TURUNAN TRIGONOMETRI

Tujuan Instruksional Umum :

1. Mahasiswa mampu memahami teori dan konsep turunan
2. Mahasiswa mampu memahami hukum-hukum pada turunan
3. Mahasiswa mampu memahami jenis-jenis turunan
4. Mahasiswa mampu memahami operasi yang berlaku

Tujuan Instruksional Khusus :

1. Mahasiswa mengetahui dan mampu menggunakan dengan jelas teori dan konsep turunan
2. Mahasiswa mengetahui dengan jelas rumus-rumus yang berlaku di turunan
3. Mahasiswa mengetahui dengan jelas jenis-jenis turunan
4. Mahasiswa mampu menghitung operasi yang berlaku pada turunan

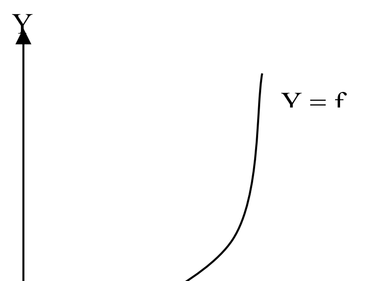
1. PENDAHULUAN

Yang dimaksud dengan Teori Diferensial yaitu teori yang membahas mengenai adanya perubahan variabel terikat akibat perubahan variabel bebasnya, dimana perubahan variabel bebas tersebut tergolong perubahan yang sangat kecil.

2. KUOSIEN DIFERENCE

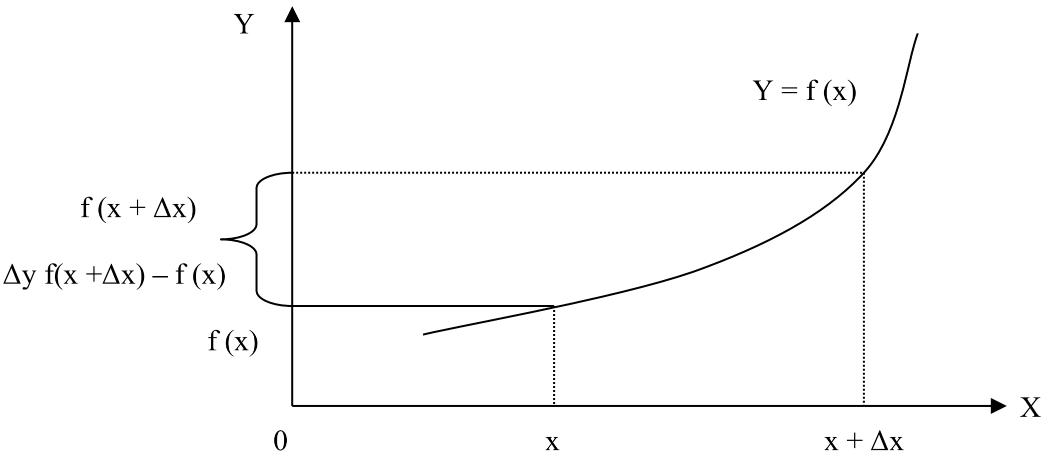
Misalkan ada fungsi y = f (x) dimana y merupakan variabel terikatnya dan x adalah variabel bebasnya. Penggambaran pada grafik :

Gambar :



Variabel bebas x bergerak (misalkan bergerak ke kanan di sepanjang sumbu datar) sebanyak Δx mengakibatkan dicapai titik yang baru yaitu x + Δx. Perubahan variabel bebas tersebut mempengaruhi variabel terikatnya (y) sehingga y berpindah tempat dari f (x) menjadi f (x + Δx). Besarnya perubahan y itu disebut “beda” atau difference.

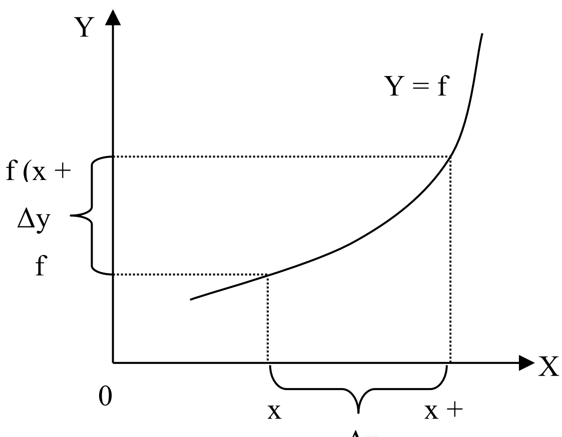
Penggambarannya :



Perbandingan antara perubahan y (Δy) terhadap perubahan x (Δx) disebut kuosien difference dan hitung :

Kuosien Difference = $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-(x)}{\Delta x}$

Penggambarannya :



Contoh :

1. Diberikan fungsi sebagai berikut $y = 2x$

   Carilah beda / difference nya serta kuosien difference nya !

   Jawab :

   Beda / difference : $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

   $= 2(x + \Delta x) - 2x$

   $= 2x + 2\Delta x - 2x$

   $= 2\Delta x$

   Kuosien Difference :

   $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\Delta x}{\Delta x}$$

   $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$$

   Artinya setiap penambahan x sebanyak 1 satuan akan menyebabkan penambahan y sebanyak 2 satuan, sebaliknya setiap pengurangan x sebanyak 1 satuan akan menyebabkan pengurangan y sebanyak 2 satuan.

2. Diberikan fungsi sebagai berikut $y = 2x - 3$

   Carilah beda / difference nya serta kuosien difference nya !

   Jawab :

   Beda / difference : $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

   $= \{2(x + \Delta x) - 3\} - \{2x - 3\}$

   $= 2x + 2\Delta x - 3 - 2x + 3$

   $= 2\Delta x$

   Kuosien Difference :

   $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\Delta x}{\Delta x}$$

   $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$$

Artinya setiap penambahan x sebanyak 1 satuan akan menyebabkan penambahan y sebanyak 2 satuan, sebaliknya setiap pengurangan x sebanyak 1 satuan akan menyebabkan pengurangan y sebanyak 2 satuan.

3. Diberikan fungsi sebagai berikut $y = 2x^2$

   Carilah beda / difference nya serta kuosien difference nya !

   Jawab :

   Beda / difference : Δy $= f(x + \Delta x) - f(x)$

   $= \{2(x + \Delta x)^2 - \{2x^2\}$

   $= 2(x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2) - 2x^2$

   $= 4\,\Delta x\,\Delta x + a\,\Delta x_2$

   Kuosien Difference : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4\Delta x + 2\Delta x^2}{\Delta x}$

   $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x\Delta x$$

   Artinya setiap penambahan x sebanyak 1 satuan akan menyebabkan penambahan y sebanyak $4x\Delta x$ satuan, sebaliknya setiap pengurangan x sebanyak 1 satuan akan menyebabkan pengurangan y sebanyak $4x\Delta x$ satuan.

4. Diberikan fungsi sebagai berikut $y = 2x^2 - 3$

   Carilah beda / difference nya serta kuosien difference nya !

   Jawab :

   Beda / difference : Δy $= f(x + \Delta x) - f(x)$

   $= \{2(x + \Delta x)^2 - 3\} - \{2x^2 - 3\}$

   $= \{2(x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2) - 3\} - \{2x^2 - 3\}$

   $= 2x^2 + 4x\,\Delta x + 2\,\Delta x^2 - 3 - 2x^2 + 3$

   $= 4x\,\Delta x + 2\Delta x^2$

   Kuosien Difference : Δy $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4\Delta x + 2\Delta x^2}{\Delta x}$

   $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 2\Delta x$$

   Artinya setiap penambahan x sebanyak 1 satuan akan menyebabkan penambahan y sebanyak $4x + 2\Delta x$ satuan, sebaliknya setiap pengurangan x sebanyak 1 satuan akan menyebabkan pengurangan y sebanyak 4x + 2Δx satuan.

3. DIFFERENSIASI

Proses differensiasi yaitu proses pengenaan Limit $\Delta x \rightarrow 0$ terhadap kuosien difference. Hasil tersebut dinamakan differensial atau turunan.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{Limit}}{\Delta x \rightarrow 0} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Contoh :

1. Diberikan fungsi sebagai berikut : y = 2x karena telah diketahui bahwa Kuosien Difference-nya $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$

   Maka $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2$

   $\frac{dy}{dx} = 2$

2. Diberikan fungsi sebagai berikut : y = 2x- 3 karena telah diketahui bahwa Kuosien Difference-nya $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$

   Maka $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2$

   $\frac{dy}{dx} = 2$

3. Diberikan fungsi sebagai berikut : y = $2x^2$ karena telah diketahui bahwa Kuosien Difference-nya $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 2\Delta x$

   Maka $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 4x + 2\Delta x$

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 3$$

4. Diberikan fungsi sebagai berikut : $y = 2x^2 - 3$ karena telah diketahui bahwa Kuosien Difference-nya $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 2\Delta x$

   Maka $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} 4x + 2\Delta x$

   $\frac{dy}{dx} = 4x$

5. Diberikan fungsi sebagai berikut : $y = 2x^2 - 3x$ karena telah diketahui bahwa Kuosien Difference-nya $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 2\Delta x - 3$

   Maka $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} 4x + 2\Delta x - 3$

   $\frac{dy}{dx} = 4x - 3$

4. KAIDAH-KAIDAH TURUNAN

a. Turunan konstanta

   1. Misalkan y = k, dimana k konstanta,
   2. Maka dy / dx = 0
   3. Contoh : y = 2, maka dy / dx = 0

b. Turunan fungsi pangkat

   1. Misalkan $y = x^n$, n = konstanta dan x variabel
   2. Maka $dy / dx = nx^{n-1}$
   3. Contoh : $y = x^7$, maka $dy / dx = 7x^{7-1} = 7x^6$

c. Turunan perkalian konstanta dengan fungsi

   1. Misalkan $y = kx^n$, dimana k dan n konstanta dan x variabel
   2. Maka $dy / dx = k * nx^{n-1}$
   3. Contoh : $y = (13x^4$, maka $dy / dx = 13 (4x^{4-1}) = 52x^3$

d. Turunan fungsi berpangkat

1. Misalkan $y = U^n$, dimana U = g(x) dan n konstanta
2. Maka $dy / dx = n\ U^{n-1}\ dU/dx$
3. Contoh : $y = (x^2-3x)^7$, maka $dy / dx = 7\ (x^2-3x)^6 .\ (2x-3)$

e. Turunan fungsi rantai

a. Misalkan y = U + V, dimana U = g (x) dan V = h (x)

b. Maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dx}$ atau $\frac{dy}{dx} = U' + V'$

1.

c. Contoh : $y = 12x^5 - 9x^3$, maka $\frac{dy}{dx} = (12.5.x^{5-1}) - (9.3x^{3-1})$

$= 60x^4 - 27x^2$

f. Turunan perkalian fungsi

a. Misalkan y = U . V, dimana U = g (x) dan V = h (x)

b. Maka dy / dx = (dU/dx) . V + U . (dV/dx)

c. Contoh : $y = 3x^2\ (x-2)^5$ dengan $U = 3x^2$, maka dU/dx = 6x

dan $V = (x-2)^5$, maka $dV/dx = 5\ .\ (x-2)^{5-1}\ 1 = 5\ .\ (x-2)^4$

d. Sehingga $dy/dx = 6x\ (x-2)^5 + 3x^2\ (5\ (x-2)^4 = 6x\ (x-2) + 15x^2\ (x-2)^4$

g. Turunan fungsi eksponensial

a. Misalkan y = U/V, dimana U = g (x) V = h (x) dan V^1 0

b. Maka :

c. $$\frac{dY}{dx} = \frac{\left(\frac{dU}{x}\right) V - U \left(\frac{dV}{dx}\right)}{V^2}$$

d. Contoh : $y = \frac{5x^2 - 4x}{2 - x}$ dengan $U = 5x^2 - 4x$, maka dU/dx = 10x-4

dan V = 2 – x, maka dV/dx = -1

Maka :

$$\frac{dY}{dx} = \frac{(10x-4)(2-x) - (5x^2-4x)(-1)}{(2-x)^2}$$

$$\frac{dY}{dx} = \frac{20x - 10x^2 - 8 + 4x + 5x^2 - 4x}{4 - 2x + x^2}$$

$$\frac{dY}{dx} = \frac{-5x^2 + 20x - 8}{4 - 2x + x^2}$$

h. Turunan fungsi eksponensial

1. Misalkan $y = e^x$, maka $dy/dx = e^x$
2. Misalkan $y = a^x$, maka $dy/dx = a^x$ $\ln^a$

i. Turunan fungsi komposit - eksponensial

1. Misalkan $y = e^u$, dimana U = f (x), maka $dy/dx = e^u . (dU/dx)$

   Contoh : $y = e^{2x}$, dimana U = 2x, dimana $dy/dx = e^{2x} . 2 = 2e^{2x}$

2. Misalkan $y = a^u$, dimana U = f (x), maka $dy/dx = a^u \ln a\ (dU/dx)$

   Contoh $y = 8^{2x}$, dimana u = 2x, maka $dy/dx = 8^{2x} \ln 8.\ 2$

5. JENIS-JENIS DIFERENSIAL

1. Diferensial Biasa

   Yaitu diferensial yang dilakukan terhadap fungsi yang mengandung tepat satu variabel. Fungsinya : y = f(x), dimana jumlahnya satu dan x merupakan variabel. Turunan pertama : dy/dx, turunan keduanya : dy^2 / dx^2

   Contoh :

   a) $y = 8x^3 – e^{2x} + 24$

      Maka turunan pertamanya : $dy/dx = 8.3 . x^{3-1} – e^{2x} . 2 + 0 = 24 x^2 – 2e^{2x}$

      Turunan keduanya : $dy^2 / (dx)^2 = 24 . 2 . x^{2-1} – 2 . e^{2x} . 2 = 48x – 4e^{2x}$

   b) Fungsi Average Revenue / Pendapatan Rata-rata : $AR = 150 - 6Q^2$: output yang dijual, maka turunan pertamanya : dAR/dQ = 150 – 6 . 2Q

      = 150 – 12Q

   Turunan keduanya : $dAR^2 / (dQ)^2 = -12$

   c) Fungsi Permintaan : Qd = 80 – 25P, P : harga jual produk

Maka turunan pertamanya : dQd / dP = -25

Turunan keduanya : $dQd^2 / (dP)^2 = 0$

2. Diferensial Berantai

Yaitu diferensial yang dilakukan terhadap fungsi yang merupakan fungsi dari uatu variabel. Fungsinya : y = f (x), dimana x jumlahnya satu dan x merupakan fungsi (misalkan x fungsi dari h); x = g (h), dimana h jumlahnya satu dan h merupakan variabel.

Turunannya : y = diturunkan terhadap x, ditulis dy / dx dan

x = diturunkan terhadap h, ditulis dx / dh

Untuk mencari turunan y terhadap h dapat dilakukan dengan cara mengalihkan kedua turunan tersebut : dy / dh = (dy/dx). (dx / dh).

Contoh :

a. $y = 2x^3$, $x = 3h^2$, maka dy/dx $= 6x^2 . 6h$

$= 6 (3h^2)^2. 6h$

$= 108 h^5$

b. Fungsi Revenue / Pendapatan ; R = 3Q dimana $Q = 0,4\ C^2 – 3C$, C : Capital maka turunan pertamanya : dR/dQ = 3 dan dQ/dC =0,4 C – 3

Untuk mencari turunan R terhadap C diperoleh melalui direfensial berantai :

dR/dC = dR/dQ. dQ/dC

= 3 . (0,4 C-3)

= 1,2 C - 9

RUMUS DASAR TURUNAN TRIGONOMETRI

Turunan Trigonometri

$$(\sin x)' = cosx$$
$$(\cos x)' = -sinx$$
$$(\tan x)' = sec^2x$$
$$(\cot x)' = -csc^2x$$
$$(\sec x)' = secxtanx$$
$$(\csc x)' = -cscxcotx$$

Rumus Lanjutan

$f(x) = \sin u \rightarrow f'(x) = \cos u \cdot u'$

$f(x) = \cos u \rightarrow f'(x) = -\sin u \cdot u'$

$f(x) = \tan u \rightarrow f'(x) = \sec^2 u \cdot u'$

$f(x) = \cot u \rightarrow f'(x) = -\csc^2 u \cdot u'$

$f(x) = \sec u \rightarrow f'(x) = \sec u \tan u \cdot u'$

$f(x) = \csc u \rightarrow f'(x) = -\csc u \cot u \cdot u'$

Contoh Soal

Soal Nomor 1

Turunkan fungsi berikut:

y = 5 sin x

Pembahasan

y = 5 sin x
y' = 5 cos x

Soal Nomor 2

Diberikan fungsi f(x) = 3 cos x

Pembahasan

Perhatikan rumus turunan untuk fungsi trigonometri berikut ini:

$$
\begin{aligned}
&y = \sin x \rightarrow \ y' = \cos x \\
&y = \cos x \rightarrow \ y' = -\sin x \\
&y = \tan x \rightarrow \ y' = \sec^2 x \\
&y = \operatorname{cosec} x \rightarrow \ y' = -\operatorname{cosec} x \ \cot x \\
&y = \sec x \rightarrow \ y' = \sec x \tan x \\
&y = \cot x \rightarrow \ y' = -\operatorname{cosec}^2 x
\end{aligned}
$$

MSC

$f(x) = 3 \cos x$
$f'(x) = 3 (-\sin x)$
$f'(x) = -3 \sin x$

Untuk $x = \pi/2$ diperoleh nilai $f'(x)$
$f'(\pi/2) = -3 \sin (\pi/2) = -3 (1) = -3$

Soal Nomor 3
Tentukan turunan pertama dari $y = -4 \sin x$

Pembahasan
$y = -4 \sin x$
$y' = -4 \cos x$

Soal Nomor 4
Diberikan $y = -2 \cos x$. Tentukan y'

Pembahasan
$y = -2 \cos x$
$y' = -2 (-\sin x)$
$y' = 2 \sin x$

Soal Nomor 5
Tentukan y' dari $y = 4 \sin x + 5 \cos x$

Pembahasan
$y = 4 \sin x + 5 \cos x$
$y' = 4 (\cos x) + 5 (-\sin x)$
$y' = 4 \cos x - 5 \sin x$

Soal Nomor 5

Tentukan y' dari $y = 4 \sin x + 5 \cos x$

Pembahasan

$y = 4 \sin x + 5 \cos x$
$y' = 4 (\cos x) + 5 (-\sin x)$
$y' = 4 \cos x - 5 \sin x$

Soal Nomor 6

Tentukan turunan dari
$y = 5 \cos x - 3 \sin x$

Pembahasan

$y = 5 \cos x - 3 \sin x$
$y' = 5 (-\sin x) - 3 (\cos x)$
$y' = -5 \sin x - \cos x$

Soal Nomor 7

Tentukan turunan dari:
$y = \sin (2x + 5)$

Pembahasan

Dengan aplikasi turunan berantai maka untuk
$y = \sin (2x + 5)$
$y' = \cos (2x + 5) \cdot 2$
$\uparrow$
Angka 2 diperoleh dari menurunkan $2x + 5$
$y' = 2 \cos (2x + 5)$

Rumus Trigonometri

Fungsi dasar:

$$sinA = \frac{a}{c}$$

$$cosA = \frac{b}{c}$$

$$tanA = \frac{sinA}{cosA} = \frac{a}{b}$$

$$cotA = \frac{1}{tanA} = \frac{cosA}{sinA} = \frac{b}{a}$$

$$secA = \frac{1}{cosA} = \frac{c}{b}$$

$$cscA = \frac{1}{sinA} = \frac{c}{a}$$

Identitas trigonometri [sunting | sunting sumber]

$$sin^2 A + cos^2 A = 1$$

$$1 + tan^2 A = \frac{1}{cos^2 A} = sec^2 A$$

$$1 + cot^2 A = \frac{1}{sin^2 A} = csc^2 A$$

Rumus jumlah dan selisih sudut

$$sin(A+B) = sinAcosB + cosAsinB$$

$$sin(A-B) = sinAcosB - cosAsinB$$

$$cos(A+B) = cosAcosB - sinAsinB$$

$$cos(A-B) = cosAcosB + sinAsinB$$

$$tan(A+B) = \frac{tanA + tanB}{1 - tanAtanB}$$

$$tan(A-B) = \frac{tanA - tanB}{1 + tanAtanB}$$

Rumus perkalian trigonometri [suntir

$$2sinAcosB = sin(A+B) + sin(A-B)$$

$$2cosAsinB = sin(A+B) - sin(A-B)$$

$$2cosAcosB = cos(A+B) + cos(A-B)$$

$$2sinAsinB = -cos(A+B) + cos(A-B)$$

Rumus jumlah dan selisih trigonometri

$$sinA + sinB = 2sin\frac{1}{2}(A+B)cos\frac{1}{2}(A-B)$$

$$sinA - sinB = 2cos\frac{1}{2}(A+B)sin\frac{1}{2}(A-B)$$

$$cosA + cosB = 2cos\frac{1}{2}(A+B)cos\frac{1}{2}(A-B)$$

$$cosA - cosB = -2sin\frac{1}{2}(A+B)sin\frac{1}{2}(A-B)$$

Rumus sudut rangkap dua [sunting | sunting sumber]

$$sin2A = 2sinAcosA$$

$$cos2A = cos^2A - sin^2A = 1 - 2sin^2A = 2cos^2A - 1$$

$$tan2A = \frac{2tanA}{1 - tan^2A} = \frac{2cotA}{cot^2A - 1} = \frac{2}{cotA - tanA}$$

Rumus sudut rangkap tiga

$$sin3A = 3sinA - 4sin^3A$$

$$cos3A = 4cos^3A - 3cosA$$

$$tan3A = \frac{3tanA - tan^3A}{1 - 3tan^2A}$$

Rumus setengah sudut [sunting | sunting sumber]

$$sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cosA}{2}}$$

$$cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + cosA}{2}}$$

$$tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cosA}{1 + cosA}} = \frac{sinA}{1 + cosA} = \frac{1 - cosA}{sinA}$$