KORELASI DAN REGRESI LINIER BERGANDA

MODUL PERKULIAHAN 10 (ONLINE 8)

Disusun oleh:

TIM DOSEN

Pelaksana Akademik Mata Kuliah Umum (PAMU)

Universitas Esa Unggul

Jakarta Barat

2018

KORELASI DAN REGRESI BERGANDA

Tujuan mempelajari modul ini adalah:

1. Mahasiswa mampu memahami tentang pengertian analisis regresi dan korelasi,
2. Mahasiswa mampu memahami tentang model regresi linier berganda,
3. Mahasiswa mampu memahami tentang evaluasi persamaan regresi linier berganda,
4. Mahasiswa mampu memahami tentang penggunaan persamaan regresi linier berganda dan korelasi berganda.

1. REGRESI SEDERHANA

Menurut Abdurahman (2011), secara umum ada dua macam hubungan antara dua variabel atau lebih, yaitu bentuk hubungan dan keeratan hubungan. Analisis regresi digunakan untuk mengetahui bentuk hubungan antara dua variabel atau lebih, terutama untuk menelusuri pola hubungan yang modelnya belum diketahui dengan sempurna, atau untuk mengetahui bagaimana variasi dari beberapa variabel independen mempengaruhi variabel dependen dalam suatu fenomena yang kompleks. Jika $X_1, X_2, \dots, X_i$ adalah variabel-variabel independen dan Y adalah variabel dependen, maka terdapat hubungan fungsional antara X dan Y, dimana variasi dari X akan diiringi pula oleh variasi dari Y. Secara matematika hubungan di atas dapat dijabarkan sebagai berikut: $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_i, e)$, dimana Y adalah variabel dependen, X adalah variabel independen dan e adalah variabel residu (disturbance term).

Akumulasi berbagai faktor dapat menyebabkan suatu persoalan dalam kehidupan di sekitar kita tiap harinya. Sebuah kejaadian dipicu oleh berbagai peristiwa sebelumnya, sehingga untuk menduganya diperlukan sebuah persamaan matematik yang bisa merangkum berbagai faktor tersebut. Apabila sebuah kejadian Y akan terikat oleh berbagai faktor X yang bebas, karena itu bila regresi linear dipakai untuk menduga Y variabel tak bebas atas X variabel bebas yang cuma satu maka ada persamaan matematik yang dibuat untuk memecahkan persamaan tersebut, yaitu persamaan regresi linear berganda (Hiariey, 2009).

Analisis regresi berganda merupakan perluasan dari analisis regresi linier sederhana. Dalam regresi linier sederhana, dibuat analisis hubungan dua variabel (satu variabel independent dengan satu variabel dependent) yang dinyatakan dengan persamaan linier $\bar{Y}_t = a + bX$, dengan tujuan membuat prediksi tentang besarnya nilai Y (variabel dependent) berdasarkan nilai X (variabel independen) tertentu.

Prediksi perubahan variabel dependent (Y) akan menjadi lebih baik apabila dimasukkan lebih dari satu variabel independent dalam persamaan liniernya ($X_1, X_2, \cdots, X_n$). Hubungan antara lebih dari satu variabel independen dengan satu variabel dependen inilah yang dibicarakan dalam analisis regresi linier berganda. Hubungan antara banyak variabel inilah yang sesungguhnya terjadi dalam dunia nyata, karena sebenarnya kebanyakan hubungan antar variabel dalam ilmu soisal merupakan hubungan statistikal, artinya bahwa perubahan nilai Y tidak mutlak hanya dipengaruhi oleh satu nilai X tertentu tetapi dipengaruhi oleh banyak nilai X.

Model regresi linier berganda melibatkan lebih dari satu variabel bebas. Modelnya :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_i X_i$$

dimana
$Y =$ variabel terikat
$X_i =$ variabel bebas ($i = 1, 2, 3, \dots, k$)
$\beta_0 =$ intersep

$\beta_i =$ koefisien regresi ($i = 1,2,3,\dots,k$)
Model penduganya adalah

$$Y = b_0X_1 + b_1X_1 + \cdots + b_kX_k$$

Misalkan model regresi dengan kasus 2 peubah bebas X_1 dan X_2 maka modelnya :

$$Y = \beta_0 + \beta_1X_1 + \beta_2X_2$$

Sehingga setiap pengamatan

$$\{(X_{1i}, X_{2i}; Y); i = 1,2,\cdots,n\}$$

Akan memenuhi persamaan

$$Y = \beta_0 + \beta_1X_1 + \beta_2X_2 + \varepsilon_i$$

TAKSIRAN KOEFISIEN REGRESI PARSIAL
Dari hasil Metode Kuadrat Terkecil didapatkan persamaan normal :

$$nb_o + b_1\sum X_{1i} + b_2\sum X_{2i} + \cdots + b_k\sum X_{ki} = \sum Y_i$$

$$b_o\sum X_{1i} + b_1\sum X_{1i}^2 + b_2\sum X_{1i}X_{2i} + \cdots + b_k\sum X_{1i}X_{ki} = \sum X_{1i}Y_i$$

$$\vdots$$

$$b_o\sum X_{ki} + b_1\sum X_{ki}X_{1i} + b_2\sum X_{ki}X_{2i} + \cdots + b_k\sum X_{ki}^2 = \sum X_{ki}Y_i$$

