar dapat dilakukan dengan perkalian matriks kebalikan [C] dengan matriks [X'X] atau sebaliknya dengan perkalian matriks [X'X] dengan matriks kebalikan [C] $[X'X]^{-1}$ yang hasilnya matriks identitas [I] adalah suatu matriks segi dengan ukuran yang sama dengan matriks kebalikan [C], di mana nilai setiap sel diagonal matriks segi identitas [I] sama dengan satu, dan nilai setiap sel ***off-diagonal*** matriks identitas [I] sama dengan nol seperti terlihat pada Tabel 4.17 di bawah ini.

Tabel 4.17. Hasil pembentukan matriks $[X'X]^{-1}$ dan matriks identitas [I]

	X0	X1	X2	X3	X4	X5		X0	X1	X2	X3	X4	X5
X_0	0,7691	-0,0002	0,00339	0,00700	0,00028	-0,00790	X_0	**1,0**	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
X_1	-0,0002	0,0000	-0,00001	-0,00004	0,00000	0,00000	X_1	0,0	**1,0**	0,0	0,0	0,0	0,0
X_2	0,00339	-0,00007	0,00327	0,00161	-0,00004	-0,00015	X_2	0,0	0,0	**1,0**	0,0	0,0	0,0
X_3	0,00700	-0,00004	0,00161	0,00483	-0,00007	-0,00016	X_3	0,0	0,0	0,0	**1,0**	0,0	0,0
X_4	0,00028	0,00000	-0,00004	-0,00007	0,00000	0,00000	X_4	0,0	0,0	0,0	0,0	**1,0**	0,0
X_5	-0,00790	0,00000	-0,00015	-0,00016	0,00000	0,00011	X_5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	**1,0**

Matriks Kebalikan $[X'X]^{-1}$ atau [C] **Matriks Identitas [I]**

4.9.2 Perhitungan Vektor $\underline{\mathbf{b}}_i$, Varians Regresi, dan Varians-kovarian $\mathbf{b}_i$

1). Perhitungan vektor $\underline{\mathbf{b}}_i$ merupakan hasil perkalian matriks kebalikan $[X'X]^{-1}$ dari Tabel 4.17 dengan vektor $\underline{X'Y}$ dari Tabel 4.16. Hasil vektor $\underline{\mathbf{b}}_i$ berukuran 6x1 dari $\mathbf{b}_0$ sd $\mathbf{b}_5$ seperti pada Tabel 4.18 di bawah ini.

Tabel 4.18. Hasil Perhitungan Vektor $\underline{\mathbf{b}}_i$ dan Matriks [Varians-Kovarians $\mathbf{b}_i$]

X_i	b_i	JK Tot, Reg, dan Res		X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_0	47,62	13554519,70		**3720,66**	-0,99	16,41	33,88	1,37	-38,22
X_1	0,98	**Skalar yy'**		-0,99	**0,01**	-0,35	-0,20	0,00	0,02
X_2	6,98	**(= JK Total)**	198335,27	16,41	-0,35	**15,81**	7,80	-0,19	-0,71
X_3	12,21		e'e = **(JK**	33,88	-0,20	7,80	**23,36**	-0,34	-0,78
X_4	0,06	13356184,43	**Residu)**	1,37	0,00	-0,19	-0,34	**0,01**	-0,01
X_5	-0,04	**(JK Regresi)**		-38,22	0,02	-0,71	-0,78	-0,01	**0,53**

Vektor $\underline{\mathbf{b}}_i$ — **Analisis Varians Regresi** — **Matriks [Varians-kovarians $\mathbf{b}_i$]**

2). Matriks [varians-kovarians $\mathbf{b}_i$] dapat dihitung dari persamaan [4.26] yaitu perkalian kuadrat salah baku galat regresi $\boldsymbol{\sigma}^2_e$ dengan matriks kebalikan $[X'X]^{-1}$.

Matriks [varians-kovarians $\mathbf{b}_i$] = $\boldsymbol{\sigma}^2_e\,[X'X]^{-1}$ yang dalam prakteknya sama dengan nilai $\boldsymbol{\sigma}^2_e$ = e'e/(n – k). $\boldsymbol{\sigma}^2_e = \Sigma e_i/(n\text{-}k)$ yang diduga dengan $S^2_e/(n\text{-}k)$ di mana k = p + 1 dan p = jumlah variabel bebas X. Atau nilai $\boldsymbol{\sigma}^2_e = (y'y - b'XY)/(n\text{-}k)$ atau JK Total dikurangi JK Regresi dibagi DB Galat.

Pada contoh ini matriks [Varians-kovarians $\mathbf{b}_i$] berukuran 6x6 seperti pada Tabel 4.18 dapat dihitung dari $\mathbf{S}^2_e$ adalah Kuadrat Salah Baku Galat Regresi pada Tabel 4.18 dikalikan dengan matriks kebalikan $[X'X]^{-1}$ pada Tabel 4.17.

4.9.3 Pengujian terhadap Regresi

4.9.3.1 Pengujian terhadap R^2 atau uji varians regresi atau uji F regresi

Dalam pengujian $\mathbf{R^2}$ ini, didasarkan pada uji varians. Hipotesis nol (H_0) dalam pengujian ini yang menyatakan bahwa H_0: $\mathbf{R^2 = 0}$ dan hipotesis alternatif H_1: $\mathbf{R^2 \neq 0}$.

Untuk pengujian hipotesis nol digunakan uji $F_{\text{-hitung}}$ dengan rumus:

$$F_{hitung} = \frac{JK\ Regresi}{JK\ Galat}$$

Dengan Derajat Bebas (Db) Regresi = p = 5. dan DB Galat = n - p - 1 = 41. Hipotesis alternatif untuk penolakan hipotesis nol adalah nilai F_{hitung} > nilai $F_{\text{-tabel}}$. Nilai $F_{\text{-tabel}} = (F_{\alpha;\ p;\ (n\ -\ p\ -1)})$. Jika H_0 ditolak maka dikatakan $\mathbf{R^2 \neq 0}$, berarti bahwa terdapat nilai variabel bebas X_i yang mempunyai pengaruh nyata terhadap variabel tak bebas Y.

