# BAB VI

# TURUNAN FUNGSI

## Limit Fungsi

**Definisi** : Fungsi y = f (x) dikatakan mempunyai limit L untuk x mendekati a , ditulis $\lim_{x \to a} f(x) = L$ , jika untuk setiap bilangan ε > 0 ( yang bagaimapun kec-ilnya )dapat ditunjuk bilangan δ > 0 (biasanya tergantung pada ε ) sedemikian hingga | f (x) = L | < ε untuk 0 < | x-a | < δ.

## Dalil-dalil limit :

Jika $\lim_{x \to a} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = M$ , maka :

I. $\lim_{x \to