VEKTOR DAN MATRIKS

Teori mengenai vektor, matriks, dan determinan merupakan bagian utama dari cabang matematika yang disebut aljabar linear. Pada level praktis teori, matriks, dan konsep-konsep ruang vektor yang berkaitan, menyediakan suatu bahasa dan suatu kerangka komputasional yang berguna untuk menyelesaikan permasalahan yang ada.

Aljabar linear mempunyai banyak aplikasi dalam bisnis dan ilmu ekonomi, juga dalam ilmu-ilmu biologi dan fisika. Aljabar linear secara formal didefinisikan sebagai suatu kelas dari struktur-struktur matematika yang mengikuti suatu pola yang *well defined*. Teori matriks dan kasus khususnya, yaitu *vector theory* adalah *stereotypes* dari mana struktur matematika abstrak dari aljabar linear dikembangkan.

Program linear adalah suatu teknik penyelesaian optimal atas suatu problema keputusan dengan cara menentukan terlebih dahulu fungsi tujuan (memaksimalkan dan meminimalkan) dan kendala-kendala yang ada ke dalam model matematika pertidaksamaan linear. Program linear sering digunakan dalam penyelesaian permasalahan-permasalahan alokasi sumber daya, seperti dalam bidang manufakturing, pemasaran, keuangan, personalia, dan administrasi.

A. VEKTOR

Secara sederhana suatu vektor v adalah suatu daftar n-*triple* bilangan: v = (v_1, $v_{2,\ldots,}$ v_n). Masing-masing bilangan v_i disebut komponen dari vektor. Bila seluruh komponen v adalah nol, maka v disebut vektor nol.

0 = (0, 0,…,0)

Dua vektor u dan v dikatakan sama, apabila mempunyai banyak komponen yang sama dan masing-masing komponen yang berkesesuaian letaknya sama. Jumlah 2 vektor u = (u_1, u_2,…,u_n) dan v = (v_1, v_2, v_3) adalah u + v = ($u_1 + v_1$, $u_2 + v_2$,…, $u_n + v_n$)

Perkalian skalar k dengan vektor v = (v_1, v_2,…,v_n) adalah:

kv = (kv_1, kv_2,…, kv_n) dan – v = ($-v_1$, $-v_{2,\ldots,}$ $-v_n$) sehingga u – v = u + (-v) = ($u_1 - v_1$, $u_2 - v_2$,…, $u_n - v_n$).

Dot product dari vektor u = (u_1, u_2,…u_n) dan v =(v_1, v_2,…v_n) adalah u.v ($u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n$) dan norm (panjang/besar) vektor v adalah ||v|| = $\sqrt{v\,.\,v}$ = $\sqrt{v1^2 \ + v1^2 + \cdots + v1^3}$ Dapat kita capai bahwa ||v|| = 0 jika dan hanya v = 0 (vektor nol)

B. MATRIKS

Suatu matriks A kita maksudkan merupakan suatu *array* persegi panjang dari bilangan-bilangan:

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{matrix}$$

Masing-masing n-*triple* horizontal (a_{11}, $a_{12,\ldots,}$ a_{1n}), (a_{21}, $a_{22,\ldots,}$ a_{2n}),…, (a_{m1}, $a_{m2,\ldots,}$ a_{mn}) disebut baris-baris matriks, sedangkan m-triple vertikal

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{matrix}$$ disebut, kolom-kolom matriks

Secara sederhana,matriks di atas ditulis A = (a_{ij}). Matriks diatas mempunyai m buah baris dan n buah kolom, dikatakan ukuran (ordo) matriks tersebut adalah (m x n). Apabila m = n, maka matriks itu disebut matriks bujur sangkar (persegi).