Hasil analisis varians (ANOVA) regresi conoh di atas seperti terlihat pada Tabel 4.19.

Tabel 4.19. Hasil ANOVA Regresi

Sumber Keragaman (SK)	Derajat Bebas (DB)	Jumlah Kuadrat (JK)	Kuadrat Tengah (KT)	F_{hitung}	Signifikans F
Regresi	5	13356184,43	2671236,89	552,20	$1,8294E^{-36}$
Residual = Galat	41	198335,27	4837,45		
Total	46	13554519,70			

Dari contoh analisis di atas didapatkan F_{hitung} = 552,20 dan nilai F_{tabel} = 2,443 serta Signifikansi F = 0,00 atau $1,8294E^{-36}$. Kesimpulan tolak H_0.

Suatu hal yang harus diperhatikan dalam uji varians regresi adalah apabila uji F berbeda nyata atau jika H_0 ditolak maka barulah dilanjukan dengan pengujian vektor $\underline{\beta}_i$, untuk menyatakan atau mengetahui variabel bebas Xi yang mana mempunyai pengaruh yang nyata terhadap variabel tak bebas Y dilihat dari nilai β_i penduga.

4.9.3.2 Pengujian vektor $\underline{\beta_i}$

Dalam pengujian vektor $\boldsymbol{\beta}_i$ ini, oleh karena $\boldsymbol{\beta_i}$ tidak diketahui, maka sebaiknya digunakan uji dwi arah untuk melakukan pengujian terhadap hipotesis nol (H_0) yang menyatakan bahwa H_0: $\mathbf{b_i = 0}$ dan hipotesis alternatif H_1: minimal salah satu dari $\mathbf{b_i}$ **ada yang ≠ 0.** Biasanya nilai σ^2_e tidak diketahui besarnya, maka dapat diduga dengan nilai S^2_e yaitu varians galat regresi. $\mathbf{b_i}$ adah nilai penduga β_i.

Selanjutnya, untuk pengujian hipotesis nol (H0) tetap menggunakan uji-t.dengan rumus:

$$t_{hitung} = \frac{b_i - b_i}{se(b_i)}$$

Dengan Derajat Bebas (DB) Galat Regresi = n – p – 1 = 41 dan $\mathbf{se(b_i)} = \sqrt{\mathrm{var}(b_i)}$ di mana **p** = jumlah variabel bebas X = 5, serta umlah sampel = **n** = 47.

Hipotesis alternatif (H_1) penolakan hipotesis nol adalah nilai t_{hitung} yang lebih besar dari nilai $t_{1/2\alpha(n-p-1)}$. Jika H_0 ditolak atau $\mathbf{b}_i \neq \mathbf{0}$, berarti nilai penduga $\mathbf{b}_i \neq \mathbf{0}$ atau variabel bebas X_i mempunyai pengaruh yang nyata terhadap variabel tak bebas Y (Tabel 4.20).

Tabel 4.20. Hasil perhitungan Se (b_i), b_i, t_{hitung} setiap b_i, dan krierianya

X_i	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
$\mathbf{b_i}$	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
Nilai	47,62	0,98	6,98	12,21	0,06	-0,04
Se b_i	61,00	0,09	3,98	4,83	0,08	0,72
t_{hitung} b_i	$0,78^{NS}$	$10,60^{**}$	$1,76^{NS}$	$2,53^{**}$	$0,70^{NS}$	$-0,06^{NS}$
Peluang t	0,439	0,000	0,086	0,015	0,488	0,954
Kriteria	***Terima H_0***	**Tolak H_0**	**Terima H_0**	**Tolak H_0**	***Terima H_0***	***Terima H_0***

Dari perhitungan di atas Tabel 4.20 dapat disimpulkan hanya variabel bebas X_1 dan X_3 yang berpengaruh nyata (signifikan) terhadap variabel tak bebas Y.

4.10 Koefisien Korelasi Sederhana, Koefisien Determimasi, dan Koefisien Korelasi Parsial

4.10.1 Koefisien korelasi sederhana

Dalam analisis regresi linier berganda dapat dicari matriks koefisien korelasi sederhana atau koefisien korelasi order nol antarmasing-masing variabel bebas X dan juga dengan variabel tak bebas Y yang dicari dengan salah satu rumus yaitu.

$$\mathbf{r_{XiXj}} \quad = \quad \frac{\sum XiXj - \frac{\sum Xi \sum Xj}{n}}{\sqrt{\left(\sum Xi^2 - \frac{\left(\sum Xi\right)^2}{n}\right)\left(\sum Xj^2 - \frac{\left(\sum Xj\right)^2}{n}\right)}}$$

atau

$$\mathbf{r_{XY}} \quad = \quad \frac{\sum XY - \frac{\sum X \sum Y}{n}}{\sqrt{\left(\sum X^2 - \frac{\left(\sum X\right)^2}{n}\right)\left(\sum Y^2 - \frac{\left(\sum Y\right)^2}{n}\right)}}$$

Sebagai contoh perhitungan koefisien korelasi sederhana antara Y dengan X_1 dan X_2 serta antara X_1 dengan X_2 dengan hasil perhitungan dengan rumus [2.58c] dari Bab II dan diketahui bahwa nilai-nilai JK-JHK seperti berikut:

JK Y	=	2,4338	JK X_1	=	68,6893	JK X_2	=	4,7859
JHK $X_1 X_2$	=	8,9803	JHK X_1Y	=	11,6037	JHK X_2Y	=	2,4008

Maka perhitungan koefisien korelasi sederhana menjadi:

$$\mathbf{r_{X1Y}} = \frac{JHK\ X_1Y}{\sqrt{(JK\ X_1)(JKY)}}$$

$$= \frac{11{,}6037}{\sqrt{(68{,}6893)(2{,}4338)}}$$

$$= \mathbf{0{,}8974}$$

$$\mathbf{r_{X2Y}} = \frac{JHK\ X_2Y}{\sqrt{(JK\ X_2)(JK\ Y)}}$$

$$= \frac{2{,}4008}{\sqrt{(6{,}7859)(2{,}4338)}}$$

$$= \mathbf{0{,}7034}$$

$$\mathbf{r_{X1X2}} = \frac{JHK\ X_1X_2}{\sqrt{(JK\ X_1)(JK\ X_2)}}$$

$$= \frac{8{,}9803}{\sqrt{(68{,}6893)\,(4{,}7859)}}$$

$$= \mathbf{0{,}4950}$$

Memperhatikan perhitungan di atas dapatkah dikatakan bahwa $\mathbf{r}_{YX1}$ merupakan ukuran dari keeratan huhungan antara Y dengan X_1 yang sebenarnya tanpa ada pengaruh dari variabel yang lain , sementara diketahui bahwa yang mempengaruh nilai Y adalah X_2 selain nilai X_1 dan selain itu memungkin juga X_2 mempengaruhi X_1 .

Hasil perhitungan koefisien korelasi dari data Tabel 4.13 di atas hasilnya seperti pada Tabel 4.21 di bawah ini.

Tabel 4.21. Matriks Koefisien Korelasi Order Nol

Variabel	X1	X2	X3	X4	X5	Y
X1	**1,000**					
X2	0,891	**1,000**				
X3	0,366	0,634	**1,000**			
X4	0,313	0,636	0,959	**1,000**		
X5	0,273	0,589	0,890	0,913	**1,000**	
Y	0,950	0,957	0,610	0,567	0,511	**1,000**

Perhatikan nilai pada off diagonal selalu sama dengan satu (=1).

4.10.2 Koefisien determinasi

.Koefisien determinasi (R^2) dapat dicari dari Tabel 17 dengan memakai salah satu rumus:

$$R^2 = \frac{Jumlah\ Kuadrat\ \mathrm{Re}\,gresi}{Jumlah\ Kuadrat\ Total}$$

$$= \frac{13356184{,}43}{13554519{,}70}$$

$$= \mathbf{0{,}985}$$

Koefisien determinasi yang disesuaikan ($\overline{R}^2$) dapat dicari dengan salah satu rumus:

$$\overline{R}^2 = 1-(1-R^2)\frac{n-1}{n-(p-1)}$$

$$= 1-(1-0{,}985)\frac{47-1}{47-5-1}$$

$$= 1-(\ 0{,}015)\ \frac{46}{41}$$

$$= \mathbf{0{,}984}$$

4.10.2 Koefisien korelasi berganda (R)

Koefisien korelasi berganda (R) sering disebut dengan indeks korelasi yang dapat dicari dengan memakai salah satu rumus:

$$R = \sqrt{\frac{Jumlah\ Kuadrat\ \mathrm{Re}\,gresi}{Jumlah\ Kuadrat\ Total}}$$

$$R = \sqrt{\frac{13356184{,}43}{13554519{,}70}}$$

$$= \mathbf{0{,}984}$$

4.10.3 Koefisien korelasi parsial order satu

Sebagai contoh **koefisien korelasi parial order satu** yang berasal dari analisis regresi tiga variabel atau dua prediktor $\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2$ dengan rumus:

$$\mathbf{r_{YXi \cdot Xj}} = \frac{r_{YXi} - r_{YXj}\, r_{XiXj}}{\sqrt{(1 - r^2_{YXj})\,(1 - r^2_{XiXj})}}$$

Apabila diketahui bahwa $r_{X1Y} = 0{,}8974$; $r_{X2Y} = 0{,}7034$; dan $r_{X1X2} = 0{,}4950$ sehingga analisis korelasi parsial oder satu dari persamaan regresi tiga variabel menjadi seperti perhitungan di bawah ini.

$$\mathbf{r_{YX1 \cdot X2}} = \frac{r_{YX1} - r_{YX2}\, r_{X1X2}}{\sqrt{(1 - r^2_{YX2})\,(1 - r^2_{X1X2})}}$$

$$= \frac{0{,}8974 - (0{,}7034)\,(0{,}9450)}{\sqrt{(1 - 0{,}7034^2)\,(1 - 0{,}9450^2)}}$$

$$= \mathbf{0{,}8893}$$

$$r_{YX2 \cdot X1} = \frac{r_{YX2} - r_{YX1}\, r_{X1X2}}{\sqrt{(1 - r^2_{YX1})\,(1 - r^2_{X1X2})}}$$

$$= \frac{0{,}7034 - (0{,}8974)\,(0{,}9450)}{\sqrt{(1 - 0{,}8974^2)\,(1 - 0{,}9450^2)}}$$

$$= \mathbf{0{,}6761}$$

$$\mathbf{r_{X1X2.Y}} = \frac{r_{X!X2} - r_{YX1}\, r_{YX2}}{\sqrt{(1 - r^2_{YX1})\,(1 - r^2_{YX2})}}$$

$$= \frac{0{,}9450 - (0{,}8974)\,(0{,}7034)}{\sqrt{(1 - 0{,}8974^2)\,(1 - 0{,}7034^2)}}$$

$$= \mathbf{-\ 0{,}4344}$$

Apabila nilai koefisien korelasi parial ≤ 0 atau bernilai negatif, dianggap sama dengan nol.

1). $\mathbf{r}_{YX1 \cdot X2}$ korelasi parsial antara Y dengan X_1 apabila X_2 pengaruhnya konstan atau bebas
2). $\mathbf{r}_{YX2 \cdot X1}$ korelasi parsial antara Y dengan X_2 apabila X_1 pengaruhnya konstan atau bebas
3). $\mathbf{r}_{X1X2 \cdot Y}$ korelasi parsial antara X_1 dengan X_2 apabila Y pengaruhnya konstan atau bebas

Koefisien korelasi parsial order satu dapat dicari dari koefisien korelasi linier sederhana Tabel 4.21 dan hasilnya seperti Tabel 4.22 berikut di bawah ini..

