

DISTRIBUSI PROBABILITAS

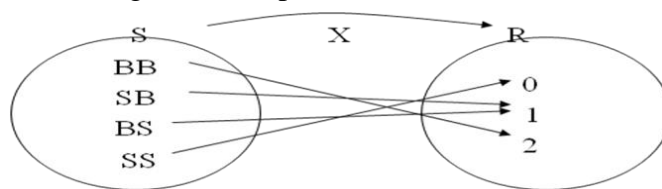
Tujuan: Memahami distribusi probabilitas diskrit

A. Pendahuluan

Probabilitas sangat dibutuhkan, karena kebenaran dari suatu kesimpulan yang dibuat dari analisis data sebetulnya tidak dapat dipastikan benar secara absolut, disebabkan data berdasarkan dari sampel. Distribusi Probabilitas adalah suatu distribusi yang menggambarkan peluang dari sekumpulan variat sebagai pengganti frekuensinya. Probabilitas kumulatif adalah probabilitas dari suatu variabel acak yang mempunyai nilai sama atau kurang dari suatu nilai tertentu. Fungsi distribusi peluang pada umumnya dibedakan atas distribusi peluang diskrit dan distribusi peluang kontinu. Kunci aplikasi probabilitas dalam statistik adalah memperkirakan terjadinya peluang/probabilitas yang dihubungkan dengan terjadinya peristiwa tersebut dalam beberapa keadaan. Jika kita mengetahui keseluruhan probabilitas dari kemungkinan outcome yang terjadi, seluruh probabilitas kejadian tersebut akan membentuk suatu distribusi probabilitas.

Variabel random diskrit merupakan suatu variabel random yang hanya dapat memiliki harga-harga yang berbeda yang berhingga banyaknya (sama banyaknya dengan bilangan bulat). Variabel random kontinu merupakan suatu variabel random yang dapat memiliki harga dalam suatu interval (tak berhingga banyaknya). Distribusi Peluang merupakan model matematik yang menghubungkan semua nilai variabel random dengan peluang terjadinya nilai tersebut dalam ruang sampel. Distribusi peluang dapat direpresentasikan dalam bentuk fungsi, tabel, atau grafik. Distribusi peluang dapat dianggap sebagai frekuensi relatif jangka panjang. Variabel random X adalah fungsi dari S ruang sampel ke bilangan real R , ditulis : $X : S \rightarrow R$. Misalnya untuk menjawab persoalan pilihan dua kali terhadap pilihan Benar(B) atau Salah (S), ditulis ruang sampel $S = \{SS, SB, BS, BB\}$. Jika X merupakan Variabel Random banyaknya jawaban benar, maka $X = \{0,1,2\}$

Secara grafik bisa digambarkan pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1 Variabel random X adalah fungsi dari S ruang sampel ke bilangan real R

B. Distribusi probabilitas diskrit

a. Variabel diskrit

Pada variable diskrit setiap harga variabel terdapat nilai peluangnya, serta peluang diskrit terbentuk bilamana jumlah semua peluang sama dengan satu. Ini dikatakan wajar karena setiap

peristiwa pasti memiliki nilai penjumlahan peluang sama dengan satu dari setiap kejadian yang mungkin terjadi.

Variabel diskrit merupakan variable yang nilainya dapat diperoleh dengan cara membilang ataupun menghitung. Variable dari sampel yang diambil dari populasi ini bertujuan untuk mempermudah pemahaman teori sampel dan pembahasan hipotesis pada pengujian selanjutnya.

Variabel diskrit X menentukan distribusi peluang apabila untuk nilai $X = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ terdapat peluang $p(x_i) = P(X=x_i)$ ditulis

Distribusi Peluang Diskret

Fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi peluang dari variabel random diskret X , jika untuk setiap harga x yang mungkin :

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_x f(x) = 1$

Peluang untuk nilai x tertentu:

$$P(X = x) = f(x)$$

Distribusi kumulatif $F(x)$

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t)$$

Distribusi Peluang Diskret

Distribusi peluang X dalam bentuk tabel:

Harga X	$P(X = x) = f(x)$
x_1	P_1
x_2	P_2
...	...
x_k	P_k

Contoh 1

Distribusi banyaknya sisi muka yang muncul dalam pelemparan mata uang logam tiga kali.

