S1- MATEMATIKA

MODUL 6

- ☑ **TURUNAN FUNGSI (DERIVATIVES OR DIFFERENTIATIONS)**

- ☑ **LANJUTAN TURUNAN FUNGSI (DERIVATIVE OR DIFFERENTIATION) :**
  PARTIAL DERIVATIVE, TOTAL DIFFERENTIAL, TOTAL DERIVATIVE

TURUNAN (DERIVATIVES) DARI FUNGSI DENGAN LEBIH DARI 1 (SATU) INDEPENDENT VARIABLE : PARTIAL DERIVATIVES, TOTAL DIFFERENTIALS, TOTAL DERIVATIVES

1 Fungsi dua peubah atau lebih

Fungsi dua peubah atau lebih dapat ditulis dalam bentuk eksplisit atau implisit. Jika fungsi dua peubah dinyatakan dalam bentuk eksplisit, maka penulisannya secara umum dinyatakan dalam bentuk z = F(x,y). Sebaliknya jika fungsi dua peubah dinyatakan dalam bentuk implisit, maka penulisannya dinyatakan dalam bentuk F(x,y,z) = 0.

Contoh:

1. z = 2x + y
2. z = ln $\left|x^2 - 2y^4\right|$
3. z = 1 – 2 $\sqrt{\dfrac{1}{2\sin x - \sin y}}$
4. xy + xz – yz = 0
5. xy - $e^{x}\sin y$ = 0
6. ln $\left|x^2 - y^2\right| - \arctan\dfrac{y}{x}$ = 0
7. arc tan $\dfrac{y}{x}$ - 2z = 0

Pada contoh di atas, fungsi yang ditulis dalam bentuk eksplisit adalah pada contoh 1,2, dan 3. Sedangkan contoh 4, 5, 6, dan 7 adalah fungsi yang ditulis dalam bentuk implisit. Semua fungsi dalam bentuk eksplisit dengan mudah dapat dinyatakan dalam bentuk implisit. Akan tetapi tidak semua fungsi dalam bentuk implisit dapat dinyatakan dalam bentuk eksplisit.

Untuk menggambar fungsi dua peubah dapat dengan membuat sumbu-sumbu koordinat, yaitu sumbu x, sumbu y, dan sumbu z, sehingga pada sumbu tersebut membentuk ruang dan masing-masing ruang disebut oktan .

Oktan I adalah ruang dengan x>0, y>, dan z>0

Oktan II adalah ruang dengan x>0, y<0, dan z>0

Oktan III adalah ruang denganx<0, y<0, dan z>0

Oktan IV adalah ruang dengan x<0, y>0, dan z>0

Oktan V adalah ruang dengan x>0, y>, dan z<0

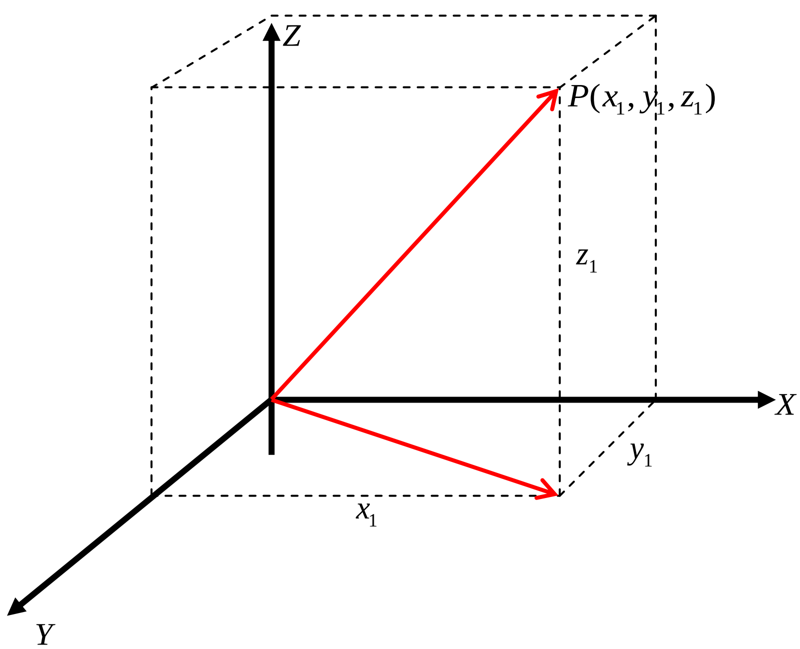
Oktan VI adalah ruang dengan x>0, y<0, dan z<0