Tabel 4.22. Matriks koefisien korelasi parsial order satu

Variabel	.X1	.X2	.X3	.X4	.X5	.Y
YX_1.	-	0,737	0,986	0,987	0,980	-
YX_2.	0,782	-	0,931	0,939	0,945	-
YX_4.	0,904	0,014	-	0,285	0,396	-
YX_4.	0,907	-0,188	-0,082	-	0,144	-
YX_5.	0,839	-0,224	-0,089	-0,010	0,839	
X_1X_2.	-	-	0,916	0,944	0,940	-0,202

4.10.4 Korelasi parsial order dua

Di dalam korelasi parsial order dua, dengan simbul $\mathbf{r}_{XiXj \cdot XkXl.}$ yang berari hubungan antara variabel X ke-i dengan variabel X ke-j yang bebas dari pengaruh variabel X ke-k dan variabel X ke-l.

Perhitungan nilai koefisien korelasi parsial order dua yang berasal dari prsamaan regresi seperti: $\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3$ akan didapatkan koefisien korelasi parsial order dua terhadap Y di mana:

1). $\mathbf{r}_{YX1 \cdot X2X3}$ koefisien korelasi parsial antara Y dengan X_1 apabila X_2 dan X_3 pengaruhnya konstan atau bebas terhadap Y

2). $\mathbf{r}_{YX2 \cdot X1X3}$ koefisien korelasi parsial antara Y dengan X_2 apabila X_1 dan X_3 pengaruhnya konstan atau bebas terhadap Y

3). $\mathbf{r}_{YX4.X1X2}$ koefisien korelasi parsial antara Y dengan X_3 apabila X_1 dan X_2 pengaruhnya konstan atau bebas terhadap Y

Perhitungan nilai koefisien korelasi parsial order dua, didasarkan pada nilai-nilai koefisien korelasi order satu dengan rumus.

$$\mathbf{r}_{YX1 \cdot X2\,X3} = \frac{r_{YX1.X2} - r_{YX3.X2}\, r_{X1X3.X2}}{\sqrt{(1 - r^2_{YX3.X2})\,(1 - r^2_{X1X3.X2})}}$$

$$\mathbf{r}_{YX2 \cdot X1X3} = \frac{r_{YX2.X1} - r_{YX3.X1}\, r_{X2X3.X1}}{\sqrt{(1 - r^2_{YX3.X1})\,(1 - r^2_{X1X3.X2})}}$$

$$\mathbf{r}_{X1X2.YX3} = \frac{r_{X1X2.Y} - r_{YX3.Y}\, r_{X2X3.Y}}{\sqrt{(1 - r^2_{YX3.Y})\,(1 - r^2_{X2X3.Y})}}$$

Sebagai ilustrasi contoh perhitungan yang berasal dari analisis parsial order satu dengan nilai-nilai: $\mathbf{r}_{YX1\cdot X2}$ = 0,737; $\mathbf{r}_{YX4.X2}$ = 0,014; dan $\mathbf{r}_{X1X4.X2}$ = -0,569; dengan rumus seperti:

$$\mathbf{r}_{YX1\cdot X2\,X3} = \frac{r_{YX1.X2} - r_{YX3.X2}\, r_{X1X3.X2}}{\sqrt{(1-r^2_{YX3.X2})\,(1-r^2_{X1X3.X2})}}$$

$$= \frac{0{,}767 - (0{,}014 \ x - 0{,}569)}{\sqrt{\{1-(0{,}014)^2)\}\{1-(-0{,}569)^2)}}$$

$$= \mathbf{0{,}907}$$

Koefisien korelasi parsial order dua dapat dicari dari koefisien korelasi parsial order satu dari Tabel 4.22 dan hasilnya seperti pada Tabel 4.23 di bawah ini.

Tabel 4.23. Matriks Koefisien Korelasi Parsial Order Dua

Variabel	.X1	.X2	.X3	.X4	.X5	.Y
$\mathbf{YX_1.X_2}$	-	-	0,907	0,888	0,825	-
$\mathbf{YX_1.X_3}$	-	0,907	-	0,987	0,986	-
$\mathbf{YX_1.X_4}$	-	0,888	0,987	-	0,987	-
$\mathbf{YX_1.X_5}$	-	0,825	0,986	0,987	-	-
$\mathbf{X_1X_2.X_3}$	-	-	-	0,952	0,924	- 0,027

4.10.4 Korelasi parsial order tiga dan sterusnya

Berdasarkan matriks korelasi, yang menunjukkan korelasi order satu atau korelasi linier sederhana dapat dihitung koefisien korelasi parsial order selanjutnya sesuai dengan banyaknya peubah yang dianalisis.

Untuk menghitung koefisien korelasi parsial order selanjutnya dengan **p** variabel bebas X dinyatakan dalam koefisien korelasi parsial order **p – 1,** dengan rumus**:**

$$\mathbf{r}_{X1X2.X3\,X4....Xp.} = \frac{r_{X1X2.X3X4...(Xp-1)} - r_{X1Xp.X3X4...(x.p-1)}\, r_{X2Xp.X3X4...(xp-1)}}{\sqrt{(1-r^2_{X1Xp.X3X4...(xp-1)})\,(1-r^2_{X2Xp.X3X4...(xp-1)})}}$$

Apabila koefisien korelasi oder **p** telah dihitung yang dinyatakan dengan koefisien korelasi oder **p –1,** maka selanjutnya dapat dihitung koefisien regresi parsial dengan rumus seperti berikut:

$$\mathbf{b}_{YX1.X2.X3X4...Xp.} = \frac{b_{YX1.X2.X3X4...(.Xp-1)} - b_{YXp.X2X3X4...(x.p-1)}\, b_{X1Xp.X2X3X4...(x.p-1)}}{\sqrt{(1-r^2_{YXp.X2X3X4...(Xp-1)})\,(1-r^2_{X1Xp.X2X3X4...(Xp-1)})}}$$