Tahapan perhitungan dengan matriks :
1. Membentuk matriks A, b dan g.

$$A = \begin{bmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} & \cdots & \sum X_{ki} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} & \cdots & \sum X_{1i}X_{ki} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \sum X_{ki} & \sum X_{ki}X_{1i} & \sum X_{ki}X_{2i} & \cdots & \sum X_{ki}^2 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}$$

$$g = \begin{bmatrix} g_0 = \sum Y_i \\ g_1 = \sum X_{1i}Y_i \\ \vdots \\ g_k = \sum X_{ki}Y_i \end{bmatrix}$$

2. Membentuk persamaan normal dalam bentuk matriks

$$Ab = g$$

3. Perhitungan matriks koefisien b

$$b = A^{-1}g$$

Perhitungan ini diperoleh dengan cara berikut.

$$\begin{aligned} Ab &= g \\ A^{-1}Ab &= A^{-1}g \\ Ib &= A^{-1}g \\ b &= A^{-1}g \end{aligned}$$

Dengan Metode Kuadrat Terkecil, misalkan model terdiri dari 2 variabel bebas

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - b_0 - b_1X_{1i} - b_2X_{2i})^2$$

Tahapan pendugaannya :

1. Dilakukan turunan pertama terhadap b_0 , b_1 dan b_2

$$\frac{\partial\left(\sum e_i^2\right)}{\partial b_0} = -2(Y_i - b_0 - b_1X_{1i} - b_2X_{21})$$

$$\frac{\partial\left(\sum e_i^2\right)}{\partial b_1} = -2(Y_i - b_0 - b_1X_{1i} - b_2X_{21})X_{1i}$$

$$\frac{\partial\left(\sum e_i^2\right)}{\partial b_2} = -2(Y_i - b_0 - b_1X_{1i} - b_2X_{21})X_{2i}$$

2. Ketiga persamaan hasil penurunan disamakan dengan nol

$$nb_0 + b_1\sum X_{i1} + b_2\sum X_{i2} = \sum Y_i$$

$$b_0\sum X_{1i} + b_1\sum X_{i1}^2 + b_2\sum X_{i2} = \sum X_{1i}Y_i$$

$$b_0\sum X_{2i} + b_1\sum X_{i1}X_{2i} + b_2\sum X_{i2}^2 = \sum X_{2i}Y_i$$

3. Nilai b_1 dan b_2 dapat diperoleh dengan memakai aturan-aturan dalam matriks

$$b_1 = \frac{(\sum_{i=1}^{n} X_2^2)(\sum_{i=1}^{n} X_1Y) - (\sum_{i=1}^{n} X_1X_2)(\sum_{i=1}^{n} X_2Y)}{\left(\sum_{i=1}^{n} X_1^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_2^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} X_1X_2\right)^2}$$

$$b_2 = \frac{(\sum_{i=1}^{n} X_1^2)(\sum_{i=1}^{n} X_2Y) - (\sum_{i=1}^{n} X_1X_2)(\sum_{i=1}^{n} 1Y)}{\left(\sum_{i=1}^{n} X_1^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_2^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} X_1X_2\right)^2}$$

$$b_0 = \bar{Y} - b_1\bar{X}_1 - b_2\bar{X}_2$$

CONTOH 1.

Ada 10 rumah tangga yang merupakan sampel acak dari suatu penelitian. Antara lain ditanyakan tentang banyaknya konsumsi atas komoditi tertentu, harga komoditi dan pendapatan.

Permintaan terhadap komoditi tersebut untuk keperluan konsumsi (Y) akan dipengaruhi oleh harga (X_1) dan pendapatan (X_2). Berikut hasil penelitiannya

X_1	X_2	Y
2	3	5
3	4	8
5	6	8
4	5	9
6	7	9
2	6	13
3	4	6
4	5	9
5	4	4
6	3	3

Buatlah persamaan regresinya.

Penyelesaian:

Dengan menggunakan metode kuadrat terkecil dengan matriks. Berarti menentukan matriks A, vektor g dan vektor b.