Oktan VII adalah ruang denganx<0, y<0, dan z<0

Oktan VIII adalah ruang dengan x<0, y>0, dan z<0

Berdasarkan oktan-oktan tersebut, dapat digambarkan sebarang titik $P(x_1, y_1, z_1)$ atau kurva ruang dengan persamaan z =F(x,y)

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 1. Kurva di ruang 3 dimensi

Pada gambar 1 di atas P(x_1,y_1,z_1) adalah sebarang titik pada oktan I, dengan menggunakan kaidah dan teorema Pythagoras dapat ditentukan panjang OP sebagai

OP = $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

Dengan cara yang sama, jika P(x_1,y_1,z_1) dan Q(x_2,y_2,z_2) maka panjang PQ dinyatakan dengan PQ = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Selanjutnya, misal z = F(x,y) maka dapat ditentukan gambar kurva ruang.

Contoh

Dalam ruang dimensi tiga (R^3) gambarlah kurva ruang z = 12 – 3x –4y

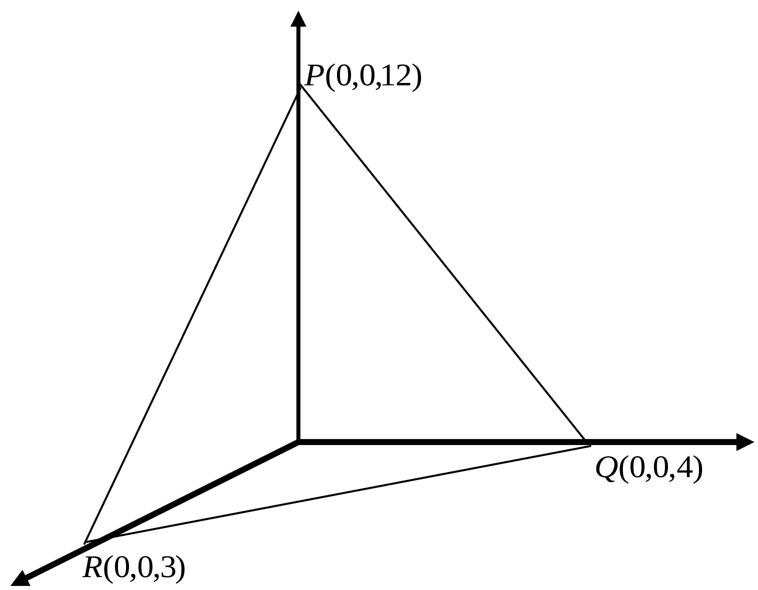
Untuk menggambar kurva ruang dengan persamaan z =F(x,y) langkah yang ditempuh adalah menentukan titik potong kurva dengan masing-masing sumbu.

Jika x = 0 dan y = 0 maka z = 12, hal ini berarti kurva ruang memotong sumbu z di titik (0,0.12)

Jika y = 0, z = 0 maka x = 4, hal ini berarti kurva ruang memotong sumbu x dititik (4,0,0).

Jika x = 0, z = 0 maka y = 3, hal ini berarti kurva ruang memotong sumbu y dititik (0,3,0).

Sehingga diperoleh:



Gambar tampak di atas, adalah kurva ruang di oktan I. Kurva ruang di oktan yang lain dibayangkan sebagai ruang maya.

Sebagai latihan bagi pembaca, gambarlah kurva ruang dengan persamaan:

1) $z = 1 - x^2 - y^2$
2) $z = 1 - y$
3) $z = 2 - x$
4) $3z + 3y + 4z = 36$
5) $z = 1 - x^2$
6) $z = 4 - y^2$

2 Turunan Parsial Fungsi Dua atau lebih

Misal $z = F(x,y)$ adalah fungsi dengan variable bebas x dan y. Karena x dan y variable bebas maka terdapat beberapa kemungkinan yaitu:

1. y dianggap tetap, sedangkan x berubah-ubah.

2. x dianggap tetap, sedangkan y berubah-ubah
3. x dan y berubah bersama-sama sekaligus.

Pada kasus 1 dan 2 diatas mengakibatkan fungsinya menjadi fungsi satu peubah, sehingga fungsi tersebut dapat diturunkan dengan menggunakan definisi turunan pertama yang telah dipelajari pada kalkulus diferensial.