4.10.5 Hubungan Koefisien Korelasi dan Koefisien Regresi Sederhana, Parsial, dan Berganda

4.10.5.1 Hubungan koefisien regresi sederhana

$$\mathbf{b}_{\mathbf{YX1}} = \mathbf{r}_{\mathbf{YX1}} \frac{S_Y}{S_{X1}}$$ S_Y = simpangan baku Y

$$\mathbf{b}_{\mathbf{YX3}} = \mathbf{r}_{\mathbf{YX3}} \frac{S_Y}{S_{X3}}$$

$$\mathbf{b}_{\mathbf{X2X3}} = \mathbf{r}_{\mathbf{X2X3}} \frac{S_{X2}}{S_{X3}}$$

$$\mathbf{b}_{\mathbf{YX1.X3}} = \frac{b_{YX1} - b_{YX3} b_{X3X2}}{1 - b_{X2X3} b_{X3X2}} = \frac{r_{YX1} - r_{YX3} r_{X1X_3}}{1 - r^2_{X1X3}} \frac{S_Y}{S_{X1}}$$

$$\mathbf{b}_{\mathbf{YX1.X2}} = \frac{b_{YX1} - b_{YX2} b_{X2X1}}{1 - b_{X1X2} b_{X2X1}} = \frac{r_{YX1} - r_{YX2} r_{X1X_2}}{1 - r^2_{X1X2}} \frac{S_Y}{S_{X1}}$$

$$\mathbf{b}_{\mathbf{YX4.X2}} = \frac{b_{YX3} - b_{YX2} b_{X2X3}}{1 - b_{X3X2} b_{X2X3}} = \frac{r_{YX3} - r_{X1X2} r_{X2X_3}}{1 - r^2_{X2X3}} \frac{S_Y}{S_{X3}}$$

Sehingga didapatkan:

$$\mathbf{b}_{\mathbf{YX2.X3}} = \frac{b_{YX2} - b_{YX3} b_{X2X3}}{1 - b_{X2X3} b_{X3X2}} = \frac{r_{YX2} - r_{YX3} r_{X2X3}}{1 - r^2_{X2X3}} \frac{S_Y}{S_{X2}}$$

4.10.5.2 Hubungan koefisien regresi parsial dengan koefisien korelasi parsial

$$\mathbf{b}_{\mathbf{YX1.X2}} = \mathbf{r}_{\mathbf{YX1.X2}} \sqrt{\frac{\Sigma e_{YX3}}{\Sigma e^2_{X2X3}}}$$

$$\mathbf{b}_{\mathbf{YX4.X2}} = \mathbf{r}_{\mathbf{YX4.X2}} \sqrt{\frac{\Sigma e_{YX2}}{\Sigma e^2_{X3X2}}}$$

4.10.5.3 Hubungan koefisien determinasi dengan koefisien korelasi sederhana, koefisien korelasi parsial, dan koefisien regresi parsial

$$\mathbf{R^2} = \frac{r^2{}_{YX2} + r^2{}_{YX3} - 2\, r_{YX2}\, r_{YX1} r_{X2X3}}{1 - r^2_{X2X3}}$$

$$\mathbf{R^2 = r^2_{YX2} + (1 - r^2_{YX2})\, r^2_{YX4.X2}}$$

$$\mathbf{R^2 = r^2_{YX3} + (1 - r^2_{YX3})\, r^2_{YX2.X3}}$$

$$\mathbf{R^2} = \frac{b_{YX2}\, \Sigma x_2\, y + b_{YX3}\, \Sigma x_3\, y}{\Sigma y^2}$$

Cobalah cari nilai-nilai yang mungkin anda hitung dengan data di atas.

4.10.5.4 Hubungan koefisien regresi parsial

$$\mathbf{b}_{\mathbf{YX1.X3}} = \frac{b_{YX1} - b_{YX3}\, b_{X3X2}}{1 - b_{X2X3}\, b_{X3X2}}$$

$$= \frac{r_{YX1} - r_{YX3}\, r_{X1X_3}}{1 - r^2_{X1X3}} \; \frac{S_Y}{S_{X1}}$$

$$\mathbf{b}_{\mathbf{YX1.X2}} = \frac{b_{YX1} - b_{YX2}\, b_{X2X1}}{1 - b_{X1X2}\, b_{X2X1}}$$

$$= \frac{r_{YX1} - r_{YX2}\, r_{X1X_2}}{1 - r^2_{X1X2}} \; \frac{S_Y}{S_{X1}}$$

$$\mathbf{b}_{\mathbf{YX4.X2}} = \frac{b_{YX3} - b_{YX2}\, b_{X2X3}}{1 - b_{X3X2}\, b_{X2X3}}$$

$$= \frac{r_{YX3} - r_{X1X2}\, r_{X2X_3}}{1 - r^2_{X2X3}} \; \frac{S_Y}{S_{X3}}$$

Sehingga didapatkan:

$$\mathbf{b}_{\mathbf{YX2.X3}} = \frac{b_{YX2} - b_{YX3}\, b_{X2X3}}{1 - b_{X2X3}\, b_{X3X2}}$$

$$= \frac{r_{YX2} - r_{YX3}\, r_{X2X3}}{1 - r^2_{X2X3}} \; \frac{S_Y}{S_{X2}}$$

$$\mathbf{b}_{\mathbf{YX1.X2}} = \mathbf{r}_{\mathbf{YX1.X2}} \sqrt{\frac{\Sigma e_{YX3}}{\Sigma e^2_{X2X3}}}$$

$$\mathbf{b}_{\mathbf{YX4.X2}} = \mathbf{r}_{\mathbf{YX4.X2}} \sqrt{\frac{\Sigma e_{YX2}}{\Sigma e^2_{X3X2}}}$$