Harga X	$P(X = x) = f(x)$
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

$\sum P(x) = 1$

Ekspektasi sebuah variable acak ditentukan oleh beberapa criteria, yaitu kita dapat menentukan sebuah variable acak jika ada ekspektasinya. Rumus untuk mencari ekspektasi atau nilai harap dari variable acak adalah sebagai berikut ;

Harga harapan, Variansi dan sifat-sifatnya
Harga Harapan (Ekspektasi, *Expected Value*)

$$E(X) = \begin{cases} \sum_x x f(x) & \text{bila } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx & \text{bila } X \text{ kontinu} \end{cases}$$

$E(X)$ sering ditulis sebagai μ_X atau μ

Variansi (*Variance*)

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X - \mu)^2 \\ &= E(X^2) - \mu^2 \end{aligned}$$

Contoh 2.

Pengamatan yang dilakukan oleh seorang siswa memperlihatkan banyak kendaraan yang melewati sekolahnya tiap menit mengikuti distribusi peluang adalah sebagai berikut;

Banyak kendaraan	0	1	2	3	4	5	6	7
Peluang	0,01	0,07	0,12	0,21	0,11	0,19	0,24	0,05

Dengan menggunakan rumus

Diperoleh bahwa rata-rata tiap menit terdapat kendaraan yang melalui sekolahnya adalah sebanyak;

$$\begin{aligned} &(0)(0,01)+(1)(0,07)+(2)(0,12)+(3)(0,21)+(4)(0,11)+(5)(0,19)+(6)(0,24)+(7)(0,05)= \\ &(0)+(0,07)+(0,24)+(0,63)+(0,44)+(0,95)+(1,44)+(0,35)= 4,12 \end{aligned}$$

Atau dapat dikatakan bahwa terdapat 412 kendaraan yang lewat didepan sekolahnya setiap 100 menit.

Dua Variabel Random

Ada dua variabel random yang diamati bersamaan dalam suatu eksperimen.

Contoh:

Sebuah mata uang logam dilemparkan tiga kali.

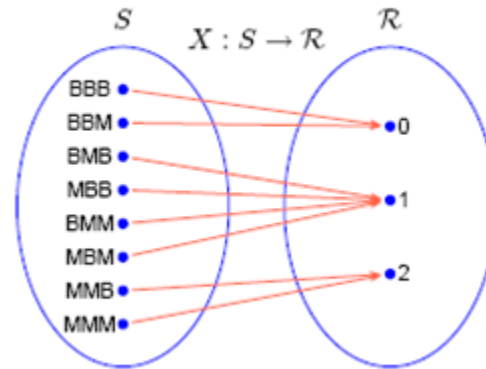
X: banyaknya M muncul dalam dua lemparan pertama

Y : banyaknya M muncul dalam lemparan ketiga

Distribusi peluang untuk dua variabel random disebut sebagai distribusi peluang bersama

Contoh 3
Distribusi peluang variabel random X :

x	$P(X = x)$
0	1/4
1	1/2
2	1/4



X : banyaknya M muncul dalam dua lemparan pertama

Peluang dan Variabel Random

Contoh (dua variabel random)
Distribusi peluang bersama X dan Y , $P(X = x, Y = y)$:

x	y		$P(X = x)$
	0	1	
0	{BBB}	{BBM}	1/4
1	{BMB, MBB}	{BMM, MBM}	1/2
2	{MMB}	{MMM}	1/4
$P(Y = y)$	1/2	1/2	1

Contoh (dua variabel random)
Distribusi peluang bersama X dan Y , $P(X = x, Y = y)$:

x	y		$P(X = x)$
	0	1	
0	1/8	1/8	1/4
1	2/8	2/8	1/2
2	1/8	1/8	1/4
$P(Y = y)$	1/2	1/2	1

Jika $P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$ untuk setiap nilai dari X dan Y maka dua variabel random tersebut dikatakan independen

Contoh 4

Jika dalam keluarga terdapat dua orang anak, apabila peluang kelahiran antara anak wanita dan anak pria adalah sama, maka kemungkinan dari suatu keluarga memiliki dua orang anak adalah:

