PERSAMAAN SIMULTAN DENGAN MATRIK INVERS DAN CRAMER

Persamaan simultan sebagai metode penyelesaian persoalan matematik dengan data yang sangat kompleks tetapi penjabarannya dan penyelesaiannay dengan berbagai metode. Salah satu metode yang digunakan adalah matriks invers dan cramer.

Persamaan linear simultan merupakan bentuk persamaaan-persamaan yang secara bersama-sama menyajikan banyak variabel bebas. Bentuk persamaan linear simultan dengan m persamaan dan n variabel bebas

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

a_{ij} untuk i = 1 s/d m dan j = 1 s/d n adalah koefisien atau persamaan simultan
x_i untuk i = 1 s/d n adalah variabel bebas pada persamaan simultan

A. Metode Invers

Sebuah matriks bujur sangkar A berordo n

$$
\begin{matrix} a11 & a12 & a1n \\ a21 & a23 & a2n \\ an1 & an2 & ann \end{matrix}
$$

Mempunyai invers, jika ada suatu matriks B_1, sehingga AB = BA I_n. Matriks B disebut invers matriks A_1 ditulis A^{-1}.

Contoh

Carilah invers dari A = $\begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{matrix}$

$$
\begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{matrix} \begin{matrix} a1 & a2 \\ a3 & a4 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}
$$

Jika dikalikan $\begin{matrix} 2a1 + a3 & 2a2 + a4 \\ 4a1 + 3a3 & 4a2\_3a4 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$

Atau

2a1+a3 = 1

2a2+a4 = 0

4a1+3a3 = 0

4a2+3a4 = 1

Jika kita selesaikan, diperoleh a1 = 3/2, a2 = -1/2, a3 = -2, a4 = 1

Jadi $A^{-1} = \begin{matrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{matrix}$

Dapat juga diselidiki pada contoh diatas bahwa $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$. Cara seperti diatas hanya baik untuk matriks yang berordo kecil, yaitu untuk n = 2. Untuk ordo-ordo yang lebih besar dapat dipelajari selanjutnya.

Ternyata bahwa matriks-matriks yang mempunyai invers adalah matriks-matriks yang non singular (determinannya ≠ 0 atau rank nya r = n). Invers matriks jika ada adalah tunggal (hanya satu).

$(A^{-1})^{-1} = A$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Seperti pada matrik A = (a_{ij}). Kita sebut kofaktor dari elemen a_{ij} sebagai C_{ij}, maka matriks

$$\begin{matrix} C11 & C12 & C1n \\ C21 & C23 & C2n \\ Cn1 & Cn2 & Cnn \end{matrix}$$

Dinamakan matriks kofaktor A. Transpose dari matriks ini dinamakan adjoin A, dinotasikan dengan adj (A).

Kita hendak mencari matriks adjoin A =

$$\begin{matrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{matrix}$$

Kofaktor dari kesembilan elemen dari A adalah sebagai berikut:

$C_{11} = + \begin{matrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{matrix} = -18$

$C_{12} = - \begin{matrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{matrix} = 2$

$C_{13} = + \begin{matrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{matrix} = 4$

$C_{21} = - \begin{matrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{matrix} = -11$

$C_{22} = + \begin{matrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{matrix} = 14$

$C_{23} = - \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{matrix} = 5$

$C_{31} = + \begin{matrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{matrix} = -10$

$C_{32} = - \begin{matrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{matrix} = -4$

$C_{33} = - \begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{matrix} = -8$

Jadi Adj (A) =

$$\begin{matrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{matrix}$$

Dengan pertolongan matriks Adjoin, kita dapat mencari invers suatu matriks:

$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)}$, dengan syarat det (A) $\neq$ 0

Carilah A^{-1} dengan menggunakan matriks adjoin sebagai berikut:

A =

$$\begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{matrix}$$

Maka $C_{11} = 3$, $C_{12} = -4$, $C_{21} = -1$, $C_{22} = 2$

Adj(A)

$$\begin{matrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{matrix}$$

Det (A) =

$\begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{matrix} = 2$

Jadi A^{-1}

$$\frac{\begin{matrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{matrix}}{2}$$

$= \begin{matrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{matrix}$

Carilah A^{-1} dengan menggunakan matriks adjoin sebagai berikut:

A =

$$\begin{matrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{matrix}$$

$= 2 \begin{matrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{matrix} + \begin{matrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{matrix}$

= -36 -10

= -46

$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)} = \frac{1}{-46} \begin{matrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{matrix} = \begin{matrix} 9/23 & 11/46 & 5/23 \\ -1/23 & -7/23 & 2/23 \\ -2/23 & -5/46 & 4/23 \end{matrix}$

B. Metode Cramer

Jika determinan d = det x dari sebuah sistem n buah persamaan linier.

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_1nxn = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_2nxn = b_2$

$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{n}nxn = b_n$

Syarat untuk mempunyai suatu penyelesaian tunggal, tidak ada penyelesaian dan mempunyai banyak tak terhingga penyelesaian ditentukan dengan nilai det (A) seperti pada sistem persamaan dengan 2 variabel.

Nilai variabel x = det(Ax) / det (A), y = det(Ay)/det(A), z = det(Az)/det(A)

Teori yang harus diperhatikan dalam penggunaan aturan Cramer :

1. jika A adalah sebuah matriks bujursangkar yang mengandung paling sedikit satu baris bilangan no, maka det(A) = 0. Jika sebuah matriks bujursangkar mempunyai dua baris yang sebanding maka nilai determinan matriks tersebut sama dengan nol.

   - Matriks Bujur Sangkar: Suatu matriks dengan banyak baris = banyak kolom = n disebut matriks bujur sangkar berukuran n (berordo n). Barisan elemen a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} disebut diagonal utama dari matriks bujur sangkar A tersebut

2. jika A adalah sebuah matriks segitiga yang berukuran n x n maka determinan A adalah hasil perkalian semua unsur pada kolom utama

   - Matriks segitiga bawah: matriks bujur sangkar yang semua elemen diatas diagonal utama = 0. Dengan perkataan lain, (aij) adalah matriks segitiga bawah jika aij = 0,untuk I < j

   - Matriks segitiga atas: matriks bujur sangkar yang semua elemen dibawah diagonal utama = 0.Dengan perkalian lain, aij adalah matriks segitiga atas jika aij = 0, untuk I > j