Terlebih dahulu, kita akan menghitung nilai dari $X_1^2, X_2^2, X_1X_2, X_1Y, X_2Y,$ dan Y^2. Untuk lebih memudahkan dalam perhitungan, maka disajikan dalam Tabel 1.

	X_1	X_2	Y	X_1^2	X_2^2	X_1X_2	X_1Y	X_2Y	Y^2
	2	3	5	4	9	6	10	15	25
	3	4	8	9	16	12	24	32	64
	5	6	8	25	36	30	40	48	64
	4	5	9	16	25	20	36	45	81
	6	7	9	36	49	42	54	63	81
	2	6	13	4	36	12	26	78	169
	3	4	6	9	16	12	18	24	36
	4	5	9	16	25	20	36	45	81
	5	4	4	25	16	20	20	16	16
	6	3	3	36	9	18	18	9	9
Jumlah	40	47	74	180	237	192	282	375	626
rata-rata	4	4,7	7,4						

Tabel 1. Perhitungan data

Dari pembahasan diatas, diketahui rumus untuk matriks A adalah sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} & \cdots & \sum X_{ki} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} & \cdots & \sum X_{1i}X_{ki} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \sum X_{ki} & \sum X_{ki}X_{1i} & \sum X_{ki}X_{2i} & \cdots & \sum X_{ki}^2 \end{bmatrix}$$

Untuk matriks A dengan dua variabel independen, diperoleh:

$$A = \begin{bmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{2i}X_{1i} & \sum X_{2i}^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 40 & 47 \\ 40 & 180 & 192 \\ 47 & 192 & 237 \end{bmatrix}$$

dan vektor b dengan dua variabel independen

$$b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Serta

$$g = \begin{bmatrix} g_0 = \sum Y_i \\ g_1 = \sum X_{1i} Y_i \\ g_2 = \sum X_{2i} Y_i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 74 \\ 282 \\ 375 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh persamaan $Ab = g$ sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 10 & 40 & 47 \\ 40 & 180 & 192 \\ 47 & 192 & 237 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74 \\ 282 \\ 375 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, dicari nilai invers dari matriks A dengan menggunakan rumus invers matriks, yaitu $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$

Perhitungan determinan A menggunakan rumus ekspansi laplace (baca kembali aljabar linier dan matriks). Misalkan dipilih baris 1, diperoleh:

$$A^{-1} = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$$

$$= 10\,(-1)^2 \begin{vmatrix} 180 & 192 \\ 192 & 237 \end{vmatrix} + 40\,(-1)^3 \begin{vmatrix} 40 & 192 \\ 47 & 237 \end{vmatrix} + 47(-1)^4 \begin{vmatrix} 40 & 180 \\ 47 & 192 \end{vmatrix}$$

$$= 10(42660 - 36864) - 40(9480 - 9024) + 47(7680 - 8460)$$

$$= 57960 - 18240 - 36660$$

$$= 3060$$

Selanjutnya, akan dihitung matriks kofaktor dari A.

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 180 & 192 \\ 192 & 237 \end{vmatrix} = 5796$$

$$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 40 & 192 \\ 47 & 237 \end{vmatrix} = -456$$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 40 & 180 \\ 47 & 192 \end{vmatrix} = -780$$

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 40 & 47 \\ 192 & 237 \end{vmatrix} = -456$$

$$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 10 & 47 \\ 47 & 237 \end{vmatrix} = 161$$

$$C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 10 & 40 \\ 47 & 192 \end{vmatrix} = -40$$

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 40 & 47 \\ 180 & 192 \end{vmatrix} = -780$$

$$C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 10 & 47 \\ 40 & 192 \end{vmatrix} = -40$$

$$C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 10 & 40 \\ 40 & 180 \end{vmatrix} = 200$$

Jadi,

$$C = \begin{bmatrix} 5796 & -456 & -780 \\ -456 & 161 & -40 \\ -780 & -40 & 200 \end{bmatrix}$$

Matriks adjoin dari A adalah transpose dari matriks kofaktor A. Sehingga

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} 5796 & -456 & -780 \\ -456 & 161 & -40 \\ -780 & -40 & 200 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5796 & -456 & -780 \\ -456 & 161 & -40 \\ -780 & -40 & 200 \end{bmatrix}$$