1. Anak pertama wanita, anak kedua juga wanita (WW)
2. Anak pertama wanita, tetapi anak kedua pria (WP)
3. Anak pertama pria, tetapi anak kedua wanita (PW)

4. Anak pertama pria, anak kedua juga pria (PP)

Dengan perbandingan WW : WP : PW : PP = 1:1:1:1, atau dinyatakan dalam bilangan-bilangan probabilitas 0,25 : 0,25 : 0,25 : 0,25. jumlah seluruh probabilitasnya adalah 1

Jika kombinasi WP dan PW disatukan dan diberikan simbol-simbol masing-masing p_1, p_2, p_3 untuk WW, WP dan PW, serta PP, maka perbandingan probabilitasnya akan menjadi:

WW atau 2W maka $P_1 = 0,25$

WP dan Pw atau 1W1P maka $p_2 = 0,25 + 0,25$

PP atau 2P maka $P_3 = 0,25$

CONTOH 5.

Jika kita melakukan pelemparan sebuah mata uang logam, maka diperoleh probabilitas p (muka G) = p(muka A) = $\frac{1}{2}$, jika dihitung banyaknya muka G yang nampak, maka muka A = 0 G dan muka G – 1 G jika muka G diberi simbol x, maka muka untuk A dan G masing-masing $x = 0$ dan $x = 1$. di dapat notasi baru $p(x=0) = \frac{1}{2}$ dan $p(x=1) = \frac{1}{2}$

Jika lemparan yang dilakukan dengan menggunakan dua buah mata uang, maka peristiwa yang terjadi adalah: GG, GA, AG, dan AA. Probabilitas dari kejadian tersebut adalah $p(GG) = p(GA) = p(AG) = p(AA) = \frac{1}{4}$. Dalam bentuk tabel ditulis sebagai berikut:

Tabel Distribusi Probabilitas Gejala Diskrit

X	P (X)
0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
Jumlah	1

Contoh 6

Hasil pengamatan menunjukkan bahwa setiap jam frekuensi siswa yang meminjam buku sebuah perpustakaan mengikuti distribusi probabilitas sebagai berikut.

Banyak siswa	0	1	2	3	4	5	6
Probabilitas	0,02	0,04	0,05	0,08	0,07	0,03	0,01

Berapakah probabilitas dalam satu jam paling sedikit ada 4 siswa yang keperustakaan?

Berapakah rata-rata siswa yang datang keperustakaan tiap jam ?

SOLUSI.

Probabilitas dalam satu jam paling sedikit ada 4 siswa yang datang ke perpustakaan adalah = $1 - 0,26 = 0,74$.

Rata-rata siswa yang datang ke perpustakaan tiap jam

$$= (0)(0,02) + (1)(0,04) + \dots + (6)(0,01) = 0,71$$

Kovariansi

Ukuran numerik untuk variansi bersama dua variabel random

$$\begin{aligned} \text{Kov}(X, Y) &= E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \\ &= E(XY) - \mu_X \mu_Y \end{aligned}$$

Korelasi

Kovariansi dibagi dengan standar deviasi X dan standar deviasi Y

$$\text{Kor}(X, Y) = \frac{\text{Kov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

Harga harapan untuk penjumlahan dan pengurangan dua variabel random,

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= E(X) + E(Y) \\ E(X - Y) &= E(X) - E(Y) \end{aligned}$$

Variansi untuk penjumlahan dan pengurangan dua variabel random,

$$\begin{aligned} \text{Var}(X + Y) &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Kov}(X, Y) \\ \text{Var}(X - Y) &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2\text{Kov}(X, Y) \end{aligned}$$

1. Distribusi Bernoulli

Eksperimen Eksperimen Bernoulli dengan hanya dua hasil yang mungkin

Contoh

- melempar mata uang logam satu kali
- Mengamati telur ayam, apakah anak ayam itu jantan atau betina
- Mengamati kedelai yang ditanam, tumbuh atau tidak
- Reaksi obat pada tikus, positif atau negatif

Sifat-sifat Eksperimen Bernoulli

- tiap usaha (*trial*) menghasilkan satu dari dua hasil yang mungkin, dinamakan sukses (S) dan gagal (G);
- peluang sukses, $P(S) = p$ dan peluang gagal $P(G) = 1 - p$, atau $P(G) = q$;
- usaha-usaha tersebut independen

Distribusi Bernoulli

$$P(X = x; p) = p^x(1 - p)^{1-x},$$

dengan $x = 0, 1$ (gagal, sukses) dan p adalah peluang mendapatkan hasil sukses.

