Universitas Esa Unggul

MODUL 6 ONLINE
ESA 153 STATISTIK 1

Materi 8

PROBABILITAS 1

Disusun Oleh
TIM DOSEN

UNIVERSITAS ESA UNGGUL
2018

PROBABILITAS 1

Kita sebagai manusia sering tidak bisa mengetahui dengan pasti tentang terjadinya suatu kejadian/peristiwa, apalagi kalau kejadian itu mengenai sesuatu dimasa yang akan datang. Pertanyaan berikut ini adalah contoh mengenai kejadian-kejadian yang tidak dapat dijawab dengan pasti.

- Kalau kita melempar mata uang logam Rp.50 ke atas; gambar apakah yang akan keluar, gambar burungkah (B) atau bukan ($\overline{B}$)? ($\overline{B}$ dibaca "B bar").
- Kalau kita mengambil 1 kartu dari 1 set Kartu Bridge, apakah kita akan memperoleh AS?
- Apakah dimasa mendatang hasil penjualan akan naik?
- Apakah aka nada kenaikan harga makanan tahun depan?
- Apakah produksi padi akan naik?
- Apakah harga saham, harga dolar, dan valuta asing lainnya akan naik?

Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan diatas, kita akan membahas apa yang disebut **Probabilitas.**

1. Pengertian Probabilitas

Kata probabilitas sering dipertukarkan dengan istilah lain seperti peluang dan kemungkinan. Beberapa contoh telah dikemukakan sebelumnya. Secara umum, probabilitas merupakan peluang banhwa sesuatu akan terjadi. Secara lengkap, probabilitas didefinisikan sebagai berikut:

> *"Probability" is a measure of a likelihood of the occurance of a random event.* (Mendenhall dan Reinmuth, 1982).

Terjemahan bebasnya:

> *"Probabilitas" ialah suatu nilai yang dipergunakan untuk mengukur tingkat terjadinya sesuatu kejadian yang acak.*

Dalam mempelajari probabilitas, ada 3 kata kunci yang harus diketahui:

- Eksperimen
- Hasil (outcome)
- Kejadian atau peristiwa (event)

Ketiga istilah tersebut sering kita dengar, tetapi dalam ilmu statistik ketiga istilah itu mempunyai arti yang spesifik.

Sebagai contoh, sebuah eksperimen dilakukan dengan menanyakan kepada 500 orang mahasiswa apakah mereka akan membeli komputer Acer jenis baru atau tidak. Dari eksperimen ini akan terdapat beberapa kemungkinan hasil. Misalnya, kemungkinan hasil pertama adalah sebanyak 250 orang akan membeli dan sisanya tidak akan membeli. Kemungkinan hasil lain adalah bahwa 310 orang akan membeli sedangkan sisanya tidak akan membeli. Contoh lain dari eksperimen adalah pelemparan sebuah koin. Hasil (outcome) dari pelemparan sebuah koin tersebut adalah “MUKA” atau “BELAKANG”. Kumpulan dari beberapa hasil tersebut dikenal sebagai kejadian (event).

Probabilitas biasanya dinyatakan dengan bilangan desimal (seperti 0.50, 0.25, atau 0.70) atau bilangan pecahan (seperti $\frac{5}{10}$, $\frac{25}{100}$, atau $\frac{70}{100}$). Nilai probabilias berkisar Antara 0 dan 1. Semakin dekat probabilitas ke nilai 0, semakin kecil kemungkinan suatu kejadian akan terjadi. Sebaliknya, semakin dekat nilai probabilitas ke nilai 1, kemakin besar peluang suatu kejadian akan terjadi.

2. Pendekatan Perhitungan Probabilitas

Ada dua pendekatan dalam menghitung probabilitas yaitu pendekatan yang bersifat objektif dan subjektif. Probabilitas objektif dibagi menjadi dua, yaitu pendekatan klasik dan pendekatan frekuensi relatif.

2.1. Pendekatan Klasik

Perhitungan probabilitas secara klasik didasarkan pada asumsi bahwa seluruh hasil dari suatu eksperimen mempunyai kemungkinan (peluang) yang sama. Pada pendekatan ini, kita harus mengetahui terlebih dahulu seluruh kejadian yang akan muncul, yang dalam praktiknya sulit untuk dilaksanakan. Untuk mempermudah pemahaman, diberikan gambaran sebagai berikut:

Perhatikan suatu kejadian A yang dapat terjadi sebanyak x cara dari seluruh *n* cara; misalnya ada *n* barang, x rusak, (*n* - x) tidak rusak. Kalau kita mengambil sesuatu barang secara acak (random), lalu ditanyakan berapa probabilitasnya bahwa barang yang diambil tersebut rusak? Maksudnya berapa *P(A)*?

Ada x barang rusak, ada x cara untuk memperolah barang yang rusak dari seluruh barang sebanyak *n*, *A* = barang yang rusak, merupakan suatu kejadian atau event.

(a). $P(A) = \frac{x}{n}$, $P(A) \geq 0$, sebab $x \geq 0$, $n > 0$

$$P(\bar{A}) = \frac{n-x}{n}$$

$$= \frac{n}{n} - \frac{x}{n}$$

$$= 1 - \frac{x}{n} \qquad (1)$$

(b). $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$,

$\bar{A}$ = bukan *A* (bukan barang rusak)

$\bar{A}$ = komplemen A (2)

Jika x = 0, maka *P(A)* = $\frac{0}{n}$ = 0, tidak ada barang rusak. Jika x = n, maka *P(A)* = $\frac{n}{n}$ = 1, semua barang rusak. Jadi, $0 \leq P(A) \leq 1$. *A* sering disebut sukses dan $\bar{A}$ sering disebut gagal. Artinya, probabilitas terjadinya *A,* yaitu *P(A)*, nilainya paling kecil 0 dan paling besar 1.

Contoh 1:

Kepala pabrik mengatakan bahwa dari 100 barang produksinya, ada 25 yang rusak. Kalau barang dibungkus rapi, kemudian seorang pembeli mengambil satu barang secara acak, berapakah probabilitasnya bahwa barang tersebut rusak?

Penyelesaian:

Dari soal, *n* = 100 dan x = 25. Dengan demikian,

$$P(A) = \frac{x}{n}$$

$$= \frac{25}{100} = 0.25 \text{ atau } 25\%$$

Jadi, besarnya probabilitas (kemungkinan) untuk memperoleh barang rusak adalah 25%.

Contoh 2:

Seorang direktur bank mengatakan bahwa dari 1000 nasabahnya terdapat 150 orang yang tidak puas dengan mutu pelayanan bank. Pada suatu hari kita bertemu dengan salah seorang nasabah. Berapa probabilitasnya bahwa nasabah tersebut tidak puas?

Penyelesaian:

Dari soal diketahui bahwa *n* = 1000 dan *x* = 150. Jika *A* adalah nasabah yang tidak puas, maka: *P(A)* = $\frac{150}{1000}$ = 0.15 atau 15%

Jadi, probabilitas bahwa kita bertemu denga nasabah yang tidak puas adalah 15%.

2.2. Pendekatan Frekuansi Relatif

Pendekatan yang mutakhir ialah perhitungan yang didasarkan atas limit dari frekuensi relatif. Perlu disebutkan di sini bahwa besarnya nilai yang diambil oleh suatu variable juga merupakan kejadian. Misalnya *X* = nilai ujian matematika I mahasiswa FE-UI, *P(X = 8)* adalah probabilitas bahwa seorang mahasiswa mendapat nilai 8.

X	f	fr = f/n
X_1	f_1	f_1/n
.	.	.
.	.	.
X_i	f_i	f_i/n
.	.	.
.	.	.
X_k	f_k	f_k/n
Jumlah	$\Sigma f_i = n$	$\Sigma f_i / n = 1$

Dimana:

fr = *frekuensi relatif*

Xi = *kejadian i*

$$P(Xi) = \text{limit}_{n\to\infty} \frac{fi}{n} \quad (3)$$

Artinya, probabilitas suatu kejadian merupakan limit dari frekuensi relatif kejadian tersebut yang secara teoritis berlaku untuk nilai *n* yang besar sekali (tidak terhingga), misalnya merupakan suatu eksperimen/penelitian dengan sample yang besar. Didalam praktiknya, frekuensi related itu sendiri bisa digunakan untuk memperkirakan nilai probabilitas. Hal ini dapat ditulis dengan tumus sebagai berikut:

$$\text{Probabilitas terjadinya suatu kejadian} = \frac{jumlah\ terjadinya\ kejadian\ tersebut\ dimasa\ lalu}{jumlah\ observasi} \quad (4)$$

Contoh 3:

Sebuah studi dilakukan terhadap 750 lulusan sekolah administrasi bisnis dari suatu universitas(dalam hal ini, studi tersebut dapat dikatakan sebagai esperimen). Studi ini menunjukan bahwa 300 dari 750 lulusan tidak bekerja sesuai dengan bidang studi utama yang diambil di universitas tersebut. Misal, seorang mahasiswa akuntasi bekerja sebagai manager pemasaran. Berapa probabilitasnya bahwa seorang lulusan admstrasi bisnis akan bekerja di bidang yang bukan studi utamanya?

Penyelesaian:

Berdasarkan rumus diatas, maka dapat dihitung probabilitas suatu kejadian:

$$P(A) = \frac{300}{750}$$

$$= 0.4$$

Contoh 4:

Pada suatu penelitian terhadap 65 karyawan yang bekerja di perusahaan swasta, salah satu karakteristik yang ditanyakan ialah besarnya gaji/upah bulanan, yang digambarkan sebagai berikut.

Tabel 1 (tingkat upah bulanan karyawan suatu perusahaan swasta)

X	55	65	75	85	95	105	115
f	8	10	16	14	10	5	2

X = upah bulanan dalam ribuan rupiah

Penyelesaian:

Dari soal diketahui bahwa:

P(X = 65) $= \frac{\mathrm{f2}}{\mathrm{n}}$

$= \frac{10}{65}$ = 0.15 = 15%

P(X = 105) $= \frac{\mathrm{f2}}{\mathrm{n}}$

$= \frac{5}{105}$ = 0.048 = 5%

Contoh 5:

Diketahui bahwa nilai ujian statistic mahasiswa (*X*) adalah sebagai berikut.

Tabel 2 (data nilai ujian statistic mahasiswa)

Nilai Ujian	Banyaknya Mahasiswa
(1)	(2)
< 25	10
25 – 50	30
50 – 75	45
>75	15
Jumlah	100

Kalau kita bertemu dengan salah seorang mahasiswa dari kelompok mahasiswa tersebut, berapakanh probbilitasnya bahwa dia mendapat nilai 25 < *X* < 50, 50 < *X* < 75, atau *X* ≥ 75?

Penyelesaian:

P(25 < X < 50) $= \frac{30}{100}$

= 0.3 atau 30%

P(50 < X < 75) $= \frac{45}{100}$

= 0.45 atau 45%

P(X ≥ 75) $= \frac{15}{100}$

= 0.15 atau 15%

Contoh 6:

Apakah yang dimaksud dengan $P(X_i) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{fi}{n}\right)$? Berilah contoh!

Penyelesaian:

Jika mata uang logam Rp50 dilemparkan sekali, hasilnya ada dua kemungkinan yaitu *B* atau $\overline{B}$. Artinya kalau tidak *B* pasti $\overline{B}$, dengan catatan bahwa mata uang seimbang (*fair win*) dan tidak mungkin jatuhnya miring.

Jadi ada dua kejadian, yaitu kejadian *B* (mendapatkan gambar burung) dan kejadian $\overline{B}$ (bukan gambar burung). Karena kejadian *B* dan $\overline{B}$ tidak dapat terjadi bersama-sama, maka dua kejadian tersebut dikatakan *saling meniadakan* (*mutually exclusive event*). Kejadian mati dan hidup, sehat dan sakit, siang dan malam, baik dan buruk, untung dan rugi, dan lain sebagainya.

Suatu eksperimen dilakukan dengan jalan melemparkan mata uang logam Rp.50 secara berulang-ulang. Mata uang tersebut mempunyai dua sisi gambar, yaitu sisi yang satu berupa gambar burung(B) dan sisi sebelahnya bukan burung($\overline{\text{B}}$).

Jika: X_1 = kejadian melihat B.

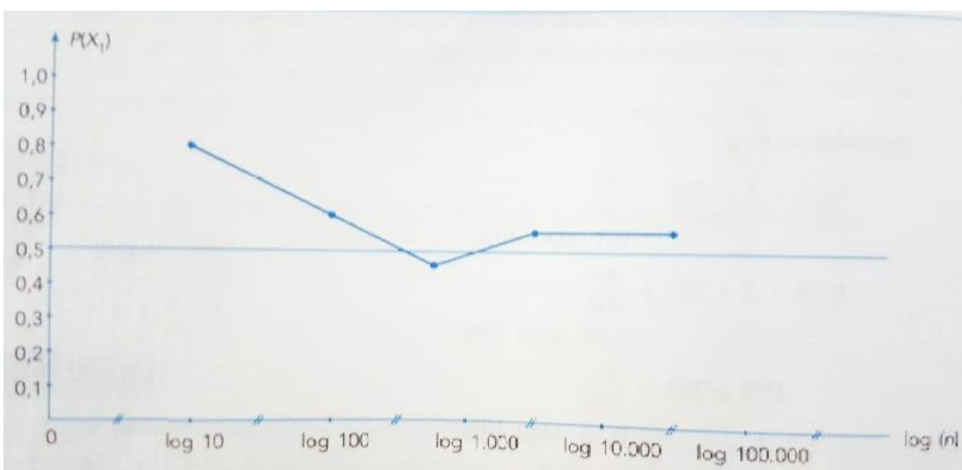
X_2 = kejadian melihat $\overline{\text{B}}$.

n = banyaknya lemparan mata uang.

Tabel 3 (kemungkinan munculnya X_1 atau X_2 dari percobaan pelemparan mata uang)

	f	fr	f	fr	f	fr	f	fr	f	fr
X_1	8	0.8	60	0.6	450	0.45	5.490	0.549	52.490	0.5249
X_2	2	0.2	40	0.4	550	0.55	4.510	0.451	47.510	0.4751
n	10	0.1	100	1.0	1000	1.00	10.000	1.000	100.000	1.0000

untuk n = 10,	$P(X_1) = 0.8$	log 10	= 1
untuk n = 100,	$P(X_1) = 0.6$	log 100	= 2
untuk n = 1000,	$P(X_1) = 0.45$	log 1000	= 3
untuk n = 10000,	$P(X_1) = 0.549$	log 10000	= 4
untuk n = 100000,	$P(X_1) = 0.5490$	log 100000	= 5



Gambar 1 : Kurva Probabilitas X_1

Dari gambar grafik di atas, dapat dilihat bahwa semakin besar n (banyaknya lemparan) hasil bagi Antara banyaknya gambar burung (B) yang terlihat dengan banyaknya lemparan (n) makin mendekati angka setengah (0.5). Maka dari itu, P(Xi) = 0.5 untuk n mendekati tak terhingga (n = ∞). Angka setengah itu merupakan limit.

Jadi, P(Xi) = $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{fi}{n}\right)$

Untuk mudahnya, dalam praktik sering disebutkan bahwa *P(B)* = 0.5, yang diperoleh dari 1 – $P(\overline{B})$ = 1 – 0.5, penting untuk diingat bahwa walaupun probabilitas untuk mendapatkan *B* sama dengan 0.5, belum tentu lemparan kedua mengasilkan $\overline{B}$. bahkan didalam 10 kali lemparan hasilnya bisa *BBBBBBBB* $\overline{B}\,\overline{B}$ (*B=8,* $\overline{B}$*=2*).

Menurut sejarahnya, seorang ahli statistik bernama J.E. Konig (asal denmark) dalam perang dunia kedua telah melakukan eksperimen ini dengan 10000 lemparan dan memperoleh hasil *B* sebanyak 5067. Jadi, probabilitas suatu kejadian pada dasarnya merupakan limit dari frekuensi relatif.

2.3. Pendekatan Subjektif

Probabilitas subjektif didasarkan atas penilaian seseorang dalam menyatakan tingkat kepercayaan. Jika tidak ada pengalaman/pengamatan masa lalu sebagai dasar untuk perhitunan probabilitas, maka pernyataan probabilitas tersebut bersifat subjektif. Hal ini biasanya terjadi dalam bentuk opini atau pendapat yang dinyatakan dalam suatu nilai probabilitas.

Contoh probabilitas subjektif seperti

1. Menurut Presiden Saddam Husen Irak pasti akan menang melawan Amerika,
2. Menurut Presiden Amerika rakyat Irak akan menyambut tentara Amerika dengan suka cita,
3. Menurut Menteri Keuangan Indonesia periode 2014-2019, Indonesia tidak akan pernah krisis karena pondasi ekonomi kuat, atau
4. Anda akan mendapatkan nilai minimal B untuk mata kuliah Statistik 1

Semua contoh di atas hanya didasarkan pada penilaian pribadi dan tidak banyak menggunakan informasi sebagai dasar pertimbangan. Oleh sebab itu, pendekatan demikian dinamakan probabilitas subjektif.

3. Kejadian/Peristiwa dan Notasi Himpunan

Apabila suatu eksperimen dilakukan dengan melemparkan mata uang logam Rp50 sebanyak dua kali, maka hasil eksperimen itu adalah salah satu dari empat kemungkinan hasil berikut:

BB, $B\overline{B}$, $\overline{B}B$, $\overline{B}\overline{B}$
1 2 3 4

- Lemparan pertama menunjukan gambar burung (B), kedua juga (B).
- Lemparan pertama (B), kedua bukan burung ($\overline{B}$).
- Lemparan pertama bukan burung ($\overline{B}$), kedua (B).
- Lemparan pertama dan kedua bukan burung ($\overline{B}$).

Hasil yang berbeda-beda dari suatu eksperimen disebut titik sampel. Dalam contoh ini ada 4 hasil yang berbeda, jadi ada 4 titik sampel, sedangka himpunan dari seluruh kemungkinan hasil disebut ruang sampel. Jika dua dadu kita lempar, Akan kita peroleh ruang sampel sebagai berikut:

Tabel 4 (ruang sampel untuk eksperimen pelemparan dadu)

II / I	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

I= dadu pertama

II = dadu kedua

23 = dadu pertama keluar mata dua, dadu kedua keluar mata tiga

51 = dadu pertama keluar mata lima, dadu kedua keluar mata satu

Ruang sampel suatu eksperimen mempunyai dua syarat berikut:

1) Dua hasil atau lebih tidak terjadi secara bersamaan. Misal, melempar mata uang satu kali hasilnya B atau $\overline{B}$, tidak bisa $B\overline{B}$. Jika melempar dua kali hasilnya BB atau $B\overline{B}$ atau $\overline{B}B$ atau $\overline{B}\overline{B}$.
2) Harus terbagi habis (*exhaustive*). Artinya, ruang sampel harus memuat seluruh kemungkinan hasil, tidak ada yang terlewat. Misal, jika melempar mata uang satu kali, maka ruang sampelnya (S) adalah (B, $\overline{B}$). Jika melempar dadu satu kali maka S adalah (1, 2, 3, 4, 5, 6), dsb

Jadi, ruang sampel merupakan himpunan hasil eksperimen. Suatu himpunan (*set*) merupakan kumpulan yang lengkap atas elemen-elemen sejenis tetapi dapat dibedakan satu sama lain. Misal, kumpulan seluruh mahasiswa Universitas Indonesia, kumpulan seluruh karyawan Pertamina, kumpulan seluruh perusahaan dalam satu industry di DKI Jaya, dan lain sebagainya. Elemen-elemen tersebut walaupun sejenis dapat diperbedakan (karakteristiknya berbeda-beda). Di dalam statistic, himpunan (*set*) disebut *populasi*, dan himpunan bagian (subset) disebut *sampel.*

Kita mengetahui bahwa hasil eksperimen dapat berbeda-beda, sehingga pada umumnya hasil eksperimen bersifat acak, dimana kita sering menggunakan istilah variable acak untuk maksud perhitungan probabilitas terjadinya hasil suatu eksperimen. Karena hasil eksperimen sukar ditentukan dengan pasti sebelumnya, atau merupakan proses acak, maka variabelnya dikatakan *variable acak*, yang biasanya diberi symbol X dan singkatnya disebut variable saja.

Variable mempunyai pengertian kuantitatif, maksudnya harus dinyatakan dengan angka-angka. Karena hasil eksperimen sering merupakan dara kualitatif, maka harus dilakukan penilaian kembali melalui angka-angka. Misal, kita melemparkan mata uang logam Rp50 ke atas sebanyak satu kali. Kalau keluar gambar burung (B), kejadian ini kira beri nilai 1 dan kalau yang keluar bukan burung ($\bar{B}$), kita beri nilai 0 (nol). Jadi, X = [1, 0]. Kalau mata uang logam Rp50 dilemparkan sebanyak 3 kali, maka akan diperoleh ruang sampel ($S = BBB, BB\bar{B}, B\bar{B}B, B\bar{B}\bar{B}, \bar{B}BB, \bar{B}B\bar{B}, \bar{B}\bar{B}B, \bar{B}\bar{B}\bar{B}$) dengan anggota ($n = 8$).

Bila X = jumlah gamabr burung (B) untuk 3 kali lemparan tersebut, maka untuk:

$BBB \longrightarrow X = 3$	$BB\bar{B} \longrightarrow X = 2$	$\bar{B}BB \longrightarrow X = 2$
$B\bar{B}\bar{B} \longrightarrow X = 1$	$B\bar{B}B \longrightarrow X = 2$	$\bar{B}B\bar{B} \longrightarrow X = 1$
$\bar{B}\bar{B}B \longrightarrow X = 1$	$\bar{B}\bar{B}\bar{B} \longrightarrow X=0$	

Jadi, X = [0, 1, 2, 3]. Hasil eksperimen dapat menghasilkan nilai X = 0, yaitu ($\bar{B}\bar{B}\bar{B}$), atau X = 3 yaitu (BBB), atau X = 2, yaitu ($BB\bar{B}, B\bar{B}B, \bar{B}BB$), dan lain sebagainya. Jika disajikan dalam bentuk table frekuensi, maka hasilnya dapat kita lihat pada table berikut:

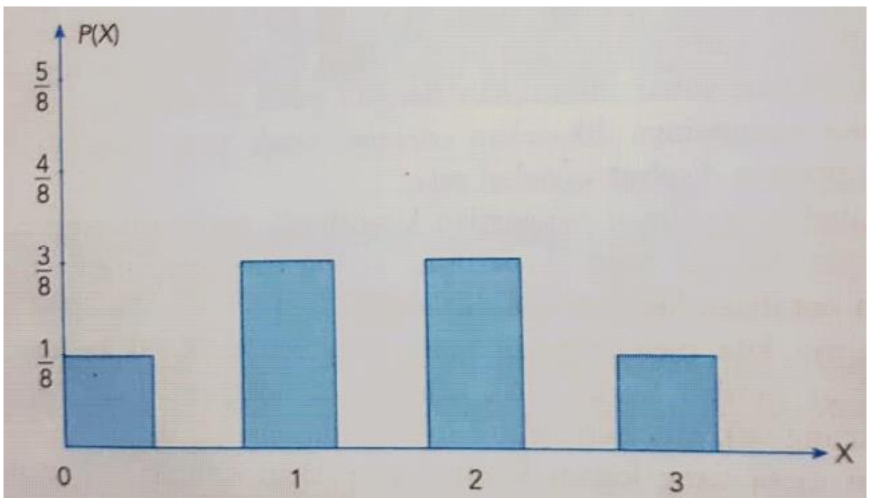
Tabel 5 (frekuensi dari eksperimen tiga kali pelemparan mata uang)

X	f	fr
0	1	$\frac{1}{8}$
1	3	$\frac{3}{8}$
2	3	$\frac{3}{8}$
3	1	$\frac{1}{8}$

Apabila kita cari probabilitas untuk setiap nilai variable, maka nilai seluruh probabilitas tersebut bersama-sama dengan nilai variable masing-masih dinamakan *distribusi probabilitas.* Table distirbusi probabilitas dapat dilihat pada table berikut beserta gambar grafiknya.

Tabel 6 (distribusi probabilitas eksperimen pelemparan mata uang)

X	*fr = P(X)*
0	$\frac{1}{8}$ $(= 0.125)$
1	$\frac{3}{8}$ $(= 0.375)$
2	$\frac{3}{8}$ $(= 0.375)$
3	$\frac{1}{8}$ $(= 0.125)$
	1 (= 1.00)



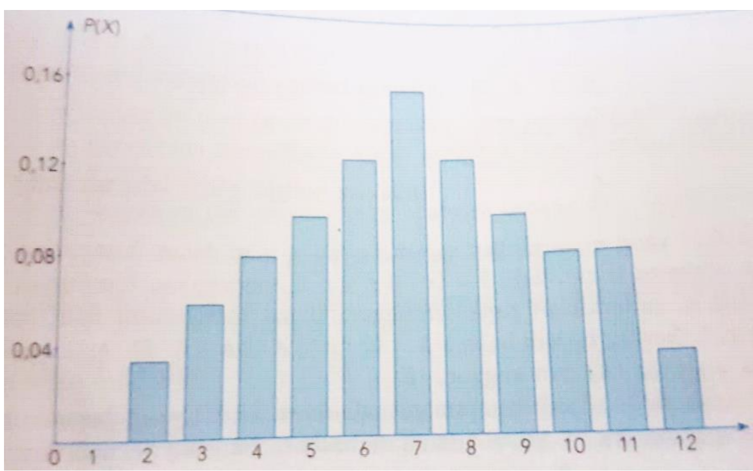
Gambar 2 : Grafik distibusi probabilitas eksperimen pelemparan mata uang

Jika kita melempar dadu sebanyak dua kali (dapat juga dua dadu dilempar sekali) dan kalau X adalah jumlah mata dadu tersebut, maka:

X = 2, terjadi 1 kali (11)	X = 8, terjadi 5 kali (62, 53, 44, 35, 26)
X = 3, terjadi 2 kali (21, 12)	X = 9, terjadi 4 kali (63, 54, 45, 36)
X = 4, terjadi 3 kali (31, 22, 13)	X = 10, terjadi 3 kali (64, 55, 46)
X = 5, terjadi 4 kali (41, 32, 23, 14)	X = 11, terjadi 2 kali (65, 56)
X = 6, terjadi 5 kali (51, 42, 33, 24, 15)	X = 12, terjadi 1 kali (66)
X = 7, terjadi 6 kali (61, 52, 48, 34, 25, 16)	

Tabel 7 (frekuensi dan eksperimen dua kali pelemparan dadu)

X	*f*	*fr[= P(X)]*
2	1	$\frac{1}{36}$ $(= 0.028)$
3	2	$\frac{2}{36}$ $(= 0.056)$
4	3	$\frac{3}{36}$ $(= 0.083)$
5	4	$\frac{4}{36}$ $(= 0.111)$
6	5	$\frac{5}{36}$ $(= 0.139)$
7	6	$\frac{6}{36}$ $(= 0.167)$
8	5	$\frac{5}{36}$ $(= 0.139)$
9	4	$\frac{4}{36}$ $(= 0.111)$
10	3	$\frac{3}{36}$ $(= 0.083)$
11	2	$\frac{2}{36}$ $(= 0.056)$
12	1	$\frac{1}{36}$ $(= 0.028)$
	36	1 (= 1.00)



Gambar 3 : Grafik distibusi probabilitas eksperimen pelemparan dadu

Sering kali kita tertarik untuk mengetahui probabilitas dari suatu himpunan bagian (subset). Maksudnya, kalau dari satu eksperimen melempar mata uang dua kali kita menjumpai:

$S = (BB, \overline{B}B, B\overline{B}, \overline{B}\overline{B}) \longrightarrow X = \{0, 1, 2\}$

$P(X \geq 1) = P(X = 1$ atau $X = 2)$ maka 1 dan 2 merupakan himpunan bagian. Dengan demikian, X = 1 kalau hasil eksperimen $B\overline{B}$, $\overline{B}B$ dan X = 2 kalau asil eksperimen *BB*. *P*(X < 2) = *P*(X = 0 atau X = 1) dimana 0 dan 1 merupakan himpunan bagian.

Jika ruang sampel S rerdiri dari elemen-elemen, maka sebagian dari elemen-elemen tersebut merupakan *himpunan bagian*. Pada dasarnya kejadian (*event*) merupakan himpunan bagian. Misal A = mendapatkan 1*B*, berarti A terdiri dari 2 elemen yaitu $B\bar{B}$ *dan* $\bar{B}B$. Kejadian yang terdiri dari satu elemen dalam ruang sampel S disebut *kejadian elementer (elementary element)*.

Jika S_i merupakan himpunan bagian dari S (dalam hal yang ekstrem, S juga merupakan himpunan bagian S_i = S), maka $0 \leq P(S_i) \leq 1$ dan $P(S) = 1$. Jika *S* dibagi menjadi *k* himpunan bagian, yaitu $S_1, S_2, \dots, S_i, \dots, S_k$, maka $S_1, S_2, \dots, S_i, \dots, S_k$ dikatakan saling meniadakan kalau kejadian S_i tidak dapat terjadi bersama-sama (secara serentak) dengan S_j, $i \neq j$ oleh karena itu,

$$P(S) = \sum_{i=0}^{k} \quad P(S_i) = 1$$

Jika $P(S_i) = 0$, maka S_i disebut kejadian yang tidak akan mungkin terjadi (*impossible event).* Jika $P(S_i) = 1$, maka S_i disebut kejadian yang pasti akan terjadi (*sure event or certain event*).

3.1. Notasi Himpunan

Apabila S merupakan himpunan, maka objek yang terkandung di dalamnya dinamakan anggota atau elemen. Misalnya S = $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ maka x_1, x_2, x_3, x_4, dan x_5 masing-masing merupakan anggota atau elemen dari S. suatu mata uang logam Rp50 dilempar keatas sebanyak satu kali, S = $\{B, \bar{B}\}$ maka $\bar{B}$, *B* adalah anggota atau elemen S. Anggota S dapat berupa variable diskrit (tidak mengambil seluruh nilai dalam suatu interval) dan kontinu (mengambil seluruh nilai dalam suatu interval).

Diskrit: $S = \{x : x = 0, 1, 2, 3\}$

0 1 2 3 (nilainya berupa kumpulan beberapa titik)

Kontinu: $S=\{x : 0 \leq x \leq 1\}$

0 1 (nilainya berupa garis, seluruh titik)

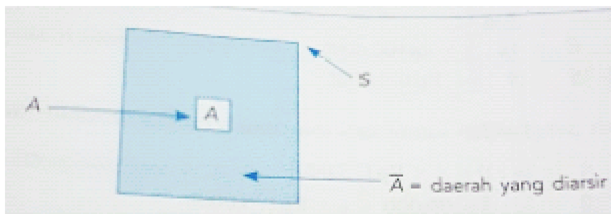
Symbol (:) yang memisahkan variable dengan nilai dalam himpunan dibaca sedemikian rupa sehingga (s.r.s), jadi S = {x : 0 ≤ x ≤ 1} merupakan himpunan yang diwakili oleh variable x sedemikian rupa sehingga x dapat mengambil nilai mulai dari 0 sampai dengan 1. Sering terjadi bahwa X = {x : x € A dan x € B) artinya, sebagai anggota x, x juga anggota (A) dan anggota (B). Misal X adalah himpunan mahaiswa FE-UI yang pernah ikut Menwa, Jika A adalah mahasiswa FE-UI, B adalah mahasiswa UI yang pernah ikut menwa, maka X = { x : x € A dan x € B}.

Himpunan dari seluruh kejadian yang ada disebut *himpunan semesta (universal set).* Himpunan bagian yang paling kecil dari suatu himpunan disebut *himpunan kosong (null set)* dengan symbol *ф.* Himpunan kosong tidak mempunyai anggota atau elemen. Misal, seseorang tidak mempunyai 2 jenis kelamin: Φ = {x : x = laki-laki dan x = perempuan}

Karena himpunan maupun himpunan bagian dapat merupakan kejadian (*event*), maka selanjutnya akan kita bicarakan istilah-istilah mengenai kejadian: kejadian komplementer, interseksi (perpotongan), dan union (gabungan).

3.2. Komplemen Suatu Kejadian

Misalkan bahwa *S* adalah ruang sampel (himpunan dari hasil eksperimen), *A* adalah himpunan bagian dari *S*, dan $\bar{A}$ adalah komplemen dari *A* atau semua anggota *S* yang bukan anggota *A*. hubungan tersebut dapat digambarkan seperti terlihat pada peraga berikut.



Gambar 4: Diagram Venn hubungan A dengan komplemen A($\bar{A}$)

Misal dari suatu penelitian terhadap 100 barang, ternyata ada 10 barang yang rusak, maka:

$\bar{S}$ = seluruh barang (100), rusak dan tidak rusak

A = barang yang rusak (10)

$\bar{A}$ = barang yang tidak rusak (100-10=90)

$P(\bar{A})$ = *1- P(A) (*lihat rumus 12.3)

Atau,

$\bar{S}$ = ruang sample (seluruh karyawan suatu perusahaan

A: A = karyawan yang sampel upahnya sama atau lebihdari 100000 per bulan

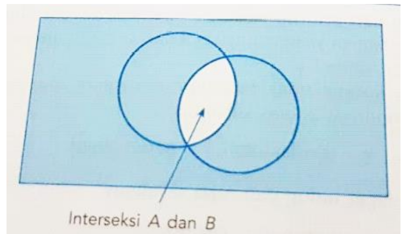
A = *karyawna perusahaan yang upahnya kurang dari 100000 perbulan*

R = {x : x € A, atau x € $\bar{A}$}

3.3. Interseksi Dua Kejadian

Interseksi dua kejadian, misalnya *A* dan *B,* yang sering ditulis *A* ∩ *B* (dibaca *A interseksi B*) atau *AB*, teriri dari elemen-elemen anggta *S* yang selain mempunyai sifat atau ciri=ciri *A* juga *B*, artinya selain anggota *A* juga anggota *B*.

A Π B = {x :x € A dan x € B}

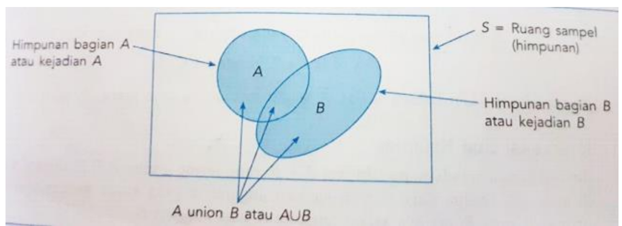


Gambar 5: Diagram Venn $A \cap B$

3.4. Union Dua Kejadian

Union dua kejadian *A* dan *B* ditulis $A \cup B$ (dibaca "A union B") atau A+B merupakan himpunan bagian S, yang terdiri dari elemen-elemen anggota S yang menjadi anggota A saja, B saja, atau menjadi anggota A dan B sekaligus.

$A \cup B = \{x : x \in A, x \in B, \text{ atau } x \in AB\}$



Gambar 6: Diagram Venn $A \cup B$

3.5. Beberapa Aturan/Hukum dalam Himpunan

1) Hukum Penutup *(Law of closure)*
   Untuk setiap pasang himpunan A dan B, terdapat himpunan-himpunan yang unik (*unique sets*) yaitu himpunan $A \cup B$ dan $A \cap B$.
2) Hukum Komutatif (*commutative Law*)
   $A \cup B = B \cup A$ dan $A \cap B = B \cap A$
3) Hukum Asosiatif (*Associative Law*)
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4) Hukum Distributif (*distributive law)*
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
5) Hukum identitas (*identity law*)
   Ada himpunan ϕ dan S yang unik, sedemikian rupa sehingga untuk setiap himpunan A selalu berlaku persamaan $A \cap S = A$ dan $A \cap \phi = A$, ϕ = himpunan kosong (*empty set*)
6) Hukum komplementasi (*complementation law)*
   Bersesuaian dengan setiap himpunan A dan himpunan $\overline{A}$, yang unil sedemikian rupa sehingga $A \cap \overline{A} = \phi$ dan $A \cup \overline{A} = S$.

4. Beberapa Aturan Dasar Probabilitas

Secara umum, beberapa kombinasi dari kejadian dalam sebuah eksperimen dapat dihitung probabilitasnya berdasarkan dua aturan, yaitu aturan penjumlahan dan aturan perkalian.

4.1. Aturan Penjumlahan

Untuk menerapkan aturan penjumlahan ini, harus dilihat jenis kejadiannya apakah bersifat saling meniadakan (*mutually exclusive*) atau tidak saling meniadakan.

4.1.1 Kejadian Saling Meniadakan

Aturan penjumlahan yang diterapkan untuk kejadian yang saling meniadakan disebut dengan aturan penjumlahan khusus. Kejadian saling meniadakan (*mutually exclusive event*) adalah kejadian dimana jika sebuah kejadian terjadi, maka kejadian yang kedua tidak akan terjadi. Ini merupakan kejadian yang saling meniadakan. Jika A telah terjadi, maka kejadian B tidak akan terjadi. Sebagai contoh, dalam pelemparan sebuah dadu, munculnya mata dadu 2 dan 3 tidak bisa terjadi secara bersamaan, sehingga munculnya mata dadu 2 meniadakan munculnya mata dadu lainnya.

Jika dua kejadian A dan B saling meniadakan (saling lepas), aturan penjumlahan menyatakan bahwa probabilitas terjadinya A atau B sama dengan penjumlahan dari masing-masing nilai probabilitasnya, dan dinyatakan dengan rumus sebagai berikut:

$$P(A \text{ atau } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{5}$$

Untuk tiga kejadian saling meniadakan yang dinyatakan dengan A, B, dan C ditulis:

$$P(A \text{ atau } B \text{ atau } C) = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \tag{6}$$

Contoh 7:

Sebuah mesin otomatis pengisi kantong plastic dengan campuran beberapa jenis sayuran menunjukkan bahwa sebagian besar kantong plastic berisi sayuran tersebut memuat berat yang benar. Meskipun demikian, karena ada sedikit variasi dalam ukuran sayuran yang ada, sebuah paket kantong plastic mungkin sedikit lebih berat atau lebih ringan dari berat standar. Pengecekan terhadap 4000 paket menunjukkan hasil sebagai berikut:

Tabel 8 (Hasil pengecekan probabilitas kejadian A, B, dan C untuk 4000 paket)

Berat	Kejadian	Jumlah paket	Probabilitas
Lebih ringan	A	100	$\frac{100}{4000} = 0.025$
Standar	B	3600	$\frac{3600}{4000} = 0.900$
Lebih berat	C	300	$\frac{300}{4000} = 0.075$
Jumlah		4000	1000

Hitung berapa probabilitas bahwa sebuah paket tertentu beratnya akan lebih ringan atau lebih berat dari berat standar?

Penyelesaian:

Hasil (*outcome*) "lebih ringan" adalah kejadian A, dan hasil "lebih berat" adalah kejadian C. Dengan menerapkan aturan penjumlahan, maka diperoleh:

$$
\begin{aligned}
P(A \text{ atau } C) = P(A \cup C) &= P(A) + P(C) \\
&= 0.025 + 0.075 \\
&= 0.10
\end{aligned}
$$

Catatan: kejadian diatas merupakan kejadian yang saling meniadakan (saling lepas). Artinya sebuah paket tidak dapat memenuhi berat "lebih ringan", "standar", dan "lebih berat" secara bersamaan. Jadi, hanya salah satu dari ketiga kriteria tersebut.

4.1.2 Kejadian Tidak Saling Meniadakan

Adakalanya hasil dari suatu eksperimen tidak bersifat saling meniadakan. Jika dua kejadian saling berinteraksi (beririsan), probabilitasnya disebut disebut sebagai probabilitas bersama (*joint probability*). Secara ringkas, aturan umum penjumlahan untuk kejadian-kejadian yang tidak saling meniadakan pada dua kejadian A dan B dapat ditulis:

$$P(A \text{ atau } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ dan } B)$$

Atau

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (9)$$

Catatan: P(A atau B) atau P(A∪B) dapat dinyatakan dalam bentuk kalimat "peluang bahwa A mungkin terjadi dan B mungkin terjadi". Kalimat ini juga mencakup "kemungkinan bahwa A dan B terjadi" dalam hal kejadian yang tidak saling meniadakan.

Contoh 8:

Berapa probabilitas bahwa sebuah kartu yang terpilih secara acak dari satu set kartu yang berisi 52 kartu adalah kartu bergambar raja (*King*) atau bergambar hati (*heart*)?

Penyelesaian:

Dalam satu set kartu terdapat gamabr raja sebanyak 4 buah, dan gambar hati sebanyak 13 buah. Karena diantara 4 kartu raja juga ada yang bergambar hati, maka kejadian terpilihnya kartu bergambar raja atau hati merupakan kejadian yang bersifat "bukan saling meniadakan". Peluang/probabilitas masing-masing kejadian dapat diringkas sebagai berikut:

Tabel 9 (Peluang probabilitas kejadian bersifat bukan saling meniadakan)

Kartu	Probabilitas	Penjelasan
Raja (king)	$P(A) = \frac{4}{52}$	4 kartu raja dalam 1 set kartu
Hati (Heart)	$P(B) = \frac{13}{52}$	13 kartu hati dalam 1 set kartu
Raja bergambar hati	$P(A\ dan\ B) = \frac{1}{52}$	1 kartu raja bergambar hati dalam 1 set kartu

Dengan menggunakan rumus untuk kejadian yang saling tidak meniadakan, maka dapat dihitung probabilitas bahwa sebuah kartu akan bergambar hati atau raja, yaitu:

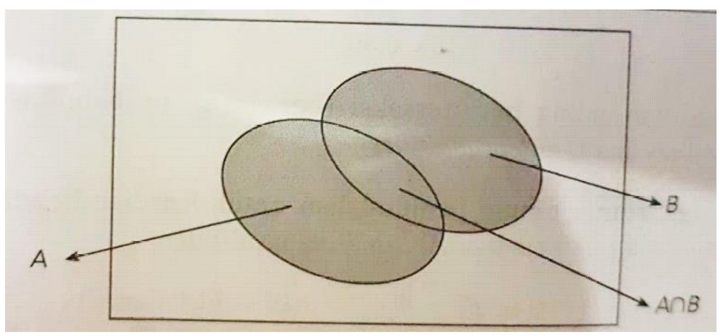
$$P(A \text{ atau } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ dan } B)$$

$$= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} + \frac{1}{52}$$

$$= \frac{16}{52}$$

$$= 0.3077$$

Kejadian yang "tidak saling meniadakan (*not mutually exclusive*)" dapat digambarkan dengan diagram venn sebagai berikut:



Gambar 7: Diagram Venn P (*AUB)*

4.2. Aturan Perkalian

Dalam konsep probabilitas, aturan perkalian diterapkan secara berbeda menurut jenis kejadiannya. Ada dua jenis kejadian dalam hal ini, yaitu kejadian tak bebas (*dependent event*) dan kejadian bebas (*independent event*).

4.2.1 Kejadian Tak Bebas (bersyarat)

Probabilitas terjadinya kejadian A dengan syarat bahwa B sudah terjadi atau akan terjadi disebut probabilitas bersyarat (*conditional probability*), atau biasa ditulis P(A/B).misalkan jumlah seluruh mahasiswa suatu universtas (S atau N) sama dengan 10000 orang. Himpunan A mewakili 2000 mahasiswa lama (a). himpunan B mewakili

3500 mahasiswa putri (b), sedangkan 800 dari 3500 mahasiswa putri merupakan mahasiswa lama (c). A dan B masing-masing merupakan himpunan bagian dari S. kita memilih satu orang mahasiswa secara acak/random, dengan kejadian bersyarat (A/B) adalah kejadian yang mewakili mahasiswa lama dengan syarat bahwa mereka putri. P(A/B) = probabilitas bersyarat untuk menjawab pertanyaan: diketahui mahasiswa yang terpilih putri, berapa probabilitasnya bahwa mahasiswa tersebut mahasiswa lama?

P(A/B) $= \frac{c}{d}$

$= \frac{800}{3500}$

= 0.23 (merupakan proporsi mahasiswa lama putri terhadap seluruh mahasiswa putri).

Untuk memperoleh presentase, nilai proporsi dikalikan 100%, yaitu 23%.

Kejadian bersyarat (A/B) berarti kejadian yang mewakili mahasiswa putri denga syarat bahwa mereka mahasiswa lama.

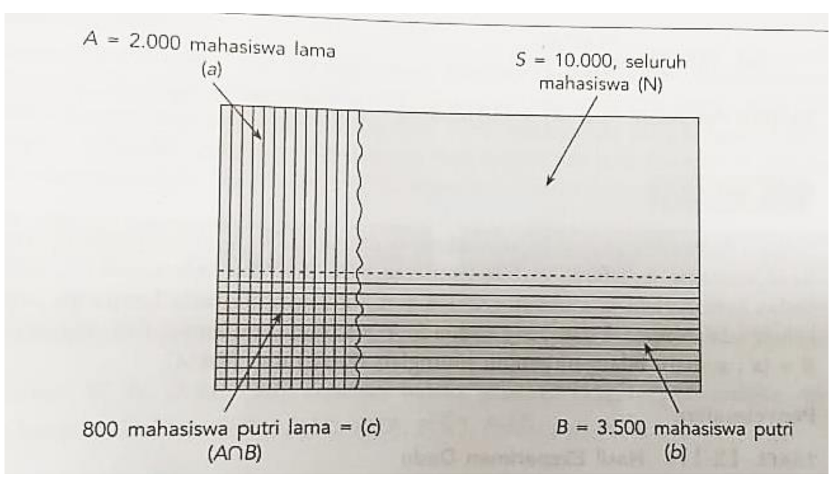
P(B/A) = probabilitas bersyarat untuk menjawab pertanyaan: diketahui mahasiswa yang terpilih mahasiswa lama, berapa probabilitasnya bahwa mahasiswa tersebut putri, atau P(A/B) = probabilitas terjadinya B dengan syarat A terjadi = probabilitas bahwa yang terpilih mahasiswa putri dengan syarat bahwa mahasiswa tersebut mahasiswa lama.

P(B/A) = P (mahasiswa putri)

$\frac{c}{d}$ $= \frac{800}{2000}$

= 0.40

Jika dinyatakan dalam diagram, bentuknya adalah sebagai berikut:



Gambar 8: Diagram Venn kejadian bersyarat

Dari diagram tersebut terlihat bahwa: P(A∩B) = $\frac{c}{N}$ = $\frac{800}{10000}$ = 0.08 = 8%

Apabila dari 10000 mahasiswa tersebut dipilih satu secara acak, berapakah probabilitasnya bahwa mahasiswa tersebut mahasiswa lama dengan syarat putri?

P(A/B) = P (lama/putri)

= $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

= $\frac{c/N}{b/N}$

= $\frac{c}{b}$

= $\frac{800}{3500}$ = 0.23 (ini sama dengan hasil perhitungan diatas)

Dengan argumentasi yang sama, probabilitas bahwa mahasiswa yang terpilih secara acak tersebut mahasiswa putri dengan syarat bahwa harus juga mahasiswa lama, maka:

P(B/A) = P (putri/lama)

= $\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

= $\frac{c/N}{a/N}$

= $\frac{c}{a}$

= $\frac{800}{2000}$ = 0.40 (Sama seperti di atas)

Pada umumnya probabilitas bersyarat dirumuskan sebagai berikut:

(a) P(A/B) = $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ (10)

(b) P(B/A) = $\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ (11)

4.2.2 Probabilitas Kejadian Interseksi

Untuk menghitung probabilitas bersyarat, seolah-olah kita sudah mengetahui P(A∩B), P(A) dan P(B). Berdasarkan apa yang kita ketahui tersebut, kita akan menghitung P(A/B) atau P(B/A). Dalam prakteknya, sering kali sukar untuk mengitung P(A∩B), untuk menghitung P(A∩B), rumus yang digunakan sering disebut aturan umum dari perkalian probabilitas, sebagai berikut:

P(A∩B) = P(A) P(B/A) = P(B) P(A/B) (12)

Rumus tersebut yang berarti bagwa P(A∩B) = probabilitas bahwa A dan B terjadi secara simultan, sebetulnya merupaka hasil kali dari probabilitas dua kejadian.

$P(A \cap B) = P(A)P(B/A)$

P(A) = probabilitas bahwa A terjadi

P(B/A) = probabilitas B terjadi dengan syarat A terjadi

$P(A \cap B) = P(B)P(A/B)$

P(B) = probabilitas bahwa B terjadi

P(A/B) = probabilitas A terjadi dengan syarat B terjadi.

Contoh 9:

Kita mengambil secara acak 2 kartu berturut-turut sari suatu set Kartu Bridge. Berapa probabilitasnya bahwa pengambilan kartu pertama berupa kartu AS, yang kedua juga kartu AS? (Hasil pengambilan pertama tidak dikembalikan lagi dan hasil pengambilan kedua dipengaruhi oleh hasil pengambilan pertama).

Penyelesaian:

Diketahui bahwa:

S = 52 kartu (N), A = pengambilan pertama AS (a=4), $P(A) = \frac{4}{52}$

B/A = pengambilan kedua juga AS dengan syarat pengambilan pertama AS (b=3, N=51) sewaktu pengambilan kedua dilakukan kartu AS yang tinggal hanya 3 sedangkan sisa kartu tinggal 51.

$P(B/A) = \frac{3}{51}$

$P(A \cap B) = P(A)\,P(B/A)$

$= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51}$

$= 0.0045$

Jika kejadian A, B, dan C (3 kejadian), maka:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B/A)P(C/A \cap B) \tag{13}$$

Pembuktiannya: Misalnya $A \cap B = C_0$, maka:

$P(A \cap B \cap C) = P(C_0 \cap C)$

$= P(C_0)P(C/ C_0)$

$P(C_0) = P(A \cap B)$

$= P(A)P(B/A)$

$P(C/C_0) \quad = P(C/A \cap B)$

Jadi, $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B/A)P(C/A \cap B)$ ……… (terbukti)

4.2.3 Kejadian Bebas (*Independent Event*)

Dua kejadian atau lebih dikatakan merupakan kejadian bebas apabila terjadinya kejadian tersebut tidak saling mempengaruhi. Kejadian-kejadian bersyarat (*conditional event*), karena saling mempengaruhi dikatakan kejasian-kejadian yang tidak bebas (*dependent event*). Menurut definisinya, jika A dan B merupakan kejadian bebas, maka:

$P(A/B) = P(A)$ dan $P(B/A) = P(B)$

$P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = P(B)\,P(A)$ (A dan B merupakan kejadian bebas) (14)

Kenyataannya, kejadian-kejadian bebas jarang terjadi karena pada dasarnya Antara kejadian yang satu dengan lainnya saling mempengaruhbaik secara langsung maupun tidak. Sebagai contoh kejadian pasang surut kali ciliwung dengan harga motor Honda dijakarta, pembicaraan mengenai kejadian-kejadian bebassebetulnya kurang mempunyai arti praktis.

Sebaliknya, kejadian-kejadian tidak bebas (saling mempengaruhi) sangat penting untuk diketahui. Kejadian yang satu akan memengaruhi kejadian lainnya, sehingga sangat berguna untuk *peramalan*. Misal ramalan produksi padi tahun depan jika (dengan syarat) penggunaan jumlah pupuk dinaikkan, ramalan hasil penjualan kalau biaya iklan ditingkatkan, ramalan tentang tekanan darah kalau berat badan naik, dan lain sebagainya. Persoalan ini akan dibahas dalam analisis korelasi, regresi, dan ramalan bersyarat (*conditional forecast*) yang terdapat dalam buku berikutnya.

Contoh 10:

Satu mata uang logam Rp50 dilemparkan ke atas sebanyak dua kali. Jika A_1 adalah lemparan pertama yang bergambar burung (B) dan A_2 adalah lemparan kedua yang medapatkan gambar burung (B), berapakah $P(A_1 \cap A_2)$?

Penyelesaian:

Karena pada pelemparan pertama hasilnya tidak mempengaruhi pelemparan kedua dan $P(A_1) = P(B) = \frac{1}{2}$ dan $P(A_2) = P(B) = \frac{1}{2}$,

Maka: $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\,P(A_2) = P(B)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Rangkuman

Probabilitas Pendekatan Klasik

$P(A) = \frac{x}{n}$, $P(A) \geq 0$, sebab $x \geq 0$, $n > 0$

$P(\bar{A}) = \frac{n-x}{n}$

$= \frac{n}{n} - \frac{x}{n}$

$= 1 - \frac{x}{n}$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$,

$\bar{A}$ = bukan *A* (bukan barang rusak)

$\bar{A}$ = komplemen A

Probabilitas Pendekatan frekuensi relative

$P(Xi) = \text{limit}_{n\to\infty} \frac{fi}{n}$

fr = frekuensi relatif

Xi = kejadian i

Aturan Penjumlahan

Peluang kejadian saling meniadakan

$P(A \text{ atau } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(A \text{ atau } B \text{ atau } C) = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

Peluang kejadian tidak saling meniadakan

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Aturan Perkalian

Peluang kejadian tak bebas/bersyarat

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Peluang kejadian interseksi

$P(A \cap B) = P(A)\, P(B/A) = P(B)\, P(A/B)$

Peluang kejadian bebas

$P(A/B) = P(A)$ dan $P(B/A) = P(B)$

$P(A \cap B) = P(A)\, P(B) = P(B)\, P(A)$

Referensi

- J. Supranto, Statistik, Teori dan Aplikasi, Jilid 1, Penerbit Erlangga, 2016

- Djarwanto Ps, Statistik Sosial ekonomi, Edisi ketiga, BPFE Yogyakarta, 2001

- Ronald EW, Pengantar statistika, Edisi ke 3,

- Yanti Budiasih, Statistika Deskriptif untuk Ekonomi dan Bisnis, Jelajah Nusa, 2012

- Sugiyono, Statistika untuk Penelitian, Penerbit Alfabeta Bandung, 2010