



MODUL VIII MATEMATIKA

Judul	TERAPAN TURUNAN FUNGSI MATEMATIKA	
Penyusun	Distribusi	Perkuliahan
Nixon Erzed	PAMU UNIVERSITAS ESA UNGGUL	Pertemuan – IX online

Tujuan :

Mahasiswa memahami pengertian turunan fungsi, dan dapat menyelesaikan soal-soal turunan fungsi

Materi:

- A. Turunan Fungsi
- B. Rumus-Rumus Turunan
- C. Turunan Fungsi Trigonometri
- D. Dalil Rantai Untuk Menentukan Turunan
- E. Garis Singgung Pada Kurva
- F. Fungsi Naik Dan Fungsi Turun
- G. Nilai Stasioner
- H. Menggambar Grafik Fungsi

FUNGSI-FUNGSI KHUSUS DAN TURUNANNYA

1. Fungsi Logaritma

a. Definisi :

$a^b = c$ jika dan hanya jika ${}^a\log c = b$

Jika

$a = e =$ bilangan euler,

maka

${}^e\log x = \ln x$ ($\ln =$ Logaritma natural / napier)

b. Sifat – Sifat Logaritma :

a) ${}^a\log (bc) = {}^a\log b + {}^a\log c$

b) ${}^a\log b^c = c {}^a\log b$

c) ${}^a\log b = \frac{\log b}{\log a}$

d) $a^{a \log x} = x$

c. Turunan Fungsi Logaritmik

Jika $y = {}^a \log X$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a}$

contoh : $y = {}^5 \log x$

Carilah y' dan hitung y' jika $x = 2$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x \ln 5}$$

untuk : $x = 2$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2 \ln 5} = \frac{1}{2 \times 1,06} = 0,3106$$

d. Turunan Komposisi Fungsi Logaritmik

Jika $y = {}^a \log u$, dimana $u = g(x)$,
maka :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{{}^a \log e}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

Contoh : $y = \log \left(\frac{x-3}{x+2} \right)$

Jawab :

$$\begin{aligned} u &= \frac{(x-3)}{(x+2)} \\ \Rightarrow \frac{du}{dx} &= \frac{(x+2) - (x-3)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{{}^a \log e}{u} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{\log e}{\left(\frac{x-3}{x+2} \right)} \cdot \frac{5}{(x+2)^2} = \frac{5 \cdot \log e}{(x-3)(x+2)} = \frac{5 \cdot \log e}{(x^2 - x - 6)} \end{aligned}$$

e. Turunan Komposisi Fungsi Logaritmik Berpangkat

Jika $y = ({}^a \log u)^n$, dimana $u = g(x)$ dan n adalah konstanta,

maka : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{{}^a \log e}{u} \cdot \frac{du}{dx}$

Contoh : $y = (\log 5x^2)^3$

Misalkan : $u = 5x^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = 10x$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 3(\log 5x^2)^2 \left(\frac{\log e}{5x^2} \right) (10x) \\ &= \frac{30x(\log 5x^2)^2 \log e}{5x^2} = \frac{6}{x} (\log 5x^2)^2 \log e \end{aligned}$$

f. Turunan Fungsi Logaritmik Natural

Jika $y = \ln x$,

maka
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

Contoh :

$$y = \ln 5,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}$$

g. Turunan Komposisi Fungsi Logaritmik Natural

Jika $y = \ln u$,

maka
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \bullet \frac{du}{dx}$$

Contoh :

$$y = \ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right)$$

Misalkan :

$$u = \frac{(x-3)}{(x+2)} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{5}{(x+2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \bullet \frac{du}{dx} = \frac{(x+2)}{(x-3)} \bullet \frac{5}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x^2 - x - 6)}$$

h. Turunan Komposisi Fungsi Logaritmik Natural Berpangkat

Jika $y = (\ln u)^n$ dimana $u = g(x)$ dan n : konstanta

maka
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

Contoh :

$$y = (\ln 5x^2)^3$$

Misalkan $u = 5x^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = 10x$

$$\frac{dy}{dx} = 3(\ln 5x^2)^2 \left(\frac{1}{5x^2} \right) (10x) = \frac{6}{x} (\ln 5x^2)^2$$

