VEKTOR DAN MATRIKS (Lanjutan)

A. PERMUTASI BILANGAN ASLI

Setiap matriks bujur sangkar A selalu dikaitkan dengan suatu skalar yang disebut determinan matriks tersebut, dan dapat ditulis sebagai det (A) atau |A|. Sebelum dimulai dengan yang lebih umum, sebagai ontih matriks berukuran (2X2) sebagai berikut $\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$

Didefinisikan det (A) $\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$ = ad-bc

1. Kita bedakan tanda kurung untuk matriks dengan determinan. Tanda kurung untuk determinan **| |**, tanda kurung untuk matriks ( ) atau [ ]
2. Baris bilangan-bilangan ($j_1, j_2, \ldots, j_n$) dimana berlaku $j_i \neq j_k$. (I dan k = 1, 2,…, n) serta j, salah satu dari bilangan asli (1, 2, …, n) disebut suatu permutasi dari bilangan asli
3. Apabila kita mempunyai n buah bilangan asli 1, 2, …, n; maka banyaknya permutasi yang dapat kita bentuk ada n! = n(n-1)(n-2).. 2.1. Misalnya n = 3. Maka terdapat 3! = 3.2.1 = 6 buah permutasi, yaitu (1, 2, 3); (1, 3, 2); (2, 1, 3); (2, 3, 1); (3, 1, 2); (3, 2, 1)
4. Inversi pada suatu permutasi ($j_1, j_2, \ldots, j_n$) ialah adanya $j_k < j_i$ (j_k mendahului j_i) padahal $j_i < j_k$ (i dan k = 1, 2, 3,…, n)

Permutasi Genap dan Ganjil

Jika banyaknya suatu inversi suatu permutasi adalah bilangan ganjil, maka disebut permutasi ganjil dan selain itu disebut permutasi genap. Jika terdapat n bilangan asli 1, 2, …, n, maka banyaknya permutasi=n!. Di sini ½ n! adalah permutasi genap dan n! adalah permutasi ganjil. Misalkan ($j_1, j_2, \ldots, j_n$) suatu permutasi maka tanda (sign) dari permutasi tersebut, kita tulis 0 ($j_1, j_2, \ldots, j_n$) adalah 0 ($j_1, j_2, \ldots, j_n$) = + 1. Jika ($j_1, j_2, \ldots, j_n$) genap dan 0 ($j_1, j_2, \ldots, j_n$) = - 1, jika ($j_1, j_2, \ldots, j_n$) ganjil.

Sekarang pandag matriks bujur sangkar A berordo n

$$\begin{matrix} a11 & a12 & a1n \\ a21 & a22 & a2n \\ an1 & an2 & ann \end{matrix}$$

Kemudian pandang pula suatu hasil kali antara n elemen-elemen dari A yang masing-masing terletak pada garis yang berbeda pada kolom ang berbeda (suatu hasil kali yang mengandung hanya satu elemen dari setiap baris dan setiap kolom).

Sebagai contoh hasil kali yang dimaksud diatas, misalnya hasil kali n elemen-elemen diagonal utama matriks A: $a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn}$. Jelas dari setiap baris dan dari setiap kolom hanya diambil satu elemen. Untuk memudahkan diambil suatu hasil kali dari n elemen-elemen yang barisnya telah diurutkan), maka setiap hasil kali antara n elemen matriks A di atas selalu berbentuk:

1. $a_{1j1}, a_{1j2}, a_{1j3}, \ldots a_{njn}$, dimna subscript j, menunjukkan kolomnya. Karena masing-masing faktor haruslah elemen yang datang dari kolom yang berbeda, maka barisan ($j_1, j_2, \ldots j_n$) adalah suatu permutasi

2. Apabila hasl kali (1) kita dilengkapi dengan memberikan tanda (sign) dari permutasi (j_1, j_2, …j_n) tersebut, maka hasil kali 0 (j_1, j_2,…, j_n).($a_{1j1,}$ a_{1j2}, a_{1j3}, … a_{njn}) kita ebut hasil kali bertanda dari n elemen-elemen $a_{1j1,}$ a_{1j2}, a_{1j3}, … a_{njn}.