Jadi,

$$A^{-1} = \frac{1}{3060} \begin{bmatrix} 5796 & -456 & -780 \\ -456 & 161 & -40 \\ -780 & -40 & 200 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, hasil perhitungan matriks A dimasukkan ke persamaan $b = A^{-1}g$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3060} \begin{bmatrix} 5796 & -456 & -780 \\ -456 & 161 & -40 \\ -780 & -40 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 74 \\ 282 \\ 375 \end{bmatrix}$$

$$b_0 = \frac{1}{3060}\big((5796)74 + (-456)282 + (-780)375\big) = 2{,}5529$$

$$b_1 = \frac{1}{3060}\big((-456)74 + (161)282 + (-40)375\big) = -1{,}0921$$

$$b_2 = \frac{1}{3060}\big((-780)74 + (-40)282 + (200)375\big) = 1{,}9608$$

Jadi, persamaan regresi linier berganda:

$$\bar{Y}_t = b_0 + b_{1X_1} + b_2X_2$$

$$\bar{Y}_t = 2{,}5529 - 1{,}0921X_1 + 1{,}9608X_2$$

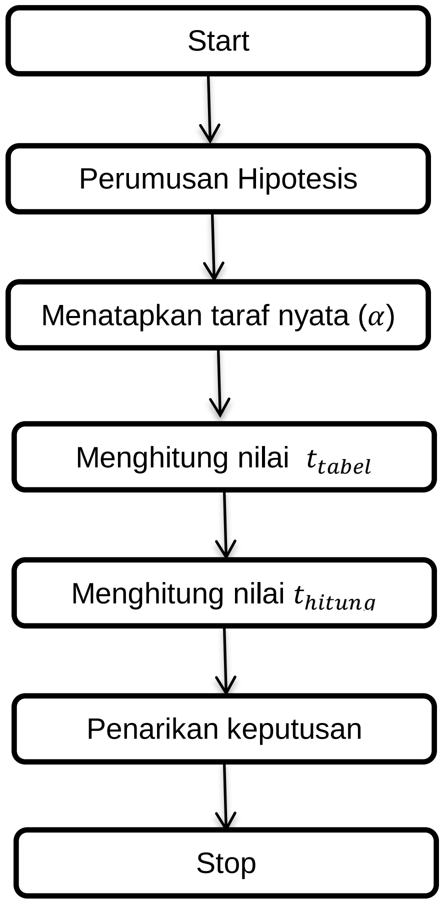
Nilai $b_0 = 2{,}5529$, artinya jika harga dan pendapatan sama dengan nol maka banyaknya konsumsi atas komoditi tertentu sebesar 2,5529.

$b_1 = -1{,}0921$, artinya jika pendapatan bernilai konstan dan kenaikan harga sebesar 1 satuan akan menyebabkan penurunan konsumsi atas komoditi sebesar 1,0921.

$b_2 = 1{,}9608$, artinya jika harga bernilai konstan dan kenaikan pendapatan sebesar 1 satuan akan menyebabkan naiknya konsumsi atas komoditi sebesar 1,9608.

PENGUJIAN HIPOTESIS KOEFISIEN REGRESI PARSIAL

Pengujian hipotesis dilakukan jika terdapat seseorang yang mempunyai pendapat atau argumen dan ingin dibuktikan kebenarannya. Misalnya seseorang beranggapan bahwa lamanya belajar mahasiswa dan IQ akan mempengaruhi terhadap IP yang diperoleh pada setiap semesternya. Hal ini dapat dibuktikan kebenarannya dengan melakukan pengujian hipotesis. Untuk lebih jelasnya mengenai prosedur pengujian hipotesis tentang regresi linier berganda, dapat diilustrasikan menggunakan skema berikut.



Langkah-langkah pengujian hipotesis:

1. Rumusan hipotesis yang digunakan untuk pengujian koefisien regresi parsial adalah

   $H_0: B_j = B_{j0}$ (tidak ada pengaruh X_j terhadap Y)
   $H_a: B_j > B_{j0}$ (Ada pengaruh positif dari X_j terhadap Y)
   $H_a: B_j < B_{j0}$ (Ada pengaruh negatif dari X_j terhadap Y)
   $H_a: B_j \neq B_{j0}$ (Ada pengaruh X_j terhadap Y)

2. Menentukan nilai kesalahan = α, setelah α diketahui kemudian mencari t_α (jika satu arah) atau $t_{\frac{\alpha}{2}}$ (jika dua arah) dari Tabel t (Lampiran 1) dengan $df = (n-k) - 1$.
   $df =$ derajat kebebasan

n = banyaknya sampel
k = banyaknya variabel bebas

3. Menghitung nilai dari t hitung dengan rumus:
$$t_h = \frac{b_j - B_{j0}}{S_{bj}}$$
dengan
$$S_{bj} = S_e\sqrt{a_{jj}}$$
dan
$$S_e = \sqrt{\frac{1}{n-k-1}\sum e_i^2}$$
a_{jj} = elemen dari baris j kolom j matriks A^{-1}.
$\sum e_i^2 = \sum (Y - \bar{Y}_t)^2$

4. Keputusan
Kriteria keputusan dalam pengujian hipotesis regresi linier berganda adalah sebagai berikut. Jika nilai dari t_{hitung} lebih besar daripada nilai dari t_{tabel} maka H_0 ditolak (H_a diterima). Jika nilai dari t_{hitung} lebih kecil daripada nilai dari t_{tabel} maka H_0 diterima (H_a ditolak). Ringkasnya dapat dituliskan sebagai berikut.
Jika $t_h > t_{tabel}$ maka H_0 ditolak
Jika $t_h < t_{tabel}$ maka H_0 diterima.