4.10.5.5 Hubungan koefisien determinasi dengan koefisien korelasi sederhana

$$\mathbf{R^2} = \frac{r^2{}_{YX2} + r^2{}_{YX3} - 2\, r_{YX2}\, r_{YX1}\, r_{X2X3}}{1 - r^2_{X2X3}}$$

$$\mathbf{R^2 = r^2_{YX2} + (1 - r^2_{YX2})\, r^2_{YX4.X2}}$$

$$\mathbf{R^2 = r^2_{YX3} + (1 - r^2_{YX3})\, r^2_{YX2.X3}}$$

$$\mathbf{R^2} = \frac{b_{YX2}\, \Sigma x_2\, y + b_{YX3}\, \Sigma x_3\, y}{\Sigma y^2}$$

4.11 Contoh Hasil *Output* Komputer dengan Menggunakan SPSS

Penjelasan tabel-tabel dari setiap hasil adalah seperti berikut di bawah ini.

Table 4.24. Statistik *Deskriptif*

Tabel 4.24. *Descriptive Statistics*

	Mean	*Std. Deviation*	N
Y	1489,4681	542,82914	47
X1	989,8936	405,94871	47
X2	31,3855	11,28505	47
X3	16,2702	8,55326	47
X4	1053,6170	585,34429	47
X5	134,6894	36,15793	47

Descriptive Statistics adalah penjelasan mengenai nilai rata-rata, standar deviasi, dan jumlah sampel yang dianalisis pada setiap variabel.

Tabel 4.25 Koefisien Korelasi

Tabel 4.25 *Correlations*

		X1	X2	X3	X4	X5	Y
X1	Pearson *Correlation*	1	,891**	,366*	,313*	,273	,950**
	Sig. (2-tailed)	.	,000	,012	,032	,064	,000
	N	47	47	47	47	47	47
X2	Pearson *Correlation*	,891**	1	,634**	,636**	,589**	,957**
	Sig. (2-tailed)	,000	.	,000	,000	,000	,000
	N	47	47	47	47	47	47
X3	Pearson *Correlation*	,366*	,634**	1	,959**	,890**	,610**
	Sig. (2-tailed)	.012	.000	.	,000	,000	,000
	N	47	47	47	47	47	47
X4	Pearson *Correlation*	,313*	,636**	,959**	1	,913**	,567**
	Sig. (2-tailed)	,032	,000	,000	.	,000	,000
	N	47	47	47	47	47	47
X5	Pearson *Correlation*	,273	,589**	,890**	,913**	1	,511**
	Sig. (2-tailed)	,064	,000	,000	,000	.	,000
	N	47	47	47	47	47	47
Y	Pearson *Correlation*	,950**	,957**	,610**	,567**	,511**	1
	Sig. (2-tailed)	,000	,000	,000	,000	,000	.
	N	47	47	47	47	47	47

** *Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).*

* *Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).*

Correlations adalah penjelasan mengenai koefisien korelasi linier sederhana versi *product momen* dari Pearson, significant (p) dengan uji dua arah, serta jumlah sampel yang dianalisis pada setiap variabel.

Tabel 4.26 ***Variabel Entered/Removed***

Tabel 4.26 ***Variables Entered/Removed***

Model	***Variables Entered***	***Variables Removed***	***Method***
1	X5, X1, X3, X2, X4	.	Enter

a All requested variables entered.
b Dependent Variable: Y

Variables Entered/Removed adalah penjelasan mengenai variabel mana yang mempunyai pengaruh yang paling utama kemudian diikuti oleh veriabel yang lain. Dalam Tabel 26 ini variabel yang paling berperngaruh adalah X_5 kemudian diikuti oleh X_1, dan yang terkecil pengaruhnya adalah variabel X_4.

Tabel 4.26 Analisis varians *(Analysis of Variance)*

Tabel 4.26 ***ANOVA***

Model	***Source of Variation (SV)***	***Sum of Squares (SS)***	***df***	***Mean Square (MS)***	***F***	***Sig.***
1	***Regression***	13356174,412	5	2671234,882	552,172	,000
	Residual	198345,291	41	4837,690		
	Total	13554519,702	46			

a Predictors: (Constant), X5, X1, X3, X2, X4
b Dependent Variable: Y

Pada Tabel Anova adalah sama dengan Sidik Ragam Regresi pada EXcel. Di mana Source of Variation (SV) atau Sumber Keragaman (SK) tidak ditampilkan pada SPSS; df = Degrees of Freesom atau = Derajat Bebas (DB); Sum of Squares SS) atau = JK (Jumlah Kuadrat); MS = Means Squarwes atau KT (Kuadrat Tengah); F = F hitung.

F adalah nilai F hitung seperti biasa yang dihitung dari JK Regresi/JKGalat

Sig = Significance F adalah sama dengan peluang nilai F hitung. Dalam hal ini nilai significance F dibandingkan nilai peluang (p) standar yaitu 5% dan 1%.

1). Apabila nilai sig ≥ (p = 0,05) mempunyai kesimpulan yang sama dengan $F_{hit} \leq F_{(tabel\ 5\%)}$; hal ini berarti terima H_0 yang menyatakan bahwa bidang regresi penduga ($\hat{Y}$) yang didapat tersebut bukan bidang regresi yang terbaik. Atau peubah bebas X_1 dan X_2 tidak berpengaruh terhadap variabel tak bebas Y.

2). Apabila nilai sig <(p = 0,05) dapat disimpulkan sama dengan $F_{hit} > F_{(tabel\ 5\%)}$; hal ini berarti tolak H_0 yang menyatakan bahwa bidang regresi penduga $\hat{Y}$ yang didapat adalah merupakan bidang regresi yang terbaik untuk menerangkan bahwa salah satu variabel bebas X_1 dan X_2 ada yang berpengaruh nyata terhadap variabel tak bebas Y.