KESAMAAN DUA MATRIKS

Matriks A = (a_{ij}) dan B = (B_{ij}) yang ukurannya sama dikatakan sama jika $a_{ij} = b_{ij}$, untuk setiap I dan j dengan I, j ∈ N

Matriks yang hanya mengandung satu baris disebut juga matriks baris dan yang hanya mengandung satukolom disebut matriks kolom

C. OPERASI PADA MATRIKS

1. Penjumlahan matriks (berlaku untuk matriks-matriks berukuran sama: jika a = (a_y) dan B =(b_y), matriks-matriks berukuran sama, maka A + B adalah suatu matriks C = (cij) dimana cij = aij + bij untuk setiap i dan j ∈ N atau A + B = aij + bij
2. Perkalian skalar terhadap matriks: jika **λ** suatu saklar (bilangan) dan A = (a_{ij}), maka matriks $\boldsymbol{\lambda}A = \boldsymbol{\lambda}a_{ij}$), dengan mengalikan semua elemen matriks A dengan **λ**
3. Perkalian matriks: Pada umumnya, matriks tidak komulatif terhadap operasi perkalian AB≠BA. Pada perkalian matriks AB, matriks A kita sebut matrisk pertama dan B matriks kedua. Syarat perkalian matriks jumlah banyaknya kolom matriks pertama = jumlah banyaknya baris matriks kedua

D. TRANSPOSE PADA MATRIKS

Pandang suatu matriks A = (a_{ij}) berukuran (m x n). Transpose dari A adalah matriks A^T berukuran (n x m) yang didapatkan dari A dengan menuliskan baris ke-I dari A, I = 1, 2, …, m, sebagai kolom ke-I dari A^T. Dengan perkataan lain A^T = (a_{ji})

E. BEBERAPA JENIS MATRIKS KHUSUS

1. Matriks Bujur Sangkar: Suatu matriks dengan banyak baris = banyak kolom = n disebut matriks bujur sangkar berukuran n (berordo n). Barisan elemen a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} disebut diagonal utama dari matriks bujur sangkar A tersebut
2. Matriks nol: matriks yang semua elemennya 0 (ditulis matriks 0). Sifatnya:
   a. A + 0 = a (Jika ukuran A = ukuran 0)
   b. A0 = 0; OA = 0 (Jika syarat-syarat perkalian terpenuhi)
3. Matriks diagonal: matriks bujur sangkar yang semua elemen di luar diagonal utama adalah nol. Dengan perkataan lain: (a_{ij}) adalah matriks diagonal, bila a_{ij} = 0 untuk i ≠ j
4. Matriks identitas: matriks diagonal yang semua elemen-elemen diagonal utamanya = 1. Dengan perkataan lain (u_{ij}) adalah matriks identitas, bila u_{ij} = 1, untuk I = j, dan u_{ij} = 0 untuk i ≠ j. Matriks identitas biasa ditulis I atau $I_n$dimana n menunjukkan ukuran matriks bujur sangkar tersebut. Sifat matriks identitas adalah seperti bilangan 1 (satu) dalam operasi-operasi dengan bilangan biasa, yaitu AI = A IA = A
5. Matriks skalar: matriks diagonal dengan semua elemen diagonal utamanya sama, yaitu k. Matriks I adalah bentuk khusus dari matriks skalar, dengan elemen diagonal utamanya = 1
6. Matriks segitiga bawah: matriks bujur sangkar yang semua elemen diatas diagonal utama = 0. Dengan perkataan lain, (a_{ij}) adalah matriks segitiga bawah jika a_{ij} = 0,untuk I < j
7. Matriks segitiga atas: matriks bujur sangkar yang semua elemen dibawah diagonal utama = 0.Dengan perkalian lain, a_{ij} adalah matriks segitiga atas jika a_{ij} = 0, untuk I > j
8. Matriks simetris: matriks yang transposenya sama dengan dirinya sendiri. Dengan perkataan lain, matriks A simetris jika a = A^T = -A atau a_{ji} = $-a_{ij}$ untuk semua I dan j. Jelas bahwa matriks simetris adalah bujur sangkar
9. Matriks antisimentris: matriks yang transposenya adalah negatifnya. Dengan perkataan lain matriks A asimetris jika A^T = -A atau a_{ji} = - a_{ij}, untuk semua I dan j
10. Matriks hermitian: matriks yang transpose hermitiannya = dirinya sendiri. Dengan perkataan lain, matriks A hermitian jika A^H = A. Mudah dimengerti bahwa matriks yang simetris adalah matriks hermitian. Matriks A disebut antihermitian, jika A^H = -A
11. Matriks invers: Jika A dan B matriks-matriks bujur sangkar berordo n dan berlaku invers. Sebuah matriks inversnya adalah dirinya sendiri. Dengan perkataan lain AA = I, disebut matriks involuntory
12. Matriks komutatif: jika A dan B matriks-matriks bujur sangkar dan berlaku AB = BA, maka A dan B dikatakan berkomulatif satu sama lain. Jelas bahwa setiap matriks bujur sangkar berkomulatif dengan I (yang ukurannya sama) dan dengan inversnya (bila ada). Jika AB = -BA, maka A dan B dikatakan antikomulatif