CONTOH 2.
Dari Contoh 1, ujilah pendapat yang mengatakan bahwa:
a. Tak ada pengaruh harga terhadap konsumsi, dengan alternatif ada pengaruh yang negatif. Pergunakan $\alpha = 5\%$.
b. Tak ada pengaruh pendapatan terhadap konsumsi, dengan alternatif ada pengaruh yang positif. Pergunakan $\alpha = 5\%$.

Penyelesaian:

Kasus a.

1) Perumusan hipotesis
Dari contoh 2, dapat diketahui bahwa pendapat dari seseorang itu adalah tak ada pengaruh harga terhadap konsumsi ($H_0 : B_1 = 0$) dengan alternatif ada pengaruh yang negatif ($H_0 : B_1 < 0$).
Berdasarkan informasi tersebut, kita dapat merumuskan hipotesisnya sebagai berikut.
$$H_0 : B_1 = 0$$
$$H_a : B_1 < 0$$

2) Dari contoh 2 diketahui taraf nyata yang ditentukan adalah α = 5% = 0,05. Selanjutnya akan ditentukan nilai dari t_{tabel} dengan menggunakan tabel t pada Lampiran 1 dengan derajat kebebasannya adalah $n - k - 1 = 10 - 2 - 1 = 7$. Sehingga diperoleh:
$$-t_{0,05;7} = -1{,}895.$$

3) Untuk menghitung nilai t_h, terlebih dahulu dihitung nilai dari S_{b_j}.
Untuk lebih memudahkan perhitungan, sebaiknya dibuat tabel sebagai berikut.

X_1	X_2	Y	$\bar{Y}_t$	$Y-\bar{Y}_t$	$(Y-\bar{Y}_t)^2$
2	3	5	6,2511	-1,2511	1,565251
3	4	8	7,1198	0,8802	0,774752
5	6	8	8,8572	-0,8572	0,734792
4	5	9	7,9885	1,0115	1,023132
6	7	9	9,7259	-0,7259	0,526931
2	6	13	12,1335	0,8665	0,750822
3	4	6	7,1198	-1,1198	1,253952
4	5	9	7,9885	1,0115	1,023132
5	4	4	4,9356	-0,9356	0,875347
6	3	3	1,8827	1,1173	1,248359
					9,776471

Tabel 2. Perhitungan data

Dari Tabel 2, diketahui bahwa nilai dari $\sum e_i^2 = \sum (Y-\bar{Y}_t)^2 = 9{,}776471$. Sehingga

$$S_e = \sqrt{\frac{1}{n-k-1}\sum e_i^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{1}{7}\right)9{,}776471}$$
$$= 1{,}1817947$$

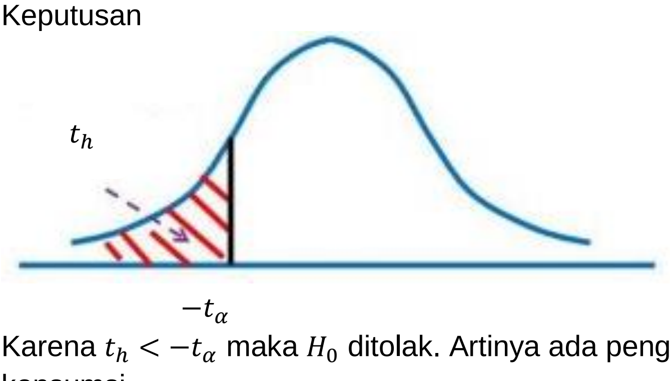
dan

$$S_{bj} = S_e\sqrt{a_{jj}}$$
$$S_{b_1} = 1{,}1817947\sqrt{\frac{161}{3060}} = 0{,}271$$

Jadi, nilai dari t_h dapat dihitung sebagai berikut.

$$t_h = \frac{b_j - B_{j0}}{S_{bj}}$$
$$= \frac{b_1 - Bj_0}{S_{b_1}}$$
$$= \frac{-1{,}0921 - 0}{0{,}271}$$
$$= -4{,}029$$

4) Keputusan



Karena $t_h < -t_\alpha$ maka H_0 ditolak. Artinya ada pengaruh negatif harga terhadap konsumsi.