2. Distribusi Binomial

Distribusi Binomial atau distribusi Bernoulli (ditemukan oleh James Bernoulli) adalah suatu distribusi probabilitas teoritis yang menggunakan variabel random diskrit yang terdiri dari dua kejadian yang berkomplemen, seperti sukses-gagal, ya-tidak, baik-cacat, kepala-ekor dll.

Ciri-ciri distribusi Binomial adalah sbb :

1. Setiap percobaan hanya memiliki dua peristiwa, seperti ya-tidak, sukses-gagal.
2. Probabilitas suatu peristiwa adalah tetap, tidak berubah untuk setiap percobaan.
3. Percobaannya bersifat independen, artinya peristiwa dari suatu percobaan tidak mempengaruhi atau dipengaruhi peristiwa dalam percobaan lainnya.
4. Jumlah atau banyaknya percobaan yang merupakan komponen percobaan binomial harus tertentu.

Rumus Distribusi Binomial

a). Rumus binomial suatu peristiwa

Probabilitas suatu peristiwa dapat dihitung dengan mengalikan kombinasi susunan dengan probabilitas salah satu susunan. Berdasarkan hal tersebut, secara umum rumus dari probabilitas binomial suatu peristiwa dituliskan:

$$P(X = x) = C_x^n \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

Dimana :

$$C_x^n = \frac{n!}{x!(n-x)!} \quad \text{dan} \quad q = 1 - p$$

Contoh 7 (Distribusi Binomial)

Suatu uang logam yang baik (seimbang) dilempar 4 kali. X adalah banyaknya muka muncul dalam 4 kali pelemparan tersebut.

Pelemparan dipandang sebagai usaha, dan sukses adalah muka muncul. X merupakan variabel random binomial dengan $n = 4$ dan $p = 1/2$ dengan distribusi peluang:

$$P(X = x; 4, \frac{1}{2}) = \binom{4}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4$$

Peluang muka muncul paling tidak dua kali, $X \geq 2$

$$\begin{aligned}P(X \geq 2; 4, \frac{1}{2}) &= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) \\ &= \frac{11}{16}\end{aligned}$$

b). Probabilitas binomial kumulatif

Probabilitas binomial kumulatif adalah probabilitas dari peristiwa binomial lebih dari satu sukses. Probabilitas binomial kumulatif dapat dihitung dengan menggunakan rumus :

$$\begin{aligned}PBK &= \sum_{x=0}^n C_x^n \cdot p^x \cdot q^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^n P(X = x) \\ &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + \dots + P(X=n)\end{aligned}$$

Contoh 8:

Sebuah dadu dilemparkan keatas sebanyak 4 kali. Tentukan probabilitas dari peristiwa berikut :

- Mata dadu 5 muncul 1 kali
- Mata dadu genap muncul 2 kali
- Mata dadu 2 atau 6 muncul sebanyak 4 kali.

Jawab

a). Karena dadu memiliki 6 sisi, yaitu 1, 2, 3, 4, 5, 6, sehingga setiap sisi memiliki probabilitas 1/6. Jadi, probabilitas untuk mata 1 adalah 1/6, sehingga :

$$\begin{aligned}p &= 1/6; q = 5/6; n = 4; x = 1 \text{ (muncul 1 kali)} \\ P(X=1) &= C_4^1 \cdot p^1 \cdot q^3 \\ &= 4(1/6)1(5/6)^3 \\ &= 0,386\end{aligned}$$

b). Mata dadu genap ada 3, yaitu 2,4, dan 6, sehingga :

$$\begin{aligned}p &= 3/6 = 1/2; q = 1/2; n = 4; x = 2 \\ P(X=2) &= C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^2 \\ &= 6(1/2)^2(1/2)^2 \\ &= 0,375\end{aligned}$$

c). Muncul mata dadu 2 atau 6 sebanyak 4 kali, sehingga :

$$\begin{aligned}p &= 2/6; q = 2/3; n = 4; x = 4 \\ P(X=4) &= C_4^4 \cdot p^4 \cdot q^0 \\ &= 1(2/6)^4(2/3)^0 \\ &= 0,0123\end{aligned}$$