2. Turunan Fungsi Eksponensial

Definisi

Jika a adalah sebuah konstanta
maka $y = a^x$ adalah fungsi eksponensial

Contoh fungsi eksponensial

$$y = 5^x$$

$$y = 5^{(2x+1)}$$

$$y = (x^2+2)^x$$

$$y = (x^2+2)^{(x+2)}$$

Turunan Fungsi Eksponensial

Jika $y = a^x$, dimana a : konstanta,

maka : $y' = \frac{dy}{dx} = a^x \cdot \ln a$

Contoh :

$$y = 5^x,$$

$$y' = 5^x \cdot \ln 5$$

Catatan :

Dalam hal $y = e^x$, maka $\frac{dy}{dx} = e^x$ juga,

sebab $\ln e = 1$

Turunan Komposisi Fungsi Eksponensial

Jika $y = a^u$ dimana a adalah konstanta dan $u = g(x)$,

$$\text{Maka } y' = \frac{dy}{dx} = a^u \cdot (\ln a) \cdot u'$$

Contoh :

$$y = 9^{3x^2-4}$$

$$\text{misalkan } u = 3x^2 - 4 \rightarrow \frac{du}{dx} = 6x$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = a^u \ln a \frac{du}{dx} \\ &= 9^{3x^2-4} (\ln 9)(6x) = (6x)9^{3x^2-4} \ln 9 \end{aligned}$$

Kasus khusus dalam hal : $y = e^u$, maka $\frac{dy}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$

Contoh cari $f'(x)$ jika diberikan :

a. $f(x) = 5^{\sqrt{x+2}}$ b. $f(x) = 2$

3. Turunan Fungsi Implisit

Berbentuk $f(x,y)=0$

$$y=2x+1 \text{ (eksplisit),}$$

$$y-2x-1=0 \text{ (implicit)}$$

Definisi

Jika

$f(x, y)=0$ merupakan fungsi implisit sejati (tidak mungkin dieksplisitkan),

maka

dy/dx dapat diperoleh dengan mendiferensiasikan suku demi suku, dengan menganggap y sebagai fungsi dari x

Contoh 1:

$$4xy^2 - x^2 + 2y = 0, \text{ tentukan } \frac{dy}{dx}$$

jawab :

$$8xy \frac{dy}{dx} + 4y^2 - 2x + 2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(8xy + 2) \frac{dy}{dx} = 2x - 4y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 4y^2}{8xy + 2} = \frac{x - 2y^2}{4xy + 1}$$

Contoh 2:

$$x^3 + y^3 = 18xy, \text{ tentukan } \frac{dy}{dx}$$

Jawab

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 18y + 18x \frac{dy}{dx}$$

$$(3y^2 - 18x) \frac{dy}{dx} = 18y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{18y - 3x^2}{3y^2 - 18x} = \frac{6y - x^2}{y^2 - 6x}$$

4. Turunan kedua dan turunan tingkat tinggi:

Jika $y=f(x)$ fungsi yang diferensiabel dengan fungsi turunan $f'(x)$, maka turunan dari $f'(x)$ ditulis $f''(x)$ disebut turunan kedua dari f . secara sama turunan ke $-n$ dari $f(x)$ ditulis $f^{(n)}(x)$ didefenisikan sebagai :

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

Contoh :

Tentukan Turunan pertama dan kedua dari fungsi berikut !

1. $y = -x^2 + 3$

$$y' = -2x \quad ; \quad y'' = -2$$

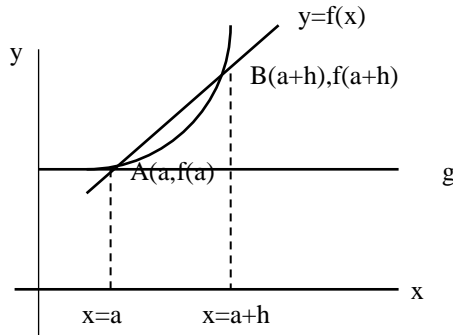
2. $s = 5t^3 - 3t^5$

$$s' = 15t^2 - 15t^4 \quad ; \quad s'' = 30t - 60t^3$$

PENERAPAN TURUNAN FUNGSI

A. GARIS SINGGUNG PADA KURVA

1. Gradien garis singgung



Perhatikan gambar di samping
 Gradien garis AB adalah

$$\begin{aligned}
 m_{AB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
 &= \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} \\
 &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h}
 \end{aligned}$$

Apabila garis AB diputar pada titik A maka titik B akan bergerak mendekati titik A ($h \rightarrow 0$) maka tali busur AB menjadi garis singgung (g) pada kurva $y = f(x)$ di titik A ($a, f(a)$) dengan gradient

$$m_g = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$m_g = f'(a)$$

Sehingga persamaan garis singgung pada kurva $y = f(x)$ di titik A ($a, f(a)$) atau A (x_1, y_1) adalah

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

Contoh :

Diketahui kurva $y = x^2 - 3x + 4$ dan titik A (3,4)

- a. Tentukan gradient garis singgung di titik A.
- b. Tentukan persamaan garis singgung di titik A.