Definisi

Misal z = F(x,y) adalah fungsi dua peubah yang terdefinisi pada interval tertentu, turunan parsial pertama z terhadap x dan y dinotasikan dengan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ dan didefinisikan oleh

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x, y) - F(x,y)}{\Delta x}$$

dan

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(x, y+\Delta y) - F(x,y)}{\Delta y}$$

Asalkan limitnya ada.

Contoh :

Tentukan turunan parsial pertama dari

a. z = $\sqrt{x^2 + y^2}$

Jawab

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x, y) - F(x,y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x+\Delta x)^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x+\Delta x)^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{(x+\Delta x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(x+\Delta x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 + y^2 - (x^2 + y^2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x\sqrt{(x+\Delta x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x + \Delta x}{\sqrt{(x+\Delta x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(x, y+\Delta y) - F(x, y)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x^2 + (y+\Delta y)^2} - \sqrt{x^2 + y^2}}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x^2 + (y+\Delta y)^2} - \sqrt{x^2 + y^2}}{\Delta y} \cdot \frac{\sqrt{(x^2 + (y+\Delta x)^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(x^2 + (y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 + y^2 - (x^2 + y^2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x\sqrt{(x+\Delta x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x + \Delta x}{\sqrt{(x+\Delta x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

b. z = Sin (x+y)

Jawab

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x, y) - F(x,y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x + y) - \sin(x+y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\frac{1}{2}(x+\Delta x + y + x + y)\sin\frac{1}{2}(x+\Delta x + y - x - y)}{\Delta x}$$

$$= 2\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+y+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= 2\lim_{\Delta x \to 0} \cos(x+y+\frac{\Delta x}{2}) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x}$$

$$= 2\lim_{\Delta x \to 0} \cos(x+y+\frac{\Delta x}{2}) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x/2} \cdot \frac{1}{2}$$

= 2 cos (x+y)(1)(1/2)

= cos (x+y)

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x, y+\Delta y) - F(x,y)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+y+\Delta y) - \sin(x+y)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\frac{1}{2}(x+y+\Delta y+x+y)\sin\frac{1}{2}(x+y+\Delta y-x-y)}{\Delta y}$$

$$= 2\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+y+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= 2\lim_{\Delta x \to 0} \cos(x+y+\frac{\Delta x}{2}) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x}$$

$$= 2\lim_{\Delta x \to 0} \cos(x+\frac{\Delta x}{2}) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x/2}.\frac{1}{2}$$

$= 2\cos(x+y)(1)(1/2)$

$= \cos(x+y)$

Untuk memudahkan dalam menentukan turunan parcial dapat dilakukan dengan menggunakan metode sederhana sebagai berikut. Andaikan z = F(x,y) maka untuk menentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ sama artinya dengan menurunkan variabel x dan variabel y dianggap konstan dan selanjutnya y diturunkan. Demikian pula untuk menentukan $\frac{\partial z}{\partial y}$ sama artinya dengan menurunkan variable y dan variable x dianggap konstant lalu diturunkan.

Dengan cara yang sama, andaikan W = F(x,y,z) adalah fungsi tiga peubah yang terdefinisi dalam selang tertentu maka turunan parsial pertama dinyatakan dengan $\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}$, dan $\frac{\partial W}{\partial z}$ yang secara berturut didefinisikan oleh:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to o} \frac{F(x+\Delta x, y, z) - F(x,y,z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to o} \frac{F(x, y+\Delta y, z) - F(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to o} \frac{F(x, y, z+\Delta z) - F(x, y, z)}{\Delta z}$$

Asalkan limitnya ada.

Contoh:

1. Ditentukan F(x,y,z) = xyz + 2 tan $\left(\frac{y}{x}\right)$

   Carilah turunan parsial pertamanya.

   Dengan metode sederhana didapat

   a. $\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} = yz + \frac{2}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right)$

   $= yz - \frac{2yx^2}{x^2(1+y^2)}$

   b. $\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} = xz + \frac{2}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(\frac{1}{x}\right)$

   $= xz - \frac{2x^2}{x(1+y^2)}$

   c. $\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} = xy$

Untuk latihan para pembaca tentukan turunan persial fungsi-fungsi di bawah ini:

1. z = ln $\sqrt{x+y}$
2. z = 36 – x^2 – y^2

3. z = 3 - $\frac{1}{\sqrt{\sin(x+y)}}$
4. z = $xy^2 - 2x^2 + 3y^3$
5. z = arc tan $\frac{y}{x}$
6. F(x,y,z) = xy – yz + xz
7. F(x,y,z) = $\sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}$
8. F(x,y,z) = sin (xy) – 2e ^{xy}
9. F(x,y,z) = arc sin $\left(\frac{xy}{z}\right)$

Selanjutnya turunan parsial fungsi dua peubah atau lebih dapat ditentukan turunan parsial ke n, untuk n ≥ 2 turunan parsialnya dinamakan turunan parsial tingkat tinggi.