3. Distribusi Poisson

Distibusi Poisson merupakan distribusi probabilitas untuk variabel diskrit acak yang mempunyai nilai 0,1, 2, 3 dst. Distribusi Poisson adalah distribusi nilai-nilai bagi suatu variabel random X (X diskrit), yaitu banyaknya hasil percobaan yang terjadi dalam suatu interval waktu tertentu atau disuatu daerah tertentu. fungsi distribusi probabilitas diskrit yang sangat penting dalam beberapa aplikasi praktis. Poisson memperhatikan bahwa distribusi binomial sangat bermanfaat dan dapat menjelaskan dengan sangat memuaskan terhadap probabilitas Binomial $b(X | n,p)$ untuk $X= 1,2,3 \dots n$. Namun demikian, untuk suatu kejadian dimana n sangat besar (lebih besar dari 50) sedangkan probabilitas sukses (p) sangat kecil seperti 0,1 atau kurang, maka nilai binomialnya sangat sulit dicari. Suatu bentuk dari distribusi ini adalah rumus pendekatan peluang Poisson untuk peluang Binomial yang dapat digunakan untuk pendekatan probabilitas Binomial dalam situasi tertentu.

Ciri-ciri ditribusi Poisson.

Percobaan Poisson memiliki ciri-ciri berikut bahwa hasil percobaan pada suatu selang waktu dan tempat tidak tergantung dari hasil percobaan di selang waktu dan tempat yang lain yang terpisah, Peluang terjadinya suatu hasil percobaan sebanding dengan panjang selang waktu dan luas tempat percobaan terjadi. Hal ini berlaku hanya untuk selang waktu yang singkat dan luas daerah yang sempit Peluang bahwa lebih dari satu hasil percobaan akan terjadi pada satu selang waktu dan luasan tempat yang sama diabaikan

Penggunaan Distribusi Poisson

Distribusi poisson banyak digunakan dalam hal:

a). menghitung Probabilitas terjadinya peristiwa menurut satuan waktu, ruang atau isi, luas, panjang tertentu, seperti:

- ✓ Menghitung probabilitas dari kemungkinan kesalahan pemasukan data atau kemungkinan cek ditolak oleh bank.
- ✓ Jumlah pelanggan yang harus antri pada pelayanan rumah sakit, restaurant cepat saji atau antrian yang panjang bila ke ancol.
- ✓ Banyaknya bintang dalam suatu area acak di ruangangkasa atau banyaknya bakteri dalam 1 tetes atau 1 liter air.
- ✓ Jumlah salah cetak dalam suatu halaman ketik. Banyaknya penggunaan telepon per menit atau banyaknya mobil yang lewat selama 5 menit di suatu ruas jalan.
- ✓ Distribusi bakteri di permukaan beberapa rumput liar di ladang. Semua contoh ini merupakan beberapa hal yang menggambarkan tentang suatu distribusi Poisson.

b). Menghitung distribusi binomial apabila nilai n besar ($n \geq 30$) dan p kecil ($p < 0,1$).

Jika kita menghitung sejumlah benda acak dalam suatu daerah tertentu T , maka proses penghitungan ini dilakukan sebagai berikut :

- ✓ jumlah rata-rata benda di daerah S T adalah sebanding terhadap ukuran S , yaitu $E\text{Count}(S) = \lambda S$. Di sini melambangkan ukuran S , yaitu panjang, luas, volume, dan lain lain. Parameter $\lambda > 0$ menggambarkan intensitas proses.
- ✓ menghitung di daerah terpisah adalah bebas.
- ✓ kesempatan untuk mengamati lebih dari satu benda di dalam suatu daerah kecil adalah sangat kecil

Rumus Distribusi Poisson

Rumus Poisson dapat digunakan untuk menghitung probabilitas dari jumlah kedatangan, misalnya : probabilitas jumlah kedatangan nasabah pada suatu bank pada jam kantor. Distribusi Poisson ini digunakan untuk menghitung probabilitas menurut satuan waktu.