3). Apabila nilai sig <(p = 0,01) dapat disimpulkan sama dengan $F_{hit} > F_{(tabel\ 1\%)}$; hal ini berarti tolak H_0 yang menyatakan bahwa bidang regresi penduga $\hat{Y}$ yang didapat adalah bidang regresi terbaik untuk menerangkan variabel bebas X_1 dan X_2 berpengaruh sangat nyata terhadap variabel tak bebas Y secara simultan.

Dari Tabel 4.26 (Anova) di atas didapat nilai F = 552,172 dengan sig = 0,0000. Ini berarti bahwa tolak H_0 yang menyatakan bidang regresi penduga $\hat{Y}$ adalah penduga regresi yang terbaik untuk menerangkan bahwa variabel bebas X_1 sd X_5 adalah berpengaruh sangat nyata terhadap variabel tak bebas Y secara simultan.

Tabel 4.27.   Model ringkasan

Tabel 4.27. ***Model Summary***

Model	*R*	*R Square*	*Adjusted R Square*	*Std. Error of the Estimate*
1	,993	,985	,984	69,55350

b Dependent Variable: Y

R = Multiple R pada analisis Excel adalah sama dengan koefisien korelasi berganda **r y**ang menunjukkan keeratan hubungan antara variabel bebas X_1 sd X_5 dengan peubah tak bebas Y yaitu sebesar 0,994.

R Square adalah koefisien determinasi R^2 yang menunjukkan variasi keragaman total Y yang dapat diterangkan oleh variasi variabel X_1 sd X_5 atau dapat diartikan bahwa sebesar 98,4,% variasi dari variabel tak bebas Y dipengaruhi oleh variasi variabel X_1 sd X_5 dan sisanya sebesar 1,6% dipengaruhi oleh variasi variabel selain variabel X_1 sd X_5.

Adjusted R Square adalah koefisien determinasi R^2 terkoreksi = 87,7% yang nilainya selalu lebih kecil dari pada koefisien determinasi $R^{2.}$

Stda Error of the Estimation adalah sama dengan Standard Error variabel tak bebas Y atau Salah Baku Y dengan rumus: $S_{\bar{Y}} = \frac{KT\ Y}{\sqrt{n}} = \frac{MS\ Y}{\sqrt{n}}$ = 69,55350.

Tabel 4.28 ***Model ringkasan***

Tabel 4.28*.* ***Model Summary***

Model	*R Square Change*	*F Change*	*df1*	*df2*	*Sig. F Change*	*Durbin-Watson*
	Change Statistics					
1	,985	552,172	5	41	,000	2,373

Dependent Variable: Y

R Square Change = 0,985 nilainya sama dengan nilai R Square di atas
F Change = 552,172 nilainya sama dengan nilai = F hitung di atas

df1 = derajat bebas Regeresi = p = 5 adalah sama dengan jumlah peubah bebas X
df2 = derajat bebas Galat Regeresi = 41
Sig F Change = p value untuk F Change = 0,000

Durbin-Watson test adalah suatu uji untuk data time series dari data pengamatan, yang menunjukkan apakah data ada unsur tine seriesnya akan dijelaskan kemudian.

Tabel 4.29 ***Koefisien regresi***

Tabel 4.29. ***Coefficients Regression***

Model	***Variable***	***Unstandardized Coefficients B***	***Std. Error***	***Standardized Coefficients Beta***	***t***	***Sig.***
1	***Constant***	47,659	61,000		,781	,439
	X1	,978	,092	,731	10,605	,000
	X2	6,974	3,975	,145	1,754	,087
	X3	12,193	4,827	,192	2,526	,016
	X4	$5{,}945^{-02}$	,084	,064	,705	,485
	X5	$-4{,}313^{-02}$	,725	-,003	-,059	,953

a Dependent Variable: Y

Varable adalah variabel yang akan dijelaskan dalam analisis SPSS dari X_1 sd X_5 dan Y

Constant sama artinya dengan Intercept = $\mathbf{b_0}$ **=** 47,659 yaitu jarak antara titik potong regresi penduga $\hat{Y}$ dengan titik acuan (0,0). Unstandardized Coefficients = Coefficients of regression sama dengan $\mathbf{b_i}$ yang diberi kode dengan B dalam hal ini sama dengan b_0, b_1 sampai dengan b_5 dari data asli. Masing-masing b_0 = 47,659; b_1 = 0,978; b_2 = 6,974; b_3, = 12,193; b_4 = $5{,}945^{-02}$; dan b_5 = $-4{,}313^{-02}$

Standardized Coefficients = Coefficients of regression dari semua data yang ditransformasikan ke dalam bentuk data standar atau data Z_i baik data Y maupun data X. Standardized Coefficients diberi nama beta (β). Dalam hal ini β_i yang berarti pengaruh langsung setiap variabel bebas X_i terhadap variabel tak bebas Y. Untuk variabel X_1 = 0,731; X_2 = 0,145; X_3 = 0,192; X_4 = 0,064; dan X_5 = -0,004. Badingkan dengan nilai b_0 sd b_5 di atas.

Kelebihan dari koefisien regresi yang distandarkan atau beta adalah dapat langsung dibandingkan sesamanya karena datanya telah distandarkan dan tanpa satuan. Nilai beta dengan harga mutlak yang lebih besar mempunyai pengaruh yang lebih besar terhadap variabel Y.

Std Error pada Tabel 27 tidak sama dengan ***Standart Error of estimation*** dalam Tabel 26. *Standart Error* pada Tabel 27 adalah *Standart Error* koefisien regresi yang menunjukkan nilai yang sama dengan S_{b0} sd S_{b5} untuk melakukan pengujian b_0 sd b_5. Sebagai contoh Standart Error untuk b_0 (S_{b0}) = 61,000; b_1 (S_{b1}) = 0,092; dan seterusnya.

t sama dengan $t\text{-}_{hitung}$ untuk b_i dengan rumus: t hitung b_i = $\frac{b_i}{S_{b_i}}$;

Sehinga nilai t-hitung untuk masing-masing b_0 = 0,781; b_1 = 20,065; b_2 = 1,754; dan seterusnya.