Jawab:

$$y = x^2 - 3x + 4$$

$$y' = 2x - 3$$

- a. Gradien di titik A (3,4)
 $m = y'_{x=3} = 2 \cdot 3 - 3 = 6 - 3 = 3$

- b. Persamaan garis singgung di titik A (3,4)

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

$$y - 4 = 3 (x - 3)$$

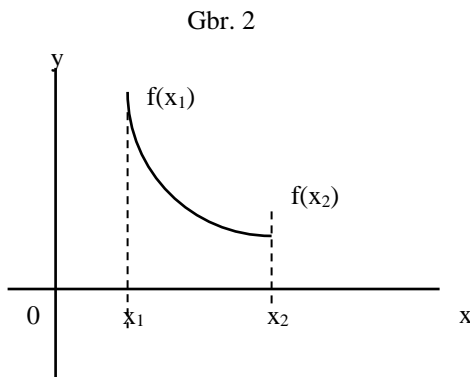
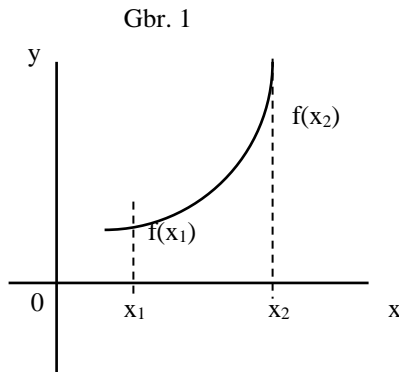
$$y - 4 = 3x - 9$$

$$y = 3x - 5$$

Latihan soal

1. Tentukan gradien garis singgung pada kurva:
 - a. $y = x^2 - 6x$ di titik (-1,7)
 - b. $y = \sin 2x$ di titik $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$
2. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva
 - a. $y = x^2 - 2x - 3$ di titik (3,1)
 - b. $y = x - 2x^2$ di titik dengan absis 1
 - c. $y = (2-x)(2x+1)$ di titik dengan ordinat 8
3. Suatu garis singgung pada kurva $y = 3 + 2x - x^2$ sejajar dengan garis $4x + y = 3$, tentukan :
 - a. Titik singgung
 - b. persamaan garis singgung

B. FUNGSI NAIK DAN FUNGSI TURUN



1. Fungsi $f(x)$ disebut fungsi naik pada interval $a \leq x \leq b$, jika untuk setiap x_1 dan x_2 dalam interval $a \leq x \leq b$ berlaku :

$$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1) \quad (\text{gbr. 1})$$

2. Fungsi $f(x)$ disebut fungsi turun pada interval $a \leq x \leq b$, jika untuk setiap x_1 dan x_2 dalam interval $a \leq x \leq b$ berlaku :

$$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1) \quad (\text{gb. 2})$$

3. Fungsi f disebut fungsi naik pada titik dengan absis a , jika $f'(a) > 0$
4. Fungsi f disebut fungsi turun pada titik dengan absis a , jika $f'(a) < 0$

Contoh

Tentukan pada interval mana fungsi $f(x) = x^3 + 9x^2 + 15x + 4$ merupakan :

- a. Fungsi naik b. Fungsi turun

Jawab:

$$f(x) = x^3 + 9x^2 + 15x + 4$$

$$f'(x) = 3x^2 + 18x + 15$$

- a. Syarat fungsi naik

$$f'(x) > 0$$

atau

$$3x^2 + 18x + 15 > 0$$

$$x^2 + 6x + 5 > 0$$

$$(x+1)(x+5) > 0$$

Harga batas

$$x = -1, \quad x = -5$$

$$\frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\quad}} \quad x \ x \ x \ x \quad \sqrt{\sqrt{\sqrt{\quad}}}}}{-5 \qquad \qquad \qquad -1}$$