Rumus Probabilitas Poisson Suatu Peristiwa

Probabilitas suatu peristiwa yang berdistribusi Poisson dirumuskan:

$$P(X) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}; x = 0,1,2,\dots$$

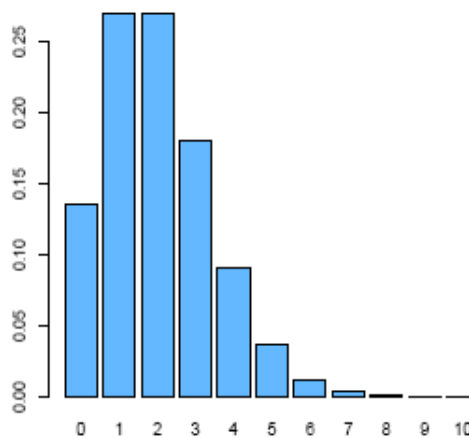
Keterangan: P(x) = Nilai probabilitas distribusi poisson $\mu = \lambda =$ Rata-rata hitung dan jumlah nilai sukses, dimana $\mu = n.p.$

e = Bilangan konstan = 2,71828

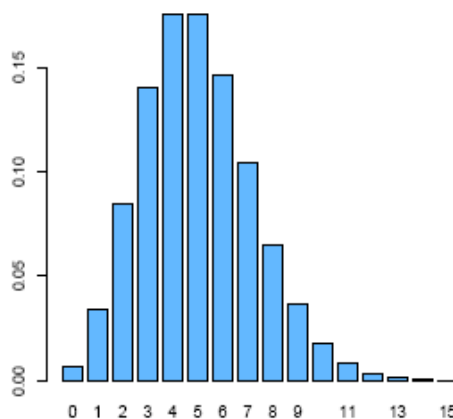
X = Jumlah nilai sukses P = Probabilitas sukses suatu kejadian

! = lambang faktorial

Poisson dengan $\lambda = 2$



Poisson dengan $\lambda = 5$



Contoh 9

Jumlah emiten di BEJ ada 150 perusahaan. Probabilitas perusahaan memberikan deviden pada tahun 2002 hanya 0,1. apabila BEJ meminta laporan dari emiten sebanyak 5 perusahaan, berapa probabilitas 5 perusahaan tersebut adalah perusahaan yang membagikan deviden?

Jawab:

$n = 150$, $X = 5$, dan $p = 0,1$ (ini merupakan cirri distribusi Poisson, $n > 50$ dan p kecil yaitu)
 $\mu = n \cdot p = 150 \times 0,1 = 15$

Jadi probabilitas 5 perusahaan sample membagikan deviden hanya 0,002 atau 0,2%

4. Distribusi Multinomial

Distribusi multinomial merupakan perluasan dari distribusi binomial, jika pada distribusi binomial hanya tertekan pada 2 pilihan atau 2 kemungkinan yang mungkin terjadi dari sebuah peristiwa maka pada distribusi multinomial adalah banyak kemungkinan yang mungkin terjadi dari sebuah peristiwa.

Sebuah eksperimen menghasilkan peristiwa-peristiwa E_1, E_2, \dots, E_k

dengan peluang $p_1 = P(E_1), p_2 = P(E_2), \dots, p_k = P(E_k)$,

dengan $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$.

Terhadap eksperimen ini dilakukan percobaan sebanyak n kali. Sehingga peluang akan terdapat x_1 peristiwa E_1, x_2 peristiwa E_2, \dots, x_k peristiwa E_k di antara N , ditentukan oleh distribusi multinom yaitu:

$$f(x;n,p) = \frac{n!}{(x_1!x_2!\dots x_k!)} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$$

Dengan $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ dan $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$,

sedang $0 < p_i < 1$

$i = 1, 2, \dots, k$.