Sig = P-value pada analisis Excel adalah sama dengan nilai peluang dari nilai t-hitung. Dalam hal ini nilai t-hitung tidak dibangingkan dengan nilai t-tabel seperti biasa. Akan tetapi, Sig = nilai p-value dibandingkan nilai peluang (p) standar yaitu 5% atau 1% atau dengan α tertentu.

Untuk b_0, maka:

1). Apabila nilai Sig ≥ (p = 0,05) mempunyai kesimpulan yang sama dengan $t_{hit} \leq t_{(tabel\ 5\%)}$; hal ini berarti terima H_0 yang menyatakan bahwa bidang regresi penduga ($\hat{Y}$) melalui titik acuan (0,0)

2). Apabila nilai Sig < (p = 0,05) mempunyai kesimpulan yang sama dengan $t_{hit} > t_{(tabel\ 5\%)}$; hal ini berarti tolak H_0 yang menyatakan bahwa bidang regresi penduga ($\hat{Y}$) melalui tidak melalui titik acuan (0,0).

Ternyata nilai Sig b_0 = 0,439 < (p = 0,05) yang berarti bahwa nilai b_0 = 0,000 atau regresi penduga melalui titik acuan.

Untuk b_1 maka:

1). Apabila nilai Sig ≥ (p = 0,05) mempunyai kesimpulan yang sama dengan $t_{hit} \leq t_{(tabel\ 5\%)}$; hal ini berarti terima H_0 yang menyatakan bahwa bidang regresi penduga ($\hat{Y}$) sejajar dengan sumbu X_1 .

2). Apabila nilai Sig < (p = 0,05) mempunyai kesimpulan yang sama dengan $t_{hit} > t_{(tabel\ 5\%)}$; hal ini berarti tolak H_0 yang menyatakan bahwa bidang regresi penduga ($\hat{Y}$) melalui tidak sejajar dengan sumbu X_1..

Ternyata nilai Sig b_1 = 0,000 < (p = 0,01) yang berarti bahwa nilai b_1 berpengaruh sangat nyata terhadap regresi penduga.

Dan seterusnya dapat diuraikan seperti tersebut di atas untuk koefisien b_2 sd b_5 pada

Tabel 4.29 *Koefisien regresi*$_i$ di atas

Pada analisis SPSS hasilnya hampir sama dengan anlisis dengan Excel di mana nilai ***Lower Bound*** dan ***Upper Bound*** adalah sama dengan perkiraan nilai interval b_0 dan b_1 sd b_5 pendugaan nilai β_0 dan β_1 sd β_5 dengan rumus umum:

$$p\ \{b_i - t_{\alpha/2}\ sb_i \leq \beta_i \leq b_i - t_{\alpha/2}\ sb_i\} = 1 - \alpha\ .$$

Nilai 95% atau 99% = 1- α tergantung pada nilai α yang dipakai 5% atau 1%.

Perkiraan nilai β_0 berkisar antara - 75,534 sampai dengan 170,852 untuk α = 5%.

Perkiraan nilai β_1 berkisar antara 0,791 sampai dengan 1,164 untuk α = 5%.

Perkiraan nilai β_2 berkisar antara -1,054 sampai dengan 15,002 untuk α = 5%.

Tabel 4.30 *Confidence Interval of Coefficients Regression* dan *VIF*

Model	Var	95% Confidence Interval for B		Correlations			Collinearity Statistics	
		Lower bound	Upper bound	Zero-order	Partial	Part	Tolerance	VIF
1	**X0**	-75,534	170,852					
	X1	,791	1,164	,950	,856	,200	.075	14,316
	X2	-1,054	15,002	,957	,264	,033	.052	19,35
	X3	2,444	21,942	,610	,367	,048	.062	16,211
	X4	-,111	,230	,567	,109	,013	.043	24,168
	X5	-1,507	1,421	,511	-,009	-,001	.153	6,535

Perhatikan nilai ***Lower*** dan ***Upper*** di atas , apabila nilai Lower dan Upper bersifat definit positif atau definit negarif artinya baik Lower maupun Upper mempunyai tanda bilangan yang positif atau negarif (+ atau -) berarti dalam uji t hitung b_i menunjukkan signifikansi yang nyata pada taraf $\alpha = 5\%$ atau 1% seperti pada kasus X_1.

Sebaliknya apabila nilai Lower dan Upper berlainan tanda negatif pada Lower dan positif pada Upper yaitu dengan nilai negarif dan positif (+ atau -) berarti dalam uji t hitung b_i menunjukkan signifikansi yang tidak nyata pada taraf $\alpha = 5\%$ seperti pada kasus X_2. Demikian untuk seterusnya

Correlations di sini ada tiga macam yaitu nilai koefisien korelasi linier sederhana (Zero-order), koefisien korelasi parsial order satu, dan koefisien korelasi bagian (part) antara variabel X_1sd X_5 terhadap variabel Y.

Collinearity Statistics adalah ukuran untuk mengetahui adanya kolinieritas antar variabel bebas yang sedang dianalisis yaitu antara X_1 dan X_2. Kolinieritas dihitung dengan nilai tolerance atau VIF. Antara kedua variabel tersebut ada hubunganya di mana tolerance = 1/VIF. VIF singkatan dari varians inflation factor. Agar supaya variabel bebas antara X_i tidak dikatakan terdapat kolinieritas maka nilai tolerance atau VIF berkisar disekitar satu atau tolerance berkisar pada nilai sepuluh . Ternyata dari analisis pada Tabel 26b, terbukti adanya kolinieritas antar variabel yang tinggi karena nilai tolerance dan VIF jauh dari harga sama dengan satu.