13. Matriks idempoten, periodik, dan nilpotent: jika berlaku AA = A^2 = A, dikatakan matriks bujur sangkar A adalah matriks yang idempoten. Secara umum, jika P bilangan asli (bulat positif)terkecil sehingga berlaku A^p = A, maka dikatakan A matriks periodik dengan periode p – 1, jika A^T = 0, maka A dikatakan nilpoten dengan indeks r (dimana r adalah bilangan bulat positif terkecil yang memenuhi hubungan diatas)

F. TRANSFORMASI ELEMENTER PADA BARIS DAN KOLOM SUATU MATRIKS

Yang dimaksud dengan transformasi elemeter baris/kolom suatu matriks A adalah sebagai berikut:

1. Penukaran tempat baris ke-i dan baris ke-j (baris ke –I dijadikan baris ke-j dan baris ke-j dijadikan baris ke-i)
2. Penukaran tempat kolom ke-I dan kolom ke-j (kolom ke-I dijadikan kolom ke-j dijadikan kolom ke-i)
3. Memperkalikan baris ke-i dengan skalar **λ**≠0
4. Memperkalikan kolom ke- i dengan skalar **λ**≠0
5. Menambah baris ke-i dengan **λ** kali baris ke-j
6. Menambah kolom ke-I dengan **λ** kali baris ke-j

G. MATRIKS EKUIVALEN

Dua matriks A dan B disebut ekuivalen (A~B), apabila salah satunya dapat diperoleh dari yang lain dengan transformasi-transformasi elementer terhadap baris dan atau kolom. Jika transformasi-transformasielementernya hanya pada baris saja, maka dikatakan ekuivalen baris, dan jika pada kolom saja, maka dikatakan ekuivalen kolom

H. PERMUTASI BILANGAN ASLI

Setiap matriks bujur sangkar A selalu dikaitkan dengan suatu skalar yang disebut determinan matriks tersebut, dan kita tulis sebagai det (A) atau |A|. Sebelum dimulai dengan yang lebih umum, kita ambil dahulu matriks A berukuran 2 x 2 sebagai berikut

$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$ didefinisikan det(A) = ad-bc

I. SIFAT DETERMINAN

1. Sifat 1: det(A) = det(A^T)
2. Sifat 2: Tanda determinan berubah apabila dua baris/kolom ditukar tempatnya
3. Sifat 3: Harga determinan menjadi **λ** kali, jika suatu baris/kolomdikalikan dengan **λ**
4. Sifat 4: Harga determinan tidak berubah apabila baris/kolom ke-i ditambah dengan **λ** baris/kolom j

J. MINOR DAN KOFAKTOR

Pandang matriks berukuran n x n, yaitu A = a_{ij}, dan S_{ij} suatu sub matriks dari A dengan ukuran (n – 1) x (n – 1) dimana baris ke-I dan kolom ke-j (dari A) dihilangkan

K. PENGURAIAN SECARA BARIS DAN KOLOM

Determinan dari suatu matriks = jumlah perkalian elemen-elemen dari seberang bariskolom dengan kofaktor-kofaktornya