Ekspektasi terjadinya tiap peristiwa E_1, E_2, \dots, E_k dalam peristiwa multinom, berturut-turut adalah:

$$Np_1, Np_2, \dots, Np_k$$

Sedangkan variansnya masing-masing:

$$Np_1(1 - p_1), Np_2(1 - p_2), \dots, Np_k(1 - p_k).$$

Percobaan multinomial terjadi bila tiap usaha dapat memberikan lebih dari dua hasil yang mungkin. Jadi, pembagian hasil pabrik jadi ringan, berat/masih dapat diterima, demikain juga percobaan kecelakaan disuatu simpang jalan menurut hari dalam seminggu merupakan percobaan multinomial. Penarikan suatu kartu dari sekotak kartu brige *dengan pengambila* juga merupakan percobaan multinomial bila yang menjadi perhatian keempat warna kartu.

Secara umum, bila suatu usaha dapat menghasilkan " hasil mungkin , masing-masing dengan peluang , maka **distribusi multinom** akan memberikan peluang bahwa terjadi sebanyak kali, kali, sebanyak kali dalam bebas dengan:

Distribusi peluang gabungan seperti ini akan dinyatakan dengan . Jelaslah bahwa , karena hasil tiap usaha haeculah salah dari hasil yang mungkin.

Contoh 10

Dua buah dadu dilempar enam kali, berapa peluang muncul bilangan yang hasil penjumlahannya adalah 7 atau 11 sebanyak dua kali, bilangan yang sama muncul sekali dan hasil yang lainnya muncul tiga kali?

Jawab

Banyaknya titik sampel pada pelemparan dua buah dadu adalah 36 titik sampel.

1. Kejadian E1, muncul bilangan yang hasil penjumlahannya adalah 7 atau 11 sebanyak dua kali. Pelungnya adalah $\frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{2}{9}$. .
2. Kejadian E2, muncul bilangan yang sama sebanyak dua sekali. Peluangnya adalah $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. .
3. Kejadian E3, muncul hasil lainnya sebanyak dua sekali. Peluangnya adalah $1 - \frac{2}{9} - \frac{1}{6} = \frac{11}{18}$.

Diketahui juga $n=6$ dimana $x_1=2$, $x_2=1$, dan $x_3=3$, maka persoalan tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan rumus Distribusi Multinomial.

$$f(x;n,p) = \frac{6!}{(2!1!3!)} \left(\frac{2}{9}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{11}{18}\right)^3 = 0,1127$$

5. Distribusi Hipergeometrik

Eksperimen hipergeometrik: dalam populasi berukuran N sebanyak k dinamakan sukses sedangkan sisanya N – k dinamakan gagal, sampel berukuran n diambil dari N benda, Cara pengambilan sampel tanpa pengembalian.

Misalkan ada sebuah populasi berukuran N diantaranya terdapat D buah termasuk kategori tertentu. Dari populasi ini sebuah sampel acak diambil berukuran n. pertanyaan yang timbul ialah: berapa peluang dalam sampel itu terdapat x buah termasuk kategori tertentu itu?

Jawabannya ditentukan oleh distribusi hipergeometrik di bawah ini:

Distribusi Hipergeometrik

Distribusi peluang:

$$P(X = x; N, n, k) = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \min(n, k)$$

Mean dan Variansi

$$E(X) = n \frac{k}{N}; \quad \text{Var}(X) = n \frac{k}{N} \frac{N-k}{N} \frac{N-n}{N-1}$$

Contoh 11 (Distribusi Hipergeometrik)

Suatu kotak berisi 40 suku cadang dengan 3 rusak. Sampel berukuran 5 diambil sekaligus dari kotak. Pengambilan sampel ini adalah suatu eksperimen hipergeometrik dengan X adalah banyaknya suku cadangrusak, $N = 40$, $n = 5$ dan $k = 3$ dengan distribusi peluang:

$$P(X = x; 40, 5, 3) = \frac{\binom{3}{x} \binom{37}{5-x}}{\binom{40}{5}}, \quad x = 0, 1, 2, 3$$

Peluang ditemukan satu suku cadang rusak dalam pengambilan sampel tersebut

$$P(X = 1; 40, 5, 3) = \frac{\binom{3}{1} \binom{37}{4}}{\binom{40}{5}} = 0,3011$$

