PENDUGAAN PARAMETER

Team Dosen Universitas Esa Unggul

Daftar Isi

Pendahuluan 2
Metode Pendugaan Parameter 3
Sifat Penduga Yang Baik 3
Cara Menduga Nilai Parameter 5
Pendugaan Titik (Estimasi Titik) 5
Pendugaan Interval (Estimasi Interval) 5
Rumus pendugaan interval rata – rata μ 6
Elemen Estimasi Confidence Interval 6
Confidence Interval 7
Interval dan Level Confidence 7
Faktor yang Mempengaruhi Besar Interval (Presisi) 7
Nilai Confidence Interval 8
Menentukan Ukuran Sampel (Biaya) 9
Bila Standar Deviasi Populasi Tidak Diketahui 9
Estimasi Confidence Interval untuk Proporsi 11
Menentukan Ukuran Sampel untuk Proporsi 12
Pendugaan Beda Dua Nilai Tengah 13
Pendugaan Beda Dua Nilai Tengah 13
Pendugaan Beda Dua Nilai Tengah 14
Pendugaan Beda Dua Nilai Tengah 14
Pendugaan Ragam 15
Latihan Soal Dan Penyelesaian 16
1) Interval kepercayaan bagi μ; σ diketahui. 16
2) Interval kepercayaan bagi μ untuk sampel berukuran kecil; σ tidak diketahui 17
3) Interval kepercayaan bagi μ_1-μ_2 dan σ_1^2 dan $\sigma_2^{2,}$ diketahui 17
4) Interval kepercayaan bagi μ_1-μ_2 untuk contoh berukuran kecil; σ_1^2 dan σ_2^2 tetapi nilainya tidak diketahui. 18
5) Interval kepercayaan bagi $\mu_1 - \mu_2 = \mu_D$ untuk pengamatan berpasangan. 20
Latihan Soal 22
Referensi 23

PENDUGAAN PARAMETER

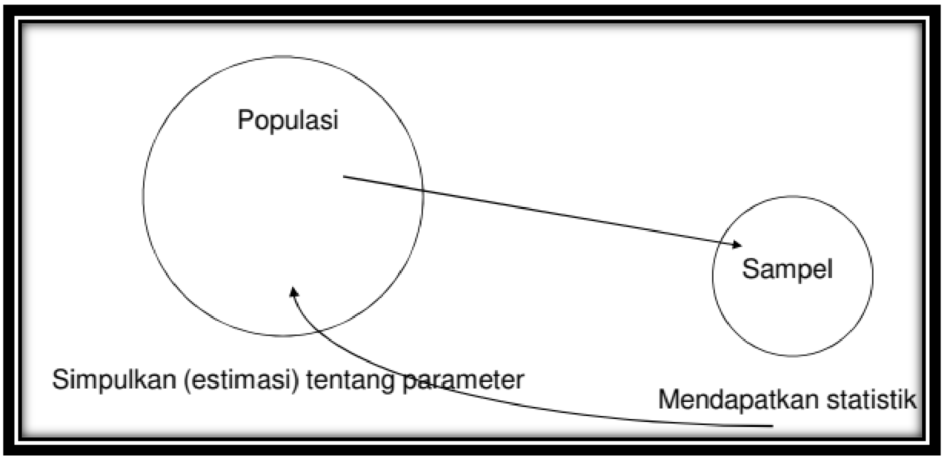
Pendahuluan

Statistika inferensia adalah cabang ilmu pengetahuan statistika yang mempelajari tentang proses pengambilan keputusan tentang parameter berdasarkan suatu statistik. Inferensi statistik mencakup semua metode yang digunakan dalam penarikan kesimpulan atau generalisasi mengenai populasi. Karena adanya berbagai alasan seperti banyaknya individu dalam populasi amatan, maka penelitian keseluruhan terhadap populasi tersebut tidaklah ekonomis, baik tenaga, waktu, maupun biaya, maka penelitian hanya menggunakan sampel saja. Harga – harga parameter hanya di-ESTIMASI-kan/diduga berdasarkan harga – harga statistik sampelnya.

Pendugaan dalam kehidupan sehari – hari tidak dapat dihindari. Permasalahannya adalah bagaimana pendugaan tersebut mendekati kebenaran. Oleh karena itu, statistika induktif mengembangkan teori pendugaan (estimasi/penaksiran). Teori pendugaan (ESTIMASI/ PENAKSIRAN) adalah suatu proses dengan menggunakan statistik sampel untuk menduga parameter populasi dan dapat dikelompokkan dalam 2 bidang utama:

- Pendugaan Parameter
  Contoh:
  Seorang calon dalam suatu pemilihan ingin menduga proporsi yang sebenarnya pemilih yang akan memilihnya, dengan cara mengambil 100 orang secara acak untuk ditanyai pendapatnya. Proporsi pemilih yang menyukai calon tersebut dapat digunakan sebagai dugaan bagi proporsi populasi yang sebenarnya.

- Pengujian Hipotesis
  Contoh:
  - Seorang peneliti masalah kedokteran diminta untuk memutuskan, berdasarkan bukti-bukti hasil percobaan, apakah suatu vaksin baru lebih baik daripada yang sekarang beredar di pasaran.
  - Seorang insinyur ingin memutuskan, berdasarkan data contoh apakah ada perbedaan ketelitian antara dua jenis alat ukur.



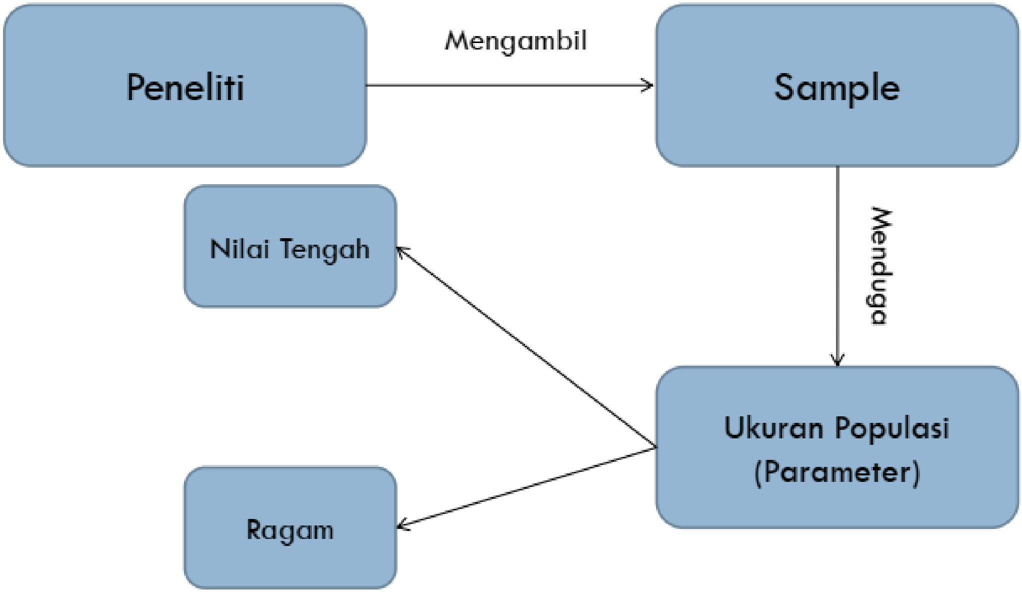
Estimasi: estimasi titik, estimasi interval, uji hipotesa

Metode Pendugaan Parameter
Metode Pendugaan Parameter suatu populasi dapat dibedakan menjadi dua:

- Pendugaan Metode Klasik
  Pendugaan dilakukan berdasarkan sepenuhnya pada informasi sampel yang diambil dari populasi.
- Pendugaan Bayes
  Pendugaan dengan menggabungkan informasi yang terkandung dalam sampel dengan informasi lain yang telah tersedia sebelumnya yaitu pengetahuan subyektif mengenai distribusi probabilitas parameter.

Statistik yang digunakan untuk memperoleh sebuah dugaan bagi parameter populasi disebut penduga atau fungsi keputusan. Sedangkan adalah sebuah nilai dugaan berdasarkan sampel acak berukuran n.

Metode Pendugaan Parameter

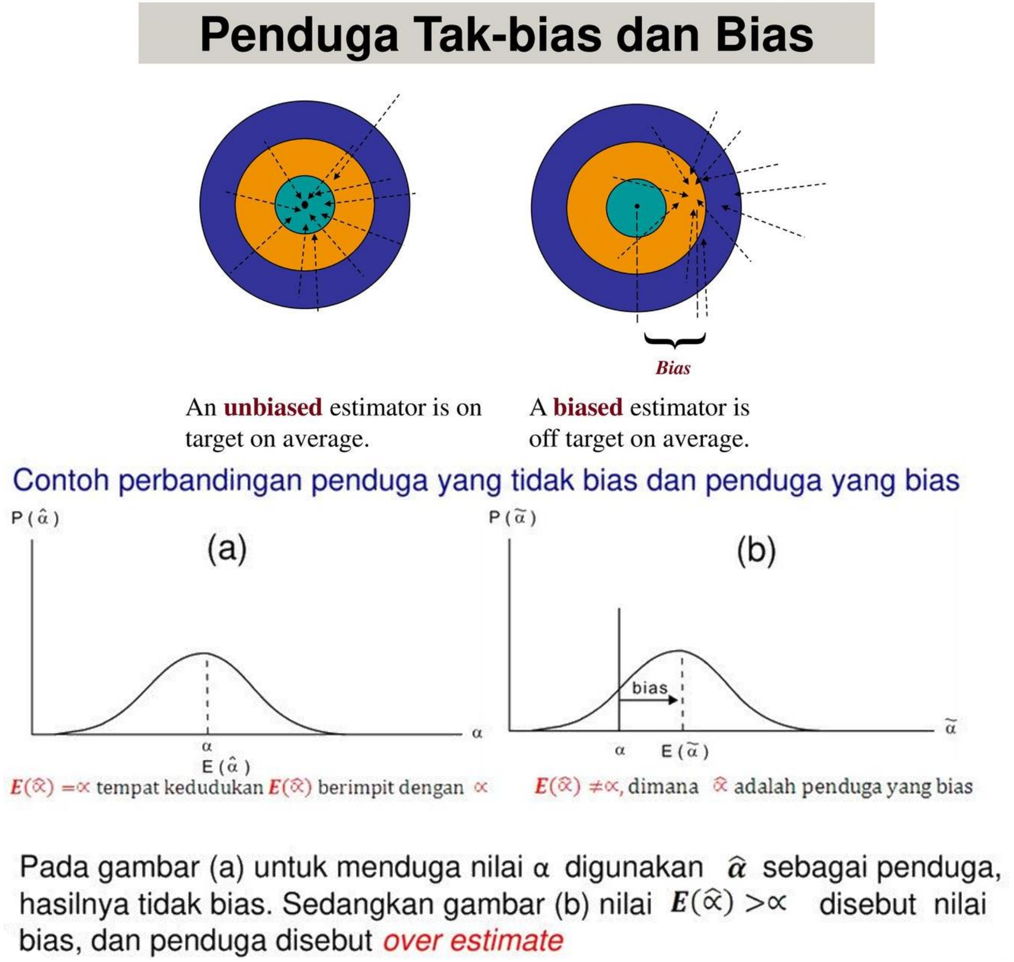


Misal: Fungsi keputusan S^2 (yang merupakan fungsi dari sampel acak yang bersangkutan) adalah suatu penduga, sedangkan nilai dugaan s^2 merupakan realisasinya.

Dalam membuat estimasi nilai parameter populasi, seyogyanya variable random nilai statistik sampel tidak bervariasi terlalu jauh dari nilai parameter populasi yang konstan. Misalnya, jika μ merupakan mean populasi dan X merupakan penduga bagi μ, maka dalam menggunakan X sebagai penduga kita harus berharap variabel random X tidak akan menyimpang terlalu jauh dari μ.

Sifat Penduga Yang Baik
Penduga yang baik memiliki beberapa sifat:

1. Tidak bias/ Unbiased
   $\hat{\theta}$ Merupakan penduga tak bias (unbiased estimator) dari θ jika $E(\hat{\theta}) = \theta$. Sebuah penduga dikatakan tak bias kalua rata-rata dari seluruh kemungkinan sampel akan sama dengan nilai parameter dari populasi yang diduga.



2. Efisien

   $\hat{\theta}$ Merupakan penduga yang efisien (Efficient Estimator) bagi θ jika penduga $\hat{\theta}$ memiliki varians atau standar deviasi yang lebih kecil dibandingkan dengan penduga lainnya. Jika terdapat 2 penduga yang tak bias, dimana varians atau standar deviasi dari penduga satu lebih kecil dibandingkan varians atau standar deviasi penduga kedua, maka penduga satu relative lebif efisien dibandingkan dengan penduga kedua.

3. Konsisten

   $\hat{\theta}$ Merupakan penduga yang konsisten (Consistent Estimator) bagi θ apabila nilai $\hat{\theta}$ cenderung mendekati nilai parameter θ untuk n yang semakin besar mendekati tak terhingga.
   Jadi ukuran sampel yang besar cenderung memberikan penduga titik yang lebih baik dibandingkan ukuran sampel kecil.

4. Cukup

   $\hat{\theta}$ Merupakan penduga yang cukup (Sufficient Estimator) bagi θ apabila $\hat{\theta}$ mencakup seluruh informasi tentang penduga yang terkandung didalam sampel.

Cara Menduga Nilai Parameter
Nilai Pendugaan parameter dapat diestimasikan/diduga denga dua cara, yaitu:

Pendugaan Titik (Estimasi Titik)

Penduga titik adalah suatu nilai angka tertentu sebagai estimasi untuk parameter yang tidak diketahui. Misal: menduga μ dengan $\overline{X}$. Penduga titik menentukan suatu bilangan tunggal berdasarkan sampel sebagai penduga dari parameter dengan cara:

- Penduga titik untuk μ:

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{n}$$

- Penduga titik untuk σ^2:

$$S^2 = \frac{\sum(X - \overline{X})^2}{n-1}$$

- Penduga titik untuk P:

$$p = \frac{X}{n}$$

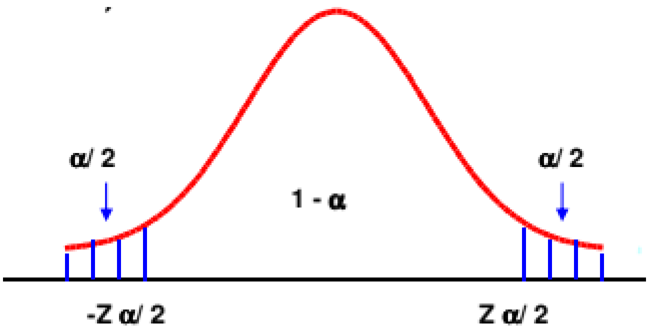
Estimasi Parameter Populasi …		Dengan statistik Sample
Mean	μ	$\overline{X}$
Proporsi	p	P_S
Varian	σ^2	S^2
Difference	$\mu_1 - \mu_2$	$\overline{X}_1 - \overline{X}_2$

Pendugaan Interval (Estimasi Interval)

Dalam prakteknya, pendugaan tunggal yang terdiri atas satu angka tidak memberikan gambaran mengenai berapa jarak/ selisih nilai penduga tersebut terhadap nilai sebenarnya. Hal ini didasarkan atas pertimbangan bahwa suatu nilai dugaan tidak mungkin dapat dipercaya 100%. Pendugaan interval menunjukkan pada interval berapa suatu parameter populasi akan berada yang dibatasi oleh dua nilai, yang disebut nilai batas bawah dan nilai batas atas.

Contoh: rata – rata modal akan terletak dalam interval antara 95 juta – 105 juta. Kita mengharapkan bahwa nilai rata – rata sebenarnya akan terletak di dalam interval tersebut. Interval yang demikian disebut interval keyakinan atau interval keyakinan.

Untuk membuat pendugaan interval, harus ditentukan terlebih dahulu besarnya koefisien keyakinan atau tingkat keyakinan, yang diberi simbol 1 - 〈. Besarnya nilai 1 - 〈, misalnya adalah 90%, 95%, 99%, atau yang lainnya. Perhatikan kurva normal berikut:
(luas kurva = 1 atau 100%)



1 - α : koefisien keyakinan/ tingkat keyakinan
α : taraf signifikan atau besarnya kesalahan yang ditolerir dalam membuat keputusan

Contoh: rata – rata modal terletak antara interval 95 juta – 105 juta (a = 95 juta, b = 105 juta) dan 1 - α= 0,90.

Intrepetasi: Kita memutuskan bahwa interval 95 – 105 akan memuat μ dengan probabilitas sebesar 0,90. Dan kesalahan yang ditolerir adalah sebesar 0,10. Kesalahan yang mungkin terjadi adalah bahwa interval tersebut tidak memuat μ.

Rumus pendugaan interval rata – rata μ

I. $\bar{X} - Z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Rumus ini berlaku untuk sampel besar (n ≥ 30) dari populasi yang tak terbatas atau dari populasi terbatas akan tetapi penarikan sampel dilakukan dengan pengembalian.

II. $\bar{X} - Z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

Rumus ini berlaku untuk populasi terbatas, akan tetapi sampel sebanyak n diambil tanpa pengembalian dari populasi N elemen dan σ diketahui.

III. $\bar{X} - t_{a/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{a/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$

Rumus ini berlaku untuk sampel kecil (n < 30) yang diambil dari populasi (σ tidak diketahui) dengan pengembalian. Rumus ini diperoleh dari rumus 1 dengan jalan mengganti σ dengan s dan $Z_{a/2}$ dengan $t_{a/2}$. Dimana:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(X_i - \bar{X})^2}$$

Elemen Estimasi Confidence Interval

- Level confidence (Tingkat kepercayaan)
  – Kepercayaan dalam interval yang berisi parameter populasi tak diketahui
- Presisi (jangkauan)
  – Kedekatan pada parameter yang tidak diketahui
- Biaya
  – Biaya digunakan untuk menentukan ukuran sampel

Confidence Interval

- Ditentukan dengan 100 1 % (−α)

Artinya: $$P\left(\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 100(1-\alpha)\%$$

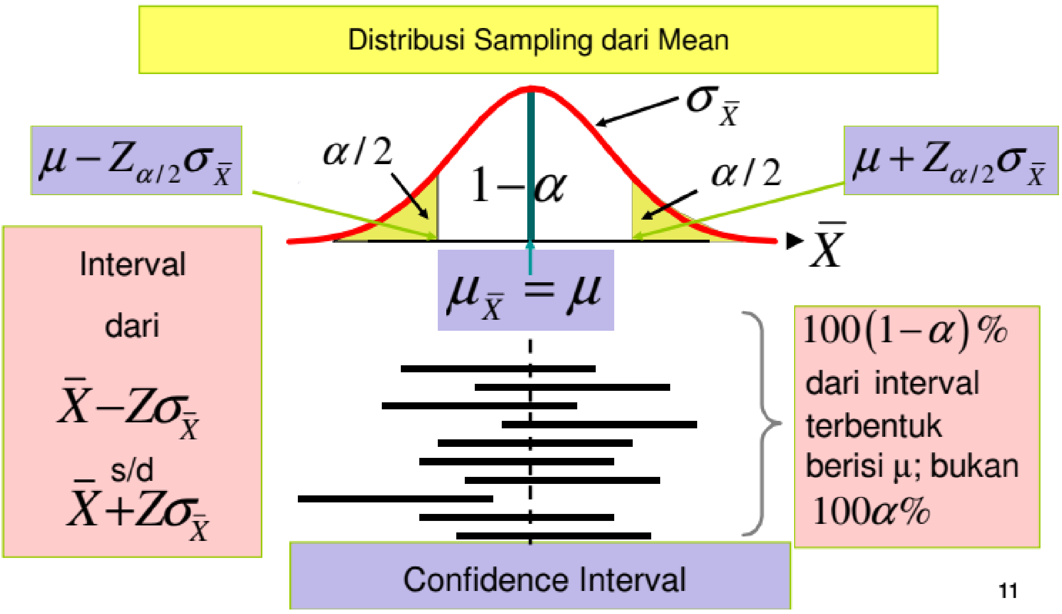
- Interpretasi frekuensi relatif

  Dalam proses yang lama, dari semua confidence interval yang dapat dibangun akan berisi parameter yang tidak diketahui.

- Interval tertentu baik yang berisi parameter maupun yang tidak berisi parameter

  Tidak ada probabilitas yang terlibat dalam interval tertentu.

Interval dan Level Confidence



Faktor yang Mempengaruhi Besar Interval (Presisi)

- Variasi Data
- Ukuran sampel:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Level confidence:

100% (1 −α)

Nilai Confidence Interval

- Confidence Interval 99%, Z = ± 2.575
- Confidence Interval 95%, Z = ± 1.96
- Confidence Interval 90%, Z = ± 1.645
- Confidence Interval 80%, Z = ± 1.28
- Margin Error:

$$E = Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

STUDI KASUS 1

Seratus orang calon mahasiswa teknik mesin sebagai sampel acak, yang telah mengikuti tes IQ, mempunyai rata – rata IQ sebesar 110 dan diketahui mempunyai simpangan baku sebesar 20. Dengan menggunakan tingkat keyakinan sebesar 95 %, buatlah pendugaan interval dari rata – rata IQ calon mahasiswa teknik mesin tersebut!

Penyelesaian:

$$\overline{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$110 - 1{,}96\frac{20}{\sqrt{100}} \le \mu \le 110 + 1{,}96\frac{20}{\sqrt{100}}$$

$$110 - 3{,}92 \le \mu \le 110 + 3{,}92$$

$$106{,}08 \le \mu \le 113{,}92$$

STUDI KASUS 2

Lima orang mahasiswa teknik mesin dipilih secara acak untuk diukur tingginya.

X1 = 160 cm; X2 = 160 cm; X3 = 165 cm; X4 = 175 cm; X5 = 180.

Buatlah pendugaan interval tentang rata - rata tinggi mahasiswa dengan tingkat keyakinan 95 %!

Penyelesaian:

$$\overline{X} = 168 \qquad S = 9{,}083$$

$$\overline{X} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$168 - t_{\alpha/2,4}\frac{9{,}083}{\sqrt{5}} \le \mu \le 168 + t_{\alpha/2,4}\frac{9{,}083}{\sqrt{5}}$$

STUDI KASUS 3

Waktu servis drive-through restoran Burger King dihitung secara random dari 52 konsumen. Waktu layanan rata-rata 181.3 detik dan standar deviasi 82.2 detik. Berapa estimasi mean populasi untuk tingkat kepercayaan 95%?

Penyelesaian:

$$\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$E = Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96\left(\frac{82.2}{\sqrt{52}}\right) = 22.34$$

$$181.3 - 22.34 \le \mu \le 181.3 + 22.34$$

$$158.96 \le \mu \le 203.64$$

STUDI KASUS 4

Waktu servis drive-through restoran Burger King dihitung secara random dari 52 konsumen. Waktu layanan rata-rata 181.3 detik dan standar deviasi 82.2 detik. Berapa estimasi mean populasi untuk tingkat kepercayaan 99%?

Penyelesaian:

$$\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$E = Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575\left(\frac{82.2}{\sqrt{52}}\right) = 29.35$$

$$181.3 - 29.35 \le \mu \le 181.3 + 29.35$$

$$151.95 \le \mu \le 210.65$$

Menentukan Ukuran Sampel (Biaya)
Jika Ukuran Sampel Terlalu Besar akan Membutuhkan terlalu banyak sumber daya dan jia Terlalu kecil maka Tidak dapat mengerjakan pekerjaan. Untuk Menentukan Ukuran Sampel terhadap Mean digunakan rumus berikut:

$$n = \frac{Z^2\sigma^2}{\text{Error}^2}$$

Contoh:

Berapa ukuran sampel diperlukan mencapai kepercayaan 90% kebenaran dalam ± 5? Misalnya standard deviasi = 45.

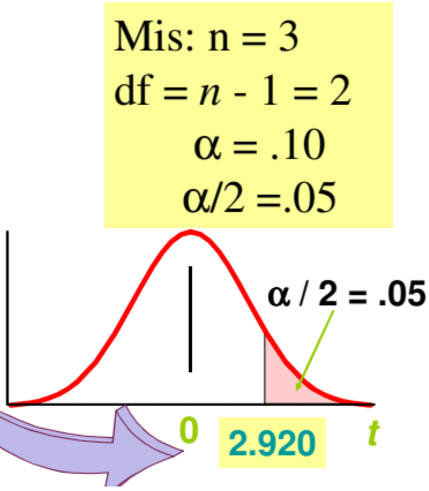
$$n = \frac{Z^2\sigma^2}{\text{Error}^2} = \frac{1.645^2\left(45^2\right)}{5^2} = 219.2 \underbrace{\cong}_{\text{Pembulatan}} 220$$

Bila Standar Deviasi Populasi Tidak Diketahui

- Jika standar deviasi dari populasi diketahui atau n≥30, maka digunakan tabel normal untuk membentuk confidence interval dari mean populasi.
- Bila n<30, gunakan distribusi-t (atau t-table) untuk membentuk confidence interval dari mean populasi.

	Area Atas belakang		
df	.25	.10	.05
1	1.000	3.078	6.314
2	0.817	1.886	2.920
3	0.765	1.638	2.353

Nilai t



Asumsi:
– Standar deviasi populasi tidak diketahui
– Populasi berdistribusi normal
– Jika populasi tidak normal, gunakan sampel besar
• Gunakan distribusi Student's τ
• Estimasi Confidence Interval

$$\bar{X} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

Contoh 1

Sampel random =25 mempunyai =50 dan =8.
Tentukan estimasi confidence interval 95% untuk μ.

Penyelesaian:

$$\bar{X} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$50 - 2.0639\frac{8}{\sqrt{25}} \le \mu \le 50 + 2.0639\frac{8}{\sqrt{25}}$$

$$46.69 \le \mu \le 53.30$$

Contoh 2

Dalam penilaian mata kuliah statistik diambil 16 nilai mahasiswa dengan rata-rata sampel 8.33 dan standar deviasi 2. Berapa estimasi mean populasi untuk tingkat kepercayaan 95%
Penyelesaian:

$$\overline{X} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$E = t_{15}\frac{S}{\sqrt{n}} = (2.132)\left(\frac{2}{\sqrt{16}}\right) = 1.07$$

$$8.33 - 1.07 \le \mu \le 8.33 + 1.07$$

$$7.26 \le \mu \le 9.40$$

Estimasi Confidence Interval untuk Proporsi
Asumsi:
– Kemunculan dua kategori
– Populasi mengikuti distribusi binomial
– Perkiraan normal dapat digunakan jika np ≥ 5 dan n p (1 – p)≤ 5
– Estimasi Confidence interval:

$$p_S - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_S(1-p_S)}{n}} \le p \le p_S + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_S(1-p_S)}{n}}$$

– Margin Error:

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_s(1-p_s}{n}}$$

Contoh 1

Hasil survey kelas 2 TI adalah sebagai berikut:

- Apakah anda menggunakan internet untuk membeli lagu CD? Ya=4, Tidak=34, Total=38
- Apakah anda menggunakan internet untuk download musik? Ya=32, Tidak=6, Total=38
- Apakah anda menggunakan internet untuk membeli buku? Ya=6, Tidak=32, Total=38

Berapa mean populasi untuk tingkat kepercayaan 95%?
Penyelesaian:

- 95% proporsi mahasiswa yang menggunakan internet untuk membeli CD musik :
  – Data : Ya=4, Tidak=34, Total=38

$$p_S - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_S\left(1-p_S\right)}{n}} \le p \le p_S + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_S\left(1-p_S\right)}{n}}$$

$$E = 1.96\sqrt{\frac{(4/38)(1-4/38)}{38}} = 1.96\sqrt{\frac{0.105(0.895)}{38}} = 0.97$$

$$0.105 - 0.97 \le p \le 0.105 + 0.97$$

$$0.008 \le p \le 0.202$$

- 95% proporsi mahasiswa yang menggunakan internet untuk download musik:
  – Data : Ya=32, Tidak=6, Total=38

$$E = 1.96\sqrt{\frac{(32/38)(1-32/38)}{38}} = 1.96\sqrt{\frac{0.842(0.158)}{38}} = 0.116$$

$$0.84 - 0.116 \le p \le 0.84 + 0.116$$

$$0.726 \le p \le 0.958$$

- 95% proporsi mahasiswa yang menggunakan internet untuk membeli buku :
  – Data : Ya=6, Tidak=32, Total=38

$$E = 1.96\sqrt{\frac{(6/38)(1-6/38)}{38}} = 1.96\sqrt{\frac{0.158(0.842)}{38}} = 0.116$$

$$0.158 - 0.116 \le p \le 0.158 + 0.116$$

$$0.042 \le p \le 0.274$$

Contoh 2

Sampel random dari 400 pemilih menunjukkan 32 pemilih memilih Kandidat A. Tentukan estimasi confidence interval 95% untuk p.

Penyelesaian:

$$p_s - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_s\left(1-p_s\right)}{n}} \le p \le p_s + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_s\left(1-p_s\right)}{n}}$$

$$.08 - 1.96\sqrt{\frac{.08\left(1-.08\right)}{400}} \le p \le .08 + 1.96\sqrt{\frac{.08\left(1-.08\right)}{400}}$$

$$.053 \le p \le .107$$

Menentukan Ukuran Sampel untuk Proporsi
Untuk Menentukan Ukuran Sampel terhadap Proporsi digunakan rumus berikut:

$$n = \frac{Z^2 p(1-p)}{\text{Error}^2}$$

Contoh:

Dari 1000 populasi, dipilih 100 secara random yang rusak. Berapa ukuran sampel yang dibutuhkan untuk confidence 90% dalam ± 5% ?

$$n = \frac{Z^2 p(1-p)}{\text{Error}^2} = \frac{1.645^2(0.3)(0.7)}{0.05^2}$$
$$= 227.3 \cong 228$$

Pendugaan Beda Dua Nilai Tengah
Asumsi: populasi independen, sampel besar

- Bila kita mempunyai dua populasi saling bebas dengan mean $\mu 1$ dan $\mu 2$ serta ragam σ_1^2 dan σ_2^2 maka penduga titik bagi selisih antara $\mu 1$ dan $\mu 2$ adalah $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$. Bila dan adalah nilai tengah sampel acak bebas berukuran n1 dan n2 yang diambil dari populasidengan ragam σ_1^2 dan σ_2^2 diketahui, maka selang kepercayaan 100(1-α)% bagi $\mu 1$-$\mu 2$ adalah

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

- Jika σ_1^2 dan σ_2^2 tidak diketahui, tetapi n1 dan n2 lebih besar dari 30, maka σ_1^2 dan σ_2^2 dapat diganti dengan s_1^2 dan s_2^2 .

Contoh:

Suatu ujian kimia diberikan kepada 50 siswa perempuan dan 75 siswa laki-laki. Siswa perempuan mendapat nilai rata-rata 76 dengan simpangan baku 6, sedangkan siswa laki-laki memperoleh rata-rata 82 dengan simpangan baku 8. Tentukan selang kepercayaan 96% bagi selisih rata-rata nilainya.

Penyelesaian:

Nilai $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 = 82 - 76 = 6$
$s_1 = 8$; $s_2 = 6$
Selang kepercayaan 96% ($\alpha = 4\% = 0{,}04$)
$\alpha/2 = 0{,}02$ ($Z_{0,02} = 2{,}06$)

$$3{,}43 < \mu_1 - \mu_2 < 8{,}57$$

Pendugaan Beda Dua Nilai Tengah
Asumsi: Populasi independen, sampel kecil, ragam sama.

- Adapun penduga selang kepercayaan100(1-α)%bagi μ_1-$\mu_2$untuk sampel kecil; bila $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ tapi nilainya tidak diketahui adalah

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-t_{\alpha/2}s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}<\mu_1-\mu_2<(\bar{x}_1-\bar{x}_2)+t_{\alpha/2}s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

- dengan derajat bebas untuk distribusi t = v = n1 + n2 – 2 dan ragam gabungannya adalah

$$s_p^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

Pendugaan Beda Dua Nilai Tengah
Asumsi: Populasi independen, sampel kecil, ragam beda.

- Selang kepercayaan 100(1-α)% bagi μ1-μ2 untuk sampel kecil; bila bila $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ dan nilainya tidak diketahui:

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}<\mu_1-\mu_2<(\bar{x}_1-\bar{x}_2)+t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$$

- dengan derajat bebas untuk distribusi t adalah:

$$v=\frac{(s_1^2/n_1+s_2^2/n_2)^2}{[(s_1^2/n_1)^2/(n_1-1)]+[(s_2^2/n_2)^2/(n_2-1)]}$$

Pendugaan Beda Dua Nilai Tengah
Asumsi: Berpasangan

Bila kita mempunyai dua populasi yang tidak saling bebas (berpasangan), selang kepercayaan 100(1-α)% bagi μD=μ1-μ2 untuk pengamatan berpasangan tersebut dengan v= n-1adalah

$$s_d^2=\frac{n\sum d_i^2-\left(\sum d_i\right)^2}{n(n-1)}$$

Contoh:

Dua puluh mahasiswa tingkat satu dibagi dalam 10 pasang, tiap pasang diperkirakan mempunyai IQ yang sama. Salah seorang dari tiap pasangan diambil secara acak dan dimasukkan ke kelas khusus, sedangkan anggota pasangan yang lainnya dimasukkan kedalam kelas biasa. Saat akhir semester, keduanya diberikan ujian yang sama dan hasilnya adalah sebagai berikut:

Pasangan	Kelas khusus	Kelas biasa	d
1	76	81	-5
2	60	52	8
3	85	87	-2
4	58	70	-12
5	91	86	5
6	75	77	-2
7	82	90	-8
8	64	63	1
9	79	85	-6
10	88	83	5

Tentukan selang kepercayaan 98% bagi selisih sesungguhnya dalam kedua kelas.

Penyelesaian:

Pengamatan berpasangan, μ_1-μ_2 = μ_D dan nilai μ_D diduga dengan rata-rata d = -1,6. sehingga ragam selisih-selisih tersebut adalah

$$s_d^2 = \frac{n\sum d_i^2 - \left(\sum d_i\right)^2}{n(n-1)} \quad s_d^2 = \frac{(10)(392)-(-16)^2}{(10)(9)} = 40,7$$

μ_D = 6,38.

Selang kepercayaan 98% (α = 2% = 0,02)

$\alpha/2 = 0,01$ ($t_{0,01} = 2,821$ untuk v = n-1 = 9)

$$-1,6 - 2,821\frac{6,38}{\sqrt{10}} < \mu_D < -1,6 + 2,821\frac{6,38}{\sqrt{10}}$$
$$-7,29 < \mu_D < 4,09$$

Selang ini memungkinkan μ_D sama dengan nol, sehingga tidak dapat disimpulkan bahwa kelas yang satu lebih baik daripada kelas lainnya.

Pendugaan Ragam

Bila S^2 adalah ragam contoh acak berukuran n yang ditarik dari suatu populasi normal dengan ragam σ_1^2, maka

$$X^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

Disebut Khi-kuadrat, yang sebaran penarikan contohnya disebut sebaran khi-kuadrat dengan derajat bebas v = n-1.

Bila s2 adalah penduga titik bagi varians sampel acak berukuran n yang diambil dari suatu populasi normal dengan varians σ2, maka selang kepercayaan 100(1-α)% bagi σ2 adalah

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(\alpha/2)}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2)}}$$

$\chi^2_{(\alpha/2)}$ dan $\chi^2_{(1-\alpha/2)}$ adalah nilai-nilai dengan derajat bebas v = n-1.

Contoh:

Volume sepuluh botol berisi air mineral sebesar 46,4; 46,1; 45,8; 47; 46,1; 45,9; 45,8; 46,9; 45,2 dan 46 liter. Buat selang kepercayaan 95% bagi ragam volume botol. Asumsikan data menyebar normal.

Penyelesaian:

Hitung S^2, didapatkan $S^2 = 0{,}286$

Selang kepercayaan 95% (α = 5% = 0,05)

$\alpha/2 = 0{,}025$ ($X^2_{0{,}025;\,10} = 19{,}023$)

$1-\alpha/2 = 0{,}975$ ($X^2_{0{,}975;\,10} = 2{,}700$)

Menggunakan Tabel sebaran khi-kuadrat

$$\frac{(9)(0{,}286)}{19{,}023} < \sigma^2 < \frac{(9)(0{,}286)}{2{,}700}$$

$$0{,}135 < \sigma^2 < 0{,}953$$

Latihan Soal Dan Penyelesaian

1) Interval kepercayaan bagi μ; σ diketahui.

Contoh 1.1

Suatu contoh acak 36 mahasiswa tingkat akhir menghasilkan nilai tengah dan simpang baku nilai mutu rata rata sebesar, berturut turut 2,6 dan 0,3. Buat interval kepercayaan 95% dan 99% bagi nilai tengah mutu rata rata seluruh mahasiswa tingkat akhir.

Jawab:

Nilai dugaan titik bagi μ adalah x = 2,6. Karena ukuran contohnya besar, simpangan baku σ dapat diduga dengan s = 0,3. Nilai z yang luas daerah di sebelah kanannya 0,025. Yang berarti pula luas daerah di sebelah kirinya 0,975 adalah $Z_{0,025}$ = 1,96 . Dengan demikian interval kepercayaan 95 % bagi μ adalah

$$2{,}6 - (1{,}96)\left({}^{0{,}3}/_{\sqrt{36}}\right) < \mu < 2{,}6 + (1{,}96)\left({}^{0{,}3}/_{\sqrt{36}}\right)$$

Yang setelah disederhanakan menghasilkan:

$$2{,}50 < \mu < 2{,}70$$

Untuk memperoleh interval kepercayaan 99%, ditentukan dahulu nilai z yang luas daerah di sebelah kanannya 0,005 dan di sebelah kirinya 0,995. Dengan demikian, diperoleh $Z_{0,005}$ = 2,575 dan interval kepercayaan 99% bagi μ adalah

$$2{,}6 - (2{,}575)\left({}^{0{,}3}/_{\sqrt{36}}\right) < \mu < 2{,}6 + (2{,}575)\left({}^{0{,}3}/_{\sqrt{36}}\right)$$

Disederhanakan menjadi:

$$2{,}47 < \mu < 2{,}73$$

Interval kepercayaan (1 – α) 100% memberikan ukuran sejauh mana ketelitian atau akurasi nilai dugaan titiknya. Bila μ memang pusat interval itu, maka x menduga μ tanpa galat. Tetapi, kecil sekali kemungkinannya x tepat sama dengan μ, sehingga nilai dugaan itu mempunyai galat. Besarnya galat ini sama dengan nilai mutlak selisih atau beda 7 antara μ dan x, dan kita yakin (1 – α) 100% bahwa selisih tersebut tidak akan melebihi $z{}^{\alpha}/_{2}\ \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Dalam contoh soal, kita percaya bahwa 95% b perbedaan niai tengah contoh x = 2,6 dengan dari nilai tengah yang sesungguhnya μ tidak lebih daripada 0,1; dan kita percaya

99% bahwa beda itu tidak lebih daripada 0,13. Seringkali, kita ingin mengetahui berapa besar sebuah contoh harus diambil aga galat dalam menduga μ tidak melebihi suatu nilai tertentu e. Ini berarti kita harus menentukan n sehingga $z\alpha/_2 \frac{1}{\sqrt{n}} = e$.

Contoh 1.2

Seberapa besar contoh harus diambil dalam soal 1 bila kita ingin percaya 95% bahwa nilai dugaan kita tidak menyimpang dari μ lebih daripada 0,05?

Jawab:

simpangan baku contoh s = 0,3 yang diperoleh dari contoh awal berukuran 36 akan digunakan sebagai σ; maka :

$$n = \left[\frac{(1,96)(0,3)}{0,05}\right]^2 = 138,3$$

Jadi, kita percaya 95% bahwa suatu contoh acak berukuran 139 akan menghasilkan nilai dugaan x yang selisihnya dari σ tidak akan melebihi 0,05.

2) Interval kepercayaan bagi μ untuk sampel berukuran kecil; σ tidak diketahui

Contoh 2.1

Isi 7 kaleng asam sulfat adalah 9.8, 10.2, 10.4, 9.8, 10.0, 10.2, 10.4, dan 9.6 liter. Tentukan interval kepercayaan 95% bagi nilai tengah isi semua kaleng demikian ini bila isi kaleng itu menyebar normal!
Jawab:
Nilai tengah dan simpang baku data tersebut adalah:

X= 10,0 dan X= 0,283

Dengan menggunakan tabel, diperoleh $T_{0,25}$ = 2,447 untuk v= 6 derajat bebas. Dengan demikian interval kepercayaan 95% bagi μ adalah :

$$10- (2,447(0,283 / \sqrt{7} < \mu < 10+ \ (2,447(0,283 / \sqrt{7}$$

Yang telah disederhanakan menjadi

$$9,74 < \mu < 10,26$$

3) Interval kepercayaan bagi μ_1-μ_2 dan σ_1^2 dan $\sigma_2^{2,}$ diketahui

Contoh 3.1
Suatu ujian kimia diberikan pada 50 siswa perempuan dan 75 siswa laki-laki. Siswa-siswa perempuan mencapai rata-rata 76 dengan simpangan baku 6, sedangkan siswa-siswa laki-laki memperoleh rata-rata 82 dengan simpangan baku 8. Tentukan interval kepercayaan 96% bagi beda μ1-μ2, dalam hal ini, μ1 adalah nilai tengah skors semua siswa laki-laki, dan μ2 adalah nilai tengah skors semua siswa perempuan yang mungkin

mengambil ujian ini.

Jawab:
Nilai dugaan titik bagi μ1-μ2 adalah x1-x2 = 82-76 = 6. Karena ni dan n2 keduanya cukup besar, maka kita dapat mengganti $_1$ dengan s1=8 dan $_2$ dengan s2=6. Dengan mengambil α=0,064, kita memperoleh dari tabel bahwa $z_{0,02}$=2,05. Dengan demikian subtitusi ke dalam rumus:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - z\alpha/_2\sqrt{\frac{\mu_1^2}{n_1} + \frac{\mu_2^2}{n_2}} < (\mu_1 - \mu_2) < (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + z\alpha/_2\sqrt{\frac{\mu_1^2}{n_1} + \frac{\mu_2^2}{n_2}}$$

Menghasilkan interval kepercayaan 96% nya

$$(6) - 2.05\sqrt{\frac{64}{75} + \frac{36}{50}} < (\mu_1 - \mu_2) < (6) - 2.05\sqrt{\frac{64}{75} + \frac{36}{50}}$$

Atau

$$3.43 < \mu_1 - \mu_2 < 8.57$$

4) Interval kepercayaan bagi μ_1-μ_2 untuk contoh berukuran kecil; σ_1^2 dan σ_2^2 tetapi nilainya tidak diketahui.

Contoh 4.1
suatu pelajaran matematika diberikan pada 12 siswa dengan metode pengjaran yang biasa. Pelajaran yang sama diberikan pula pada 10 siswa tetapi dengan metode pengajan yang menggunakan bahanyang telah diprogramkan. Pada akhir semester setiap kelas dib erikan ujian yang sama. Kelas yang pertama mencappai nilai rata-rata 85 dengan simpangan baku 4, sedangkan kelas kedua mencapai nilai rata-rata dengan simpangan baku 5. Tentukan interval kepercayaan 90% bagi selisih antara kedua nilai tengah populasi bisa diasumsikan kedua populasi menyebar menghampiri normal dengan ragam yang sama.
Jawab:
*M*isalkan $\mu_1$dan μ_2 melambangkan rata-rata nilai semua siswea yang mungkin memeperoleh pelajaran ini dengan metode pengajaran biasa dan yang menggunakan bahan terprogramkan. Kita ingin membuat interval kepercayaan 90% bagi μ_1- μ_2. Nilai dugaan titik bagi μ_1- μ_2 adlah x1-x2= 85-81= 4. Nilai dugaan gbungan = S_t^2 bagi ragam α^2 dalam hal ini adalah

$$S_p^2 = \frac{(11)(16) + (9)25}{12 + 10 - 2} = 20.05$$
$$S_p = \sqrt{20.05} = 4.478$$

Dengan mengakarkan diperoleh S_p = 4,478. Dengan menggunakan α=0,1, bahwa $t_{0.05}$ =1,725 untuk v= ni+n2-2= 20 derajat bebas. Oleh karena itu interval kepercayaan 90% bagi μ_1-μ_2 adalah

$$(85-81)-1.725x4.478\sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{10}\right)}<(\mu_1-\mu_2)$$
$$<\ (85-81)-1.725x4.478\sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{10}\right)}$$
$$(4)-1.725x4.478\sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{10}\right)}<(\mu_1-\mu_2)<\ (4)-1.725x4.478\sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{10}\right)}$$

Yang disederhanakan menjadi

$$0.69< \mu_1\text{-}\mu_2<7,31$$

Jadi kita percaya 90% interval dari 0,69 samapai 7,31 mencakup selisih sesungguhnya nila rata-rata pelajaran matematika untuk kedua metode pengajaran tersebut. Kenyataan bahwa kedua ujung interval itu positif menunjukan metode pengajaran biasa untuk pengajaran matematika ini lebih unggul dari pada metode pengajaran dengan menggunakan bahan terprogramkan.

Contoh 4.2

Catatan selama 15 tahun terkhir menunjukan bahwa curah hujan rata-rata disuatu daerah selama bulan mei adalah 4,93 cm, dengan simpangan baku 1,14 cm. didaerah lain, catatan serupa selama 10 yahun terakhir menunjukan bahwa curah hujan rata-rata dibulai mei adalah 2,64 cm dengan simpangan baku 00,66 cm. tentukan interval kepercayaan 955 bagi selisih curah hujan rata-rata yang sebenarnya selama bylai mei dikedua daerah tersebut bila diasumsikan bahwa pengamatan-pengamatan itu beasal dari 2 populasi normal dengan ragam yang berbeda.

Jawab:

Untuk daerah pertama kita mempunyai x1= 4,93, S_1 = 1,14 dan, n1= 15; sedangkan untuk daerah yang kedua x2 = 2,64, S_2= 0,66 dan n2 = 10. Kita ingin meendapatkan interval kepercayaan 95% bagi 1-2. Karena kedua ragam populasi dan ukuran contohnya tidak sama, mka kita hanya dapat memperoleh hampian bagi interval keprcayaan 95% yang didasarkan pada sebaran t dengan

$$v=\frac{\left(1.14^2/_{15}\right)+\left(0.66^2/_{10}\right)}{\left[\left(1.14^2/_{15}\right)/_{(14)}\right]+\left[\left(0.66^2/_{10}\right)/_{(9)}\right]}=22.7\approx 23$$

Derajat bebas Nilai dugaan. Bagi 1-2 adalah x1-x2 = 4,93 – 2,64 = 2,29. Dngan mengambil α= 0,05, bahwa $t_{0,025}$ = 2.069 untuk v = 23 derajat bebas. Dengan demikian interval kepercayaan 95% bagi μ_1-μ_2

$$(4.93-2.64)-2.069\sqrt{\left(\frac{1.14^2}{15}\right)+\left(\frac{0.66^2}{10}\right)}<(\sigma_1-\sigma_2)$$
$$<(4.93-2.64)-2.069\sqrt{\left(\frac{1.14^2}{15}\right)+\left(\frac{0.66^2}{10}\right)}$$

Disederhanakan menjadi

$$1.54 < \mu_1 - \mu_2 < 3.04$$

Dengan demikian kita percaya 95% selisih curah hujan rata-rata yang sebenarnya selama bulai mei dikedua daerah tersebut berada dalam interval dari 1,54-3,04cm.

5) Interval kepercayaan bagi μ_1 - μ_2 = μ_D untuk pengamatan berpasangan.

Contoh 5.1

Dua puluh mahasiswa tingkat satu dibagi kedalam 10 pasang, setiap pasangan kira-kira mempunyai IQ yang sama. Salah seorang dari setiap pasangan diambil secara acak dan dimasukkan kedalam kelas yang hanya menggunakan bahan terpogramkan. Anggota pasangan yang lain dimasukkan kedalam kelas biasa. Pada akhir semester kedua grup itu diberikan ujian yang sama dan hasilnya adalah sebagai berikut.

Pasangan	Bahan Terprogram	Kelas Biasa	D
1	76	81	-5
2	60	52	8
3	85	87	-2
4	58	70	-12
5	91	86	5
6	75	77	-2
7	82	90	-8
8	64	63	1
9	79	85	-6
10	88	83	5

Tentukan interval kepercayaan 98% bagi selisih sesungguhnya dalam kedua metode pengajaran tersebut.

Jawab:

Kita ingin mendapatkan interval kepercayaan 98% bagi μ_1 - μ_2 sedangkan μ_1 dan μ_2 adalah nilai rata-rta semua siswa yang mungkin mengikuti kuliah dengan bahan terpogramkan dan kuliah biasa. Karena pengamatannya berpasangan μ_1 - μ_2 = μ_D dan nilai dugaan titik bagi μ_D diberikan oleh $\bar{d}$ = 1,6. Ragam selisih-selisih tersebut adalah

$$S_d^2 = \frac{n\sum d_1^2 - (\sum d_1)^2}{n(n-1)} = \frac{10(392) - (-16)^2}{10(9)} = 40.7$$

Dengan mengakarkannya diperoleh s_d = 6,38. Untuk α = 0,02, dari tabel diperoleh bahwa $t_{0,01}$ = 2,821 untuk v = n-1 = 9 derajat bebas. Dengan demikian interval kepercayaan 98% bagi μ_D adalah

$$-1.6 - 2.821\frac{6.38}{\sqrt{10}} < \mu_D < -1.6 + 2.821\frac{6.38}{\sqrt{10}}$$

Yang setelah disederhanakan menjadi

$$-7.29 < \mu_D < 4.09$$

Dengan demikian percaya 98% bahwa interval dari -7,29 sampai 4,09 mencakup selisih nilai rata-rata yang sebenarnya bagi kedua metode pengajaran tersebut. Karena interval ini memungkinkan μ_D sama dengan nol, maka tidak dapat menyimpulkan bahwa metode pengajaran yang satu lebih baik daripada metode pengajaran lainnya, meskipun untuk contoh yang diperoleh ini metode pengajaran biasa menunjukkan hasil yang lebih baik.

Latihan Soal

1) 144 karyawan perusahaan yang dipilih secara acak ditanya mengenai besarnya pengeluaran per hari untuk biaya hidup. Ternyata rata – rata pengeluaran sebesar Rp. 20.000,- dengan simpangan baku yang diketahui sebesar Rp. 6.000,-. Hitunglah :
   a. Pendugaan interval rata – rata pengeluaran dengan tk keyakinan 99%
   b. Pendugaan interval rata – rata pengeluaran dengan tk keyakinan 90%
   c. Interpretasikan hasil yang didapat

2) Suatu biro riset ingin mengestimasi rata – rata pengeluaran untuk pembelian bahan makanan per minggu dari ibu – ibu rumah tangga. Sebuah sampel random yang terdiri atas 100 ibu rumah tangga telah dipilih dari populasi ibu rumah tangga. Dari 100 sampel dikethaui bhawa rata – rata pengeluarannya adalah Rp. 9.600,- dengan deviasi standar Rp. 160,-. Hitunglah interval keyakinan 98 % dari kasus tersebut!

3) Selama pengamatan triwulan pertama 2003, standar deviasi dari suku bunga deposito untuk waktu 12 bulan adalah 0,73%. Untuk melihat lebih lanjut dari pergerakan suku bunga, maka diambil sampel 60 bank dari 138 bank yang ada. Hasilnya, ternyata rata – rata suku bunga bank pada 60 bank adalah 7,72%. Buatlah selang kepercayaan untuk rata – rata populasi dengan tingkat kepercayaan 95%!

4) Kebijakan PLN untuk menaikkan tarif 15% pertahun mengakibatkan dampak pada industri kecil dan menengah. Lembaga pengkajian CESS melakukan jajak pendapat mengenai dampak tersebut. Responden yang ditanyai ada 25 orang dari 930 orang anggota UKM yang dibina oleh CESS. Hasil kajian menunjukkan biaya produksi rata – rata meningkat 20%. Apabila standar deviasinya sebesar 8%, buatlah interval dugaannya dengan keyakinan sebesar 99%!

5) Seorang manajer bank ingin menentukan rata-rata deposito bulanan per nasabah di bank tersebut. Untuk mengestimasinya menggunakan tingkat kepercayaan (confidence interval). Berapa ukuran sampel yang harus diambil bila ia ingin yakin 99% dan kesalahannya tidak lebih dari 200 juta rupiah. Diasumsikan standar deviasi untuk deposito bulanan semua nasabah adalah 1 milyar rupiah.

6) Seseorang ingin menyelidiki berapa proporsi sekretaris di seluruh perkantoran di Surabaya yang dilengkapi dengan komputer di ruang kerjanya. Ia akan menjawab pertanyaan ini dengan melakukan survey acak. Berapa ukuran sampel yang harus diambil apabila ia ingin yakin 95% dan error tidak lebih dari 0.05? Anggap bahwa proporsi aktual tidak diketahui sebelumnya (asumsi p=0.5)

Referensi

Bluman, Allan G., Elementary Statistics: a step-by-step approach, 8th ed, McGraw-Hill, New York, 2009.

Walpole, Ronald B., Myers, Raymond H., Myers, Sharon L., Ye, Keying, Probability & Statistics for Engineers and Scientist, 9th ed, Prentice Hall Int., New Jersey, 2012.

Weiers, R.M., 2011, Introduction to Business Statistics, Cengage Learning, OH, 2008.