Permutasi Genap dan Ganjil

1. Sifat 1: det(A) = det(A^T)
2. Sifat 2: Tanda determinan berubah apabila dua baris/kolom ditukar tempatnya
3. Sifat 3: Harga determinan menjadi **λ** kali, jika suatu baris/kolomdikalikan dengan **λ**
4. Sifat 4: Harga determinan tidak berubah apabila baris/kolom ke-i ditambah dengan **λ** baris/kolom j

Minor dan Kofaktor

Pandang matriks berukuran n x n, yaitu A = a_{ij}, dan S_{ij} suatu sub matriks dari A dengan ukuran (n – 1) x (n – 1) dimana baris ke-I dan kolom ke-j (dari A) dihilangkan. Minor dari elemen a_{ij} suatu matriks A =(a_{ij}) adalah M_{ij} = |S_{ij}| dan kofaktor dari a_{ij} adalah c_{ij} $(-1)^{i+j}$. M_{ij} adalah suatu skalar.

Penguraian secara Baris dan Kolom

Determinan dari suatu matriks = jumlah perkalian elemen-elemen dari seberang bariskolom dengan kofaktor-kofaktornya. Dengan perkataan lain:
$|A| = \sum_{j=1}^{n} aij C_{ij} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$ dengan i sembarang, disebut uraian kolom ke-j. Jika elemen-elemen dari suatu baris/kolom dikalikan dengan kofaktor-kofaktor dari elemen-elemen baris/kolom lain, jumlahnya akan nol. Misalnya:

$a_{11}C_{21} + a_{12}C_{21} + \ldots + a_{1n}C_{2n} = 0$

$a_{11}C_{12} + a_{21}C_{22} + \ldots + a_{n1}C_{n2} = 0$

Jadi

$\sum_{j=1}^{n} aij C_{kj}$ = |A| jika i = k

= 0 jika i ≠ k

$\sum_{i=1}^{n} aij C_{ik}$ = |A| jika j = k

= 0 jika j ≠ k

Tanda dari kofaktor elemen-elemen a_{ij} dari matriks dapat disimpulkan sebagai

$$\begin{Vmatrix} + & - & +- & + & .. \\ - & + & -+ & - & .. \\ + & - & +- & + & .. \end{Vmatrix}$$

Jadi tanda positif dan negatif berselang-seling. Misalnya, pada matriks berordo 3.

$$\begin{Vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{Vmatrix}$$

Diperbolehkan bebas memilih baris/kolom mana yang diekspansikan, karena hasilnya akan sama

Menghitung Determinan dengan Pertolongan Sifat-Sifat Determinan

Dari ekspansi baris ataupun kolom, dapat dilihat bahwa apabila suatu elemen a_{ij} = 0, maka dapat langsung mengabaikan perkalian dengan kofaktornya, hasilnya = 0. Dalam hal ini, lebih menguntungkan apabila dipilih baris/kolom yang mengandung nol itu untuk diekspansikan.

$$\begin{matrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{matrix}$$

Jadi, $\begin{matrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{matrix} = -3 \begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{matrix} = -16$

Dengan begitu semakin banyak elemen nol dalam suatu baris/kolom. Semakin mudah mencari determinan tersebut. Untuk itu dengan pertolongan sifat-sifat determinan,kita usahakan menjadikan nol sebanyak mungkin elemen-elemen dari suatu baris/kolom.

Matriks Singular, Nonsingular, dan Rank

Suatu matriks bujur sangkar A, disebut singular apabila det (A) = 0, Jika det(A) ≠0, maka A disebut matriks yang nonsingular. Matriks yang nonsingular mempunyai invers, sedangkan matriks singular tidak mempunyai invers.

Dengan transformasi elementer baris/kolom, kita dapat menjadikan nol sebanyak mungkin baris/kolom matriks. Banyak maksimum baris/kolom yang tidak dapat dijadikan nol disebut rank matriks, ditulis r(A).

Matriks bujur sangkar A berordo n adalah singular jika r(a) < n, dimana determinan yang mempunyai baris/kolom nol, harga det = 0. Determinan dari matriks A dikalikan dengan determinan dari matriks B = determinan matriks AB.

$|A|$. $|B|$ = $|AB|$ (Jika ordo A dan B sama)

Dapat pula mencari rank suatu matriks dengan pertolongan determinan. Suatu matriks A ≠ 0 mempunyai rank = r jika paling sedikit satu minor berukuran (r x r) nya ≠ 0, sementara setiap minor berukuran (r+1) x (r+1) nya jika ada berharga = 0