Peluang ditemukan paling tidak satu suku cadang rusak dalam pengambilan sampel tersebut

$$\begin{aligned} P(X \geq 1; 40, 5, 3) &= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= 0,301 + 0,0354 + 0,0010 \\ &= 0,3376 \end{aligned}$$

Pendekatan Binomial untuk Hipergeometrik

$X \sim \text{Hipergeometrik}(N, n, k)$

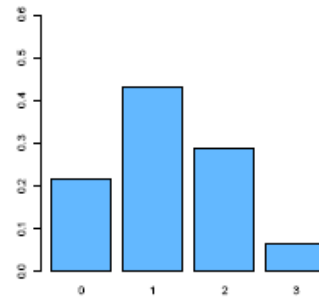
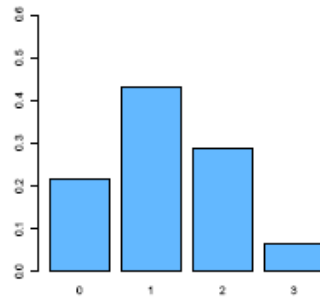
Bila n cukup kecil ($n/N < 5\%$)

Hipergeometrik(N, n, k) \rightarrow Binomial(N, p), dengan $p = \frac{k}{N}$

Pendekatan Binomial untuk Hipergeometrik

Hipergeometrik($N = 10000, n = 3, k = 40000$)

Binomial($n = 3, p = 40000/10000$)



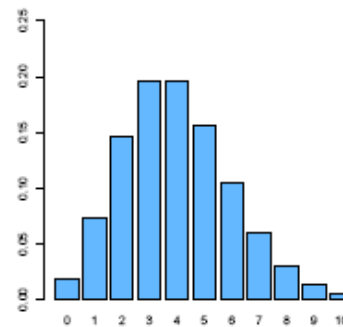
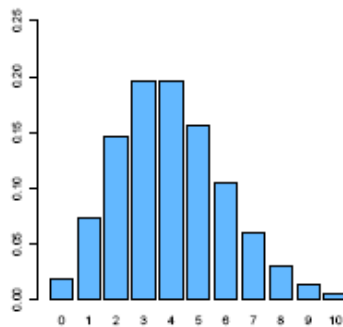
Pendekatan Poisson untuk Binomial :

- $X \sim \text{Binomial}(n, p)$
- Bila n besar dan p kecil,
 - $\text{Binomial}(n, p) \rightarrow \text{Poisson}(\lambda)$, dengan $\lambda = np$

Pendekatan Poisson untuk Binomial

Binomial($N = 2000, p = 0,002$)

Poisson($\lambda = np = 4$)



Soal

1. Seorang pemain *bridge* sedang memegang 12 kartu *bridge* yaitu 5 kartu *spade*, 4 kartu *heart* dan 3 kartu *diamond*. Jika 6 kartu diambil dari tangan pemain *bridge* tersebut secara acak, berapakah peluang terambilnya 3 kartu *spade*, 2 kartu *heart* dan 1 kartu *diamond*?
2. Sebuah kotak berisi 3 barang yang dihasilkan oleh mesin A, 4 oleh mesin B, dan 5 oleh mesin C. Kecuali dikategorikan berdasarkan mesin, identitas lainnya mengenai barang tersebut sama. Sebuah barang diambil secara acak dari kotak itu, identitas mesinnya dilihat, lalu disimpan kembali ke dalam kotak. Tentukan peluang di antara 6 barang yang diambil dengan jalan demikian didapat 1 dari mesin A, 2 dari mesin B, dan 3 dari mesin C.

Referensi:

1. Ronald E. Walpole, Raymond H. Myers, Sharon L. Myers and Keying Ye, *Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, Pearson Prentice Hall, 8th edition, 2007
2. Subhash Sharma, *Applied Multivariate Techniques*, John Wiley and son
3. R Johnson and D Wichern, *Applied multivariate statistics*, Prentice Hall.
4. J. Supranto, M.A. ,2001, *Statistika Teori dan Aplikasi*, Erlangga, Jakarta.
5. Douglas C. Montgomery, George C. Runger, 2003, *Applied Statistic and Probability for Engineer*, third edition, John Wiley and Son Inc.