Jadi fungsi naik pada interval

$$x < -5 \text{ atau } x > -1$$

- b. Syarat fungsi turun

$$f'(x) < 0$$

atau

$$3x^2 + 18x + 15 < 0$$

$$x^2 + 6x + 5 < 0$$

$$(x+1)(x+5) < 0$$

Harga batas

$$x = -1, \quad x = -5$$

$$\frac{\quad \quad \quad x \ x \ x \quad \sqrt{\sqrt{\sqrt{\quad}} \quad \quad \quad \sqrt{\sqrt{\sqrt{\quad}}}}}{-5 \qquad \qquad \qquad -1}$$

Jadi fungsi naik pada interval

$$-5 < x < -1$$

Latihan soal

1. Tentukan pada interval mana fungsi berikut merupakan fungsi naik atau fungsi turun.

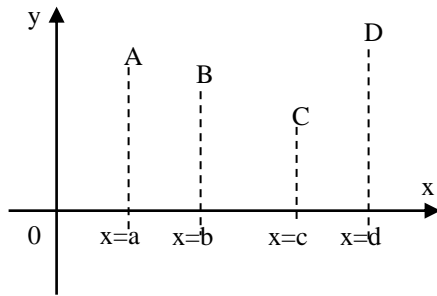
a. $f(x) = x^2 - 6x$

b. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 20x + 2$

c. $f(x) = (x^2 - 1)(x + 1)$

2. Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 6$ tidak pernah turun.

C. NILAI STASIONER



Perhatikan grafik fungsi $y = f(x)$ diatas pada titik A,B,C dan D dengan absis berturut-turut:

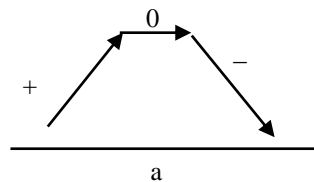
- $x = a,$
- $x = b,$
- $x = c$ dan
- $x = d$

jika untuk $x = a, b, c, d,$ tersebut menyebabkan $f'(x) = 0$ maka $f(a), f(b), f(c)$ dan $f(d)$ merupakan nilai – nilai stasioner.

Jenis – jenis nilai stasioner

1. Nilai stasioner di titik A.

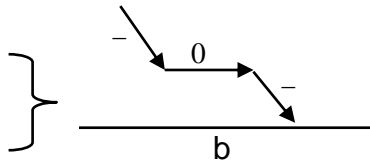
Pada : $x < a$ diperoleh $f'(x) > 0$
 $x = a$ diperoleh $f'(x) = 0$
 $x > a$ diperoleh $f'(x) < 0$



Fungsi yang mempunyai sifat demikian dikatakan fungsi $f(x)$ mempunyai nilai stasioner maksimum $f(a)$ pada $x = a$ dan titik $(a,f(a))$ disebut titik balik maksimum.

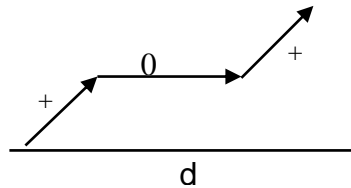
2. Nilai stasioner di titik B dan D.

- a. Pada : $x < b$ diperoleh $f'(x) < 0$
 $x = b$ diperoleh $f'(x) = 0$
 $x > b$ diperoleh $f'(x) < 0$



Fungsi ini mempunyai nilai stasioner belok turun $f(b)$ pada $x = b$ dan titik $(b, f(b))$ disebut titik belok.

- b. Pada : $x < d$ diperoleh $f'(x) > 0$
 $x = d$ diperoleh $f'(x) = 0$
 $x > d$ diperoleh $f'(x) > 0$

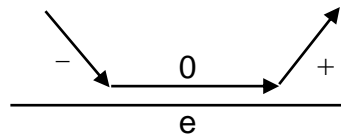


fungsi ini mempunyai nilai stasioner belok turun $f(d)$ pada $x = d$ dan titik $(d, f(d))$ disebut titik belok

Pada titik B atau D sering hanya disingkat nilai stasioner belok.

3. Nilai stasioner di titik E

- Pada : $x < e$ diperoleh $f'(x) < 0$
 $x = e$ diperoleh $f'(x) = 0$
 $x > e$ diperoleh $f'(x) > 0$



Fungsi ini mempunyai nilai stasioner minimum $f(e)$ pada $x = e$ dan titik $(e, f(e))$ disebut titik balik minimum.