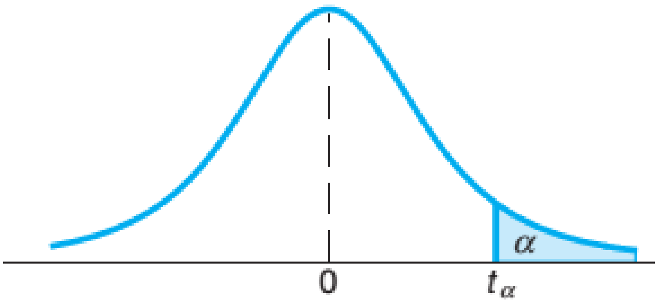
Kasus b.

1. Perumusan hipotesis
   Dari contoh 2, dapat diketahui bahwa pendapat dari seseorang itu adalah tak ada pengaruh pendapatan terhadap konsumsi $(H_0: B_2 = 0)$ dengan alternatif ada pengaruh yang positif $(H_a: B_2 > 0)$.
   Berdasarkan informasi tersebut, kita dapat merumuskan hipotesisnya sebagai berikut.
$$H_0 : B_2 = 0$$
$$H_a : B_2 > 0$$

2. Dari contoh 2 diketahui taraf nyata yang ditentukan adalah α = 5% = 0,05. Selanjutnya akan ditentukan nilai dari t_{tabel} dengan menggunakan tabel t pada Lampiran 1 dengan derajat kebebasannya adalah $n - k - 1 = 10 - 2 - 1 = 7$. Sehingga diperoleh:
$$t_{0,05;7} = 1{,}895.$$

3. Untuk menghitung nilai t_h, terlebih dahulu dihitung nilai dari S_{b_2}.
$$S_{b_2} = S_e\sqrt{a_{jj}}$$
$$S_{b_1} = 1{,}1817947\sqrt{\frac{200}{3060}} = 0{,}3021$$
   Jadi, nilai dari t_h dapat dihitung sebagai berikut.
$$t_h = \frac{b_j - B_{j0}}{S_{bj}}$$
$$= \frac{b_2 - Bj_0}{S_{b_2}}$$
$$= \frac{1{,}9608 - 0}{0{,}3021}$$
$$= 6{,}4906$$

4. Keputusan



   Karena $t_h > t_\alpha$ maka H_0 ditolak. Artinya ada pengaruh positif pedapatan terhadap konsumsi.

2. KORELASI SEDERHANA

Apabila kita mempunyai tiga variabel Y, X_1, X_2, maka kita dapat menentukan hubungan atau korelasi sederhana antara X_1 dan Y, X_2 dan Y, serta X_1 dan X_2.
korelasi X_1 dan Y digambarkan dengan rumus berikut :
$$r_{x_1y} = r_{1y} = \frac{\sum x_{1i}y_i}{\sqrt{\sum x_{1i}^2}\sqrt{\sum y_i{}^2}}$$

Korelasi X_2 dan Y digambarkan dengan rumus berikut :

$$r_{X_2Y} = r_{2y} = \frac{\sum x_{2i}y_i}{\sqrt{\sum x_{2i}^2}\sqrt{\sum y_i^2}}$$

Korelasi X_1 dan X_2 digambarkan dengan rumus berikut :

$$r_{X_1X_2} = r_{12} = \frac{\sum x_{1i}x_{2i}}{\sqrt{\sum x_{1i}^2}\sqrt{\sum x_{2i}^2}}$$

KOEFISIEN KORELASI LINEAR BERGANDA (KKLB)

Untuk mengetahui kuatnya hubungan antara variabel Y dengan beberapa variabel X lainnya (misalnya antara Y dengan X_1 dan X_2)

$$KKLB = R_{Y.12} = \frac{r_{1y}^2 + r_{2y}^2 - 2r_{1y}r_{2y}r_{12}}{1 - r_{12}^2}$$

Koefisien Penentuan (KP):

suatu nilai untuk mengukur besarnya sumbangan dari beberapa variabel X terhadap variasi (naik-turunnya) Y. Jika $\bar{Y}_t = b_0 + b_{1X_1} + b_2X_2$, KP mengukur besarnya sumbangan X_1 dan X_2 terhadap variasi, atau naik turunnya Y.

$$KP = R_{y.12}^2$$

Apabila dikalikan dengan 100% akan diperoleh persentase sumbangan X_1 dan X_2 terhadap naik-turunnya Y.

Koefisien Korelasi Parsial :

Variabel Y berkorelasi dengan X_1 dan X_2, maka koefisien korelasi antara Y dan X_1 (X_2 konstan), antara Y dan X_2 (X_1 konstan), dan antara X_1 dan X_2 (Y konstan) disebut Koefisien Korelasi Parsial (KKP)
Koefisien korelasi parsial X_1 dan Y, kalau X_2 konstan

$$r_{1y.2} = \frac{r_{1y} - r_{2y}r_{12}}{\sqrt{1 - r_{2y}^2}\sqrt{1 - r_{12}^2}}$$

Koefisien korelasi parsial X_2 dan Y, kalau X_1 konstan

$$r_{2y.1} = \frac{r_{2y} - r_{1y}r_{12}}{\sqrt{1 - r_{1y}^2}\sqrt{1 - r_{12}^2}}$$

Koefisien korelasi parsial X_2 dan X_1, kalau Y konstan

$$r_{12.y} = \frac{r_{12} - r_{1y}r_{2y}}{\sqrt{1 - r_{1y}^2}\sqrt{1 - r_{2y}^2}}$$

CONTOH 3.

Misalkan
X_1 = indeks pendapatan nasional suatu negara
X_2 = indeks harga impor suatu komoditi
Y = indek impor suatu komoditi
Selama 9 tahun, diperoleh data deret berkala sebagai berikut.

X_1	X_2	Y
100	100	100
104	99	106
106	110	107
111	126	120
111	113	110
115	103	116
120	102	123
124	103	133
126	98	137

Hitunglah:

a. Persamaan garis linier regresi berganda
b. Hitunglah r_{1y}, r_{2y}, r_{12}
c. Apakah arti dari $r_{y1.2}, r_{y2.1}^2$ dan $R_{y1.2}^2$

Penyelesaian:

a. Sebagaimana penyelesaian untuk contoh 1, terlebih dahulu kita akan membuat tabel perhitungan data untuk mempermudah perhitungan.

	X_1	X_2	Y	X_1^2	X_2^2	Y^2	X_1Y	X_2Y	X_1X_2
	100	100	100	10000	10000	10000	10000	10000	10000
	104	99	106	10816	9801	11236	11024	10494	10296
	106	110	107	11236	12100	11449	11342	11770	11660
	111	126	120	12321	15876	14400	13320	15120	13986
	111	113	110	12321	12769	12100	12210	12430	12543
	115	103	116	13225	10609	13456	13340	11948	11845
	120	102	123	14400	10404	15129	14760	12546	12240
	124	103	133	15376	10609	17689	16492	13699	12772
	126	98	137	15876	9604	18769	17262	13426	12348
SUM	1017	954	1052	115571	101772	124228	119750	111433	107690
Rata-rata	113	106	116,89						

Selanjutnya dihitung nilai dari matriks A,b dan g. Sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$Ab = g$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 1017 & 954 \\ 1017 & 115571 & 107690 \\ 954 & 107690 & 101772 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1052 \\ 119750 \\ 111433 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 1017 & 954 \\ 1017 & 115571 & 107690 \\ 954 & 107690 & 101772 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1052 \\ 119750 \\ 111433 \end{bmatrix}$$

Setelah dilakukan perhitungan invers matriks A dan dilakukan perkalian dengan g diperoleh nilai dari b sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -49{,}3413 \\ 1{,}3642 \\ 0{,}1139 \end{bmatrix}$$

Jadi, persamaan regresi linier bergandanya adalah

$$\bar{Y}_t = -49{,}3413 + 1{,}3642X_1 + 0{,}1139X_2$$

b. Sebelum menghitung nilai dari r_{1y}, r_{2y}, r_{12} terlebih dahulu menghitung nilai-nilai berikut.

$$\sum y_i^2 = \sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{n}$$
$$= 124228 - \frac{1052^2}{9}$$
$$= 1260{,}89$$

$$\sum x_{1i}^2 = \sum X_{1i}^2 - \frac{\left(\sum X_{1i}^2\right)^2}{n}$$
$$= 115{,}571 - \frac{1017^2}{9}$$
$$= 650$$

$$\sum x_{2i}^2 = \sum X_{2i}^2 - \frac{\left(\sum X_{2i}^2\right)^2}{n}$$
$$= 101772 - \frac{954^2}{9}$$
$$= 648$$

$$\sum x_{1i}x_{2i} = \sum X_{1i}X_{2i} - \frac{\sum X_{1i} \sum X_{2i}}{n}$$
$$= 101690 - \frac{(1017)(954)}{9}$$
$$= -112$$

$$\sum x_{1i}y_i = \sum X_{1i}Y_i - \frac{\sum X_{1i} \sum Y_i}{n}$$
$$= 119750 - \frac{(1017)(1052)}{9}$$
$$= 874$$

$$\sum x_{2i}y_i = \sum X_{2i}Y_i - \frac{\sum X_{2i} \sum Y_i}{n}$$
$$= 111433 - \frac{(954)(1052)}{9}$$
$$= -79$$

Perhitungan r_{1y}

$$r_{1y} = \frac{\sum x_{1i}y_i}{\sqrt{\sum x_{1i}^2}\sqrt{\sum {y_i}^2}}$$
$$= \frac{874}{\sqrt{650}\sqrt{1260{,}89}}$$
$$= 0{,}9654$$

Perhitungan r_{2y}

$$r_{2y} = \frac{\sum x_{2i}y_i}{\sqrt{\sum x_{2i}^2}\sqrt{\sum y_i^2}}$$
$$= -\frac{79}{\sqrt{648}\sqrt{1260,89}}$$
$$= -0,0874$$

Perhitungan r_{12}

$$r_{12} = \frac{\sum x_{1i}x_{2i}}{\sqrt{\sum x_{1i}^2}\sqrt{\sum x_{2i}^2}}$$
$$= -\frac{112}{\sqrt{650}\sqrt{648}}$$
$$= -0,1726$$

Latihan soal.

1. Diketahui
   X_1 = rata-rata pendapatan penduduk per tahun (ribuan rupiah)
   X_2 = rata-rata biaya pemasangan iklan per tahun (jutaan rupiah)
   Y = rata-rata hasil penjualan perusahaan A per tahun (jutaan rupiah)

X_1	X_2	Y
51	7	62
44	6	52
52	8	68
57	8	72
62	12	78
48	7	58
53	9	58
61	11	74

   a) Jika $Y = B_0 + B_1X_1 + B_2X_2 + \epsilon$, dimana b_0, b_1 dan b_2 adalah penduga B_0, B_1 dan B_2, maka dengan menggunakan metode kuadrat terkecil, carilah:
   $$\bar{Y}_t = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2$$
   b) Hitung r_{y1}, r_{y2}, r_{12} dan $r_{y1.2}, r_{y2.1}$
   c) Hitung $r_{y1.2}^2$ dan $r_{y2.1}^2$, apa artinya?

2. Diketahui data sebagai berikut.

X_1	X_2	Y
20	40	190
45	65	340
30	70	350
57	80	400
40	50	300
62	80	450
50	70	370
22	35	180
60	40	280
34	60	300

a. Dengan menggunakan metode kuadrat terkecil, carilah persamaan regresi linier berganda
b. Dengan menggunakan analisis varians, ujilah pendapat bahwa X_1 dan X_2 tidak mempengaruhi Y, dengan alternatif ada pengaruhnya. Gunakan $\alpha = 0{,}05$ dan $\alpha = 0{,}01$.
c. Hitung S_e dan R^2

3. Diketahui data sebagai berikut

X_1	X_2	Y
1	2	1
3	4	2
5	6	4
6	7	6
7	9	7
8	10	9

a) Dengan persamaan regresi berganda $\bar{Y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2$, berapa ramalan Y apabila $X_1 = 10$ dan $X_2 = 12$?
b) Ujilah hipotesis bahwa $B_0 = 0$ dengan alternatif tak sama dengan nol, gunakan $\alpha = 5\%$.
c) Ujilah bahwa $B_2 = 0{,}5$ dengan alternatif tak sama, gunakan $\alpha = 5\%$.

Daftar pustaka

Abdurahman, Muhidin, Somantri. 2011. *Dasar-Dasar Metode Statistika untuk Penelitian*. Bandung: Pustaka Setia.

Douglas C. Montgomery, George C. Runger, 2003, Applied Statistic and Probability for Engineer, third edition, John Wiley and Son Inc.

Hiariey dan Karuwal. 2009. Bagaimana Memanfaatkan Excel Untuk Menghitung Regresi dan Korelasi Linier. *Jurnal Ilmiah Agribisnis dan Perikanan*. Vol. 2(2): 30 – 33.

J. Supranto, M.A. ,2001, Statistika Teori dan Aplikasi, Erlangga, Jakarta.

Ronald E. Walpole, Raymond H. Myers, Sharon L. Myers and Keying Ye, *Probabilitiy and Statistics for Engineers and Scientists,* Pearson Prentice Hall, 8th edition, 2007

Lampiran 1. Tabel t

t Table

cum. prob	$t_{.50}$	$t_{.75}$	$t_{.80}$	$t_{.85}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$	$t_{.999}$	$t_{.9995}$
one-tail	0.50	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
two-tails	1.00	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
df											
1	0.000	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	0.000	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	0.000	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0.000	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.000	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.000	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.000	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.000	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.000	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.000	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.000	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.000	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.000	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.000	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.000	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.000	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.000	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.000	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.000	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.000	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.000	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.000	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.000	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.000	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.000	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.000	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.000	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.000	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.000	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.000	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	0.000	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	0.000	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
80	0.000	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
100	0.000	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390
1000	0.000	0.675	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581	3.098	3.300
z	0.000	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291
	0%	50%	60%	70%	80%	90%	95%	98%	99%	99.8%	99.9%

Confidence Level