Dengan menggunakan analogi fungsi satu peubah dapat ditentukan turunan parsial tingkat 2, 3 dan seterusnya.

Jadi andaikan z = F(x,y) maka:

Turunan parsial tingkat dua adalah $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, dan \ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

Demikian pula, jika W = F(x,y,z)

Turunan parsial tingkat dua adalah

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial y}$$

Demikian seterusnya. Banyaknya turunan tingkat ditentukan oleh rumus m ^{n}, dimana m banyaknya variabel dan n menunjukkan turunan ke-n

Contoh

Tentukan $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ dan $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ dari fungsi berikut:

1. z = $\frac{xy}{x-y}$

   Jawab

   Dari z = $\frac{xy}{x-y}$, diperoleh $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(x-y)-xy(1)}{(x-y)^2}$

$$= \frac{-y^2}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(x-y)-xy(-1)}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{x^2}{(x-y)^2}$$

   Sehingga $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y^2}{(x-y)^2}\right)$$

$$= \frac{0(x-y)^2-(-y^2)(2)(x-y)(1)}{(x-y)^4}$$

$$= \frac{2xy^2-2y^3}{(x-y)^4}$$

Dan $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x^2}{(x-y)^2}\right)$

$$= \frac{0(x-y)^2 - x^2(2)(x-y)(-1)}{(x-y)^4}$$

$$= \frac{-2x^3 - yx^2}{(x-y)^4}$$

2. z = $\dfrac{x}{y^2} - \dfrac{y}{x^2}$
3. z = sin 3x cos 4y
4. z = ln $\sqrt{x+y}$
5. z = 36 – x^2 – y^2
6. z = 3 - $\dfrac{1}{\sqrt{\sin(x+y)}}$
7. z = xy^2 – $2x^2$ + $3y^3$
8. z = arc tan $\dfrac{y}{x}$
9. F(x,y,z) = sin (xy) – $2e^{xy}$
10. F(x,y,z) = arc sin $\left(\dfrac{xy}{z}\right)$

3. Differensial Total

Misal z = F(x,y), dan fungsi tersebut dapat diturunkan terhadap variable x dan y, maka diperoleh turunan parisal terhadap x dan turunan parsial terhadap y yang secara berturut-turut dinotasikan dengan

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ ------------- (1) dan

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ ------------- (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh:

$dz = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dx$ dan $dz = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} dy$

Jumlah diferensialnya diperoleh:

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} dy$

Bentuk di atas disebut diferensial total.

Dengan demikian jika z = F(x,y), maka diferencial totalnya hádala

dz = $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} dy$

Analog

Jika W = F(x,y,z) maka turunan parsialnya ádala

dW = $\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y} dy + \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} dz$

Contoh.

1. Dengan menggunakan diferensial total, hitunglah

   a) $\sqrt{(2{,}01)^2 + (1{,}99)^2 + (0{,}97)^2}$

   Jawab

   Langkah pertama yang harus ditetapkan fungsinya, dalam hal

   $\sqrt{(2{,}01)^2 + (1{,}99)^2 + (0{,}97)^2}$

W = $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Pilih x = 2, y = 2 dan z = 1 sehingga W = $\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}$ = 3

Karena akan dihitung $\sqrt{(2{,}01)^2 + (1{,}99)^2 + (0{,}97)^2}$ maka:

x + Δx = 2,01 sehingga $\Delta x = 0{,}1$

x + Δy = 1,99 sehingga $\Delta x = -0{,}1$

x + Δz = 0,97 sehingga $\Delta x = -0{,}3$

dengan menggunakan definisi diferensial total W = F(x,y,z) maka

dw = $\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y} dy + \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} dz$

= $\frac{x}{W} dx + \frac{y}{W} dy + \frac{z}{W} dz$

= $\frac{2}{3}(0{,}1) + \frac{2}{3}(-0{,}01) + \frac{1}{3}(-0{,}03)$

= -0,01

Akhirnya diperoleh $\sqrt{(2{,}01)^2 + (1{,}99)^2 + (0{,}97)^2}$ = 3 + (-0,01) = 2,99

b) $\sqrt[3]{(0{,}98)^2 (1{,}01)^2 (0{,}99)^2}$

c) Suatu tempat berbentuk kotak dengan dimensi 2,02 m, 1,97 m, dan 0,99 m. Dengan menggunakan differensial tentukan panjang diagonal ruang kotak tersebut.