Contoh :

Tentukan titik stasioner dan jenisnya dari fungsi $f(x) = x^2 + 2x$

Jawab :

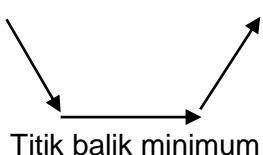
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2x \\ f'(x) &= 2x + 2 \\ &= 2(x + 1) \end{aligned}$$

Nilai stasioner didapat dari $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 2(x + 1) &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$$f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) = -1$$

Jadi diperoleh titik stasioner $(-1, -1)$

	$x = -1^-$	$x = -1$	$x = -1^+$
$f'(x) = 2(x + 1)$ $\rightarrow x + 1$	$-1^- + 1$ $\rightarrow -$ (negative)	$-1 + 1$ $\rightarrow 0$	$-1^+ + 1$ $\rightarrow +$ (positive)
Bentuk grafik	 <p>Titik balik minimum</p>		

Latihan

Tentukan nilai stasioner dan jenisnya pada fungsi berikut :

a. $f(x) = x^2 - 6x$

b. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

c. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$

d. $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$

e. $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-4}$

D. MENGGAMBAR GRAFIK FUNGSI

Untuk menggambar grafik fungsi $y = f(x)$ ada beberapa langkah sebagai berikut :

1. Tentukan titik-titik potong grafik dengan sumbu x (jika mudah ditentukan), yaitu diperoleh dari $y = 0$.
2. Tentukan titik potong dengan sumbu y, yaitu diperoleh dari $x = 0$.
3. tentukan titik-titik stasioner dan jenisnya.
4. tentukan nilai-nilai y untuk nilai x besar positif dan untuk x yang besar negative.

Contoh :

Diketahui persamaan $y = f(x) = 3x - x^3$, tentukan :

- a. Tentukan titik potong dengan sumbu x dan sumbu y.
- b. Nilai stasioner dan titik stasioner.
- c. Nilai y untuk x besar positif ($+\infty$) dan untuk x besar negative ($-\infty$).
- d. Titik Bantu

Jawab:

- a. i. Grafik memotong sumbu x, bila $y = 0$.

$$Y = 0 = 3x - x^3$$

$$\leftrightarrow 0 = x(3 - x^2)$$

$$\leftrightarrow 0 = x(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)$$

Titik potong sumbu x adalah $(0,0)$, $(\sqrt{3},0)$, $(-\sqrt{3},0)$

- ii. memotong sumbu y, jika $x = 0$

$$y = 3x - x^3$$

$$y = 3 \cdot 0 - 0^3$$

$$y = 0$$

titik potong sumbu y adalah $(0,0)$

- b. Syarat stasioner adalah : $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 3 - 3x^2$$

$$\leftrightarrow 3(1 - x^2)$$

$$\leftrightarrow 3(1 - x)(1 + x)$$

$$x = 1, x = -1$$

$$\text{untuk } x = 1, f(1) = 3(1) - (1)^3 = 2$$

$$x = -1, f(-1) = 3(-1) - (-1)^3 = -2$$

nilai stasionernya : $y = 2$ dan $y = -2$
titik stasioner : $(1,2)$ dan $(-1,-2)$

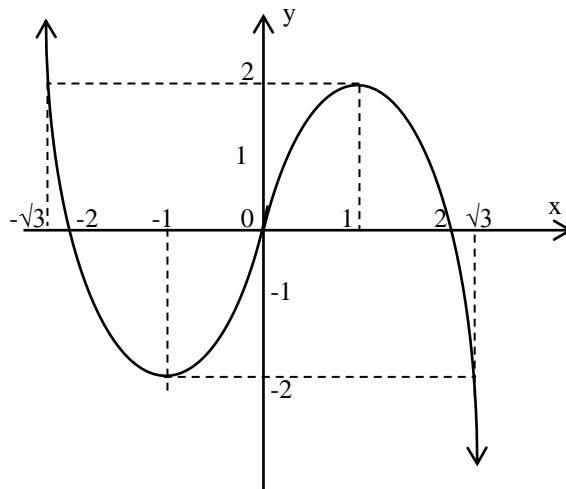
c. $y = 3x - x^3$, untuk nilai x besar maka bilangan suku $3x$ tidak signifikan jadi dapat diabaikan terhadap x , sehingga $\rightarrow y = -x^3$.

i. Jika $x = +\infty$ maka $y = -\infty$

ii. jika $x = -\infty$ maka $y = +\infty$

d. Titik Bantu

x	-2	2	-3	3	...
y	2	-2	18	-18	...



Soal latihan

Gambarlah grafik :

1. $y = x^2 + 9$
2. $y = x^4 - 2x^2$
3. $y = (x^2 - 1)^2$
4. $x^3 (8 - x)$