2. Jika r = $\sqrt{x^2 + y^2}$ dengan x = panjang sisi yang pendek, y = panjang sisi yang panjang

Differensial total

dr = $\frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy$

dimana dr $\approx \Delta r$, dx $\approx \Delta x$, dx$\approx \Delta y$

didapat

$$\Delta r = \frac{\partial r}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial r}{\partial y}\Delta y$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\Delta x + \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\Delta y$$

$$= \frac{15}{\sqrt{15^2+20^2}}\left(\frac{5}{8}\right) + \frac{20}{\sqrt{15^2+20^2}}\left(-\frac{5}{16}\right)$$

$$= \frac{15}{25}\frac{5}{8} - \frac{20}{25}\frac{5}{16}$$

$$= \frac{1}{8} \text{ cm}$$

4 Turunan Total

Misal z = F(x,y) dan F dapat diturunkan (differensiable), dan misalkan x = x(t) dan y = y(t), x dan y juga fungsi-fungsi yang dapat diturunkan dengan satu peubah, Maka z = F(x,y) adalah fungsi satu peubah, sehingga:

$$dz = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy$$

karena x =x(t) dan y=y(t) dapat diturunkan maka dapat ditentukan $\frac{dy}{dx}\, dan\, \frac{dx}{dt}$

sehingga

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Bentuk di atas dinamakan turunan total z = F(x,y) dengan x = x(t) dan y = y(t).

Catatan

Pengertian ganda z, x, dan y pada $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dt}$

Pada $\frac{dz}{dt}$, z berarti F(x(t),y(t)). Sedangkan $\frac{\partial z}{\partial x} dan \frac{\partial z}{\partial y}$, z berarti f(x,y). Pada

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dt}$.

Andaikan z = F(x,y) adalah fungsi yang dapat diturunkan, dan misalkan x = x (r,s)

dan y = y(r,s) adalah fungsi dua peubah dan dapat diturunkan, maka

diferencial totalnya adalah dz = $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy$

Karena x = x(r,s) dan y = y(r,s) dan dapat diturunkan, maka dapat ditentukan

$\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial s}$ dan $\frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial s}$

Sehingga turunan total z = F(x,y) dengan x = x(r,s), dan y = y(r,s) adalah

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

Contoh

Suatu tempat berbentuk silinder (tabung) dengan jari-jari alasnya 15 cm dan tingginya 20 cm. Karena pemuaian, tinggi slinder bertambah 0,5 cm/det dan jari-jarinya berkurang 1 cm/det. Hitunglah perubahan yang terjadi terhadap volume dan luas permukaan silinder.

Jawab.

Misal jari-jari tabung r, tinggi h dan volume I, maka

I = $\pi r^2 h$

I = I(r,h)

Diketahui r = 15 cm, h = 20, $\frac{\Delta r}{\Delta t} = 0{,}5 cm/\det$, $\frac{\Delta h}{\Delta t} = -1 cm/\det$

Dengan definisi turunan total

I = I(r,h) dengan r dan h bergantung pada waktu t, maka diperoleh

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial I}{\partial h}\frac{dh}{dt}$$

$$= 2\pi rh\frac{dr}{dt} + \pi r^2\frac{dh}{dt}$$

Contoh Soal

1. Cari turunan parsial pertama fungsi $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ terhadap tiap peubah bebasnya...

   " Penyelesaian "

   - Untuk mencari $f_x(x,y)$ kita anggap y sebagai konstanta dan kita mendeferensialkan fungsi ini terhadap x didapat

     $$f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$$

     $$f_x(x,y) = (x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}(2x)$$

     $$= \frac{1}{2}(x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}-1}(2x)$$

     $$= \frac{1}{2}(x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}(2x)$$

     $$= x(x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

   - Untuk mencari $f_y(x,y)$ Kita anggap x sebagai konstanta kita mendefersialkan fungsi ini terhadap y didapat

     $$f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$$

     $$f_y(x,y) = (x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}(-2y)$$

     $$= \frac{1}{2}(x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}-1}(-2y)$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2y)$$

$$= -y(x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

2. Carilah turuna parsial pertama fungsi $f(x, y) = 2\sin x \cos y$ yang diberikan terhadap peubah bebaasnya

” Penyelesaian ”

- Untuk mencari $f_x(x, y)$ kita anggap y sebagai konstanta dan kita diferensialkan fungsi ini terhadap x didapat

  $$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\sin x \frac{\partial}{\partial x}\cos y + 2\frac{\partial}{\partial x}\sin x(\cos y)$$

  = 2 sin x . – sin y $\frac{\partial}{\partial x} y$ + 2 cos x $\frac{\partial}{\partial x}(x)$ .cos y

  = 2 cos x. cos y

  Jadi $f_x(x, y)$ = 2 cos x. cos y

- Untuk mencari $f_y(x, y)$ kita anggap x sebagai konstanta dan kita diferensialkan fungsi ini terhadap y didapat

  $$\frac{\partial z}{\partial y} = 2\sin x \frac{\partial}{\partial y}\cos y + 2\frac{\partial}{\partial y}\sin x(\cos y)$$

  = 2 sin x . – sin y $\frac{\partial}{\partial x} y$ + 2 cos x $\frac{\partial}{\partial x}(x)$ .cos y

  = - 2 sin x. sin y

  Jadi $f_y(x, y)$ = - 2 sin x. sin y

3. Jika $f(x,y)=\frac{2x-y}{xy}$,tentukan $f_x(3,-2)$ dan $f_x(3,-2)$

” Penyelesaian ”

$$f(x,y)=\frac{2x-y}{xy}$$

- Untuk mencari $f_x(x,y)$ kita anggap y sebagai konstanta dan kita didiferensialkan fungsi ini terhadap x didapat

$$f_x(3,-2)=\frac{xy\frac{\partial}{\partial x}(2x-y)-\frac{\partial}{\partial x}xy(2x-y)}{(xy)^2}$$

$$=\frac{xy.(2)-(y).2x-y}{(xy)^2}$$

$$=\frac{(3)(-2).2-(-2).(2(3)-(-2)}{36}$$

$$=\frac{-12+16}{36}$$

$$=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

- Untuk mencari $f_y(x,y)$ kita anggap sebagai konstanta dan kita diferensialkan fungsi ini terhadap y didapat

$$f_y(3,-2)=\frac{xy\frac{\partial}{\partial y}(2x-y)-\frac{\partial}{\partial y}xy(2x-y)}{(xy)^2}$$

$$=\frac{xy.(-1)-(x).2x-y}{(xy)^2}$$

$$=\frac{(3)(-2).-1-(3).(2(3)-(-2)}{36}$$

$$=\frac{6-24}{36}$$

$$=\frac{-18}{36}=-\frac{1}{2}$$

4. Perlihatkan bahwa fungsi $f(x,y) = x^3y - xy^3$ adalah fungsi harmonik

   " Penyelesaian "

   - $\frac{\partial f}{\partial x^2} = x^3y - xy^3$

     $\frac{\partial' f}{\partial x^2} = 3x^2y - 1y^3$

     $\frac{\partial'' f}{\partial x^2} = 6xy$

   - $\frac{\partial f}{\partial y^2} = x^3y - xy^3$

     $\frac{\partial' f}{\partial y^2} = x^3 1 - x3y^2$

     $\frac{\partial'' f}{\partial y^2} = -6xy$

   Disebut harmonik jika $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ + $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ = 0,

   Jadi fungsi diatas terbukti harmonik karena $6xy - 6xy = 0$

5. Jika $f(x,y,z) = 3x^2y - xyz + y^2z^2$.Carilah $f_x(x,y,z)$ dan $f_y(0,1,2)$

   " Penyelesaian"

   - $f(x,y,z) = 3x^2y - xyz + y^2z^2$

     $f_x(x,y,z) =$ $6xy - yz + 0$

     = $6xy - yz$

   - $f(x,y,z) = 3x^2y - xyz + y^2z^2$

     $f_y(0,1,2) =$ $6xy - xz + 2y2z$

     = $6(0).1 - 0(2) + 2(1).2(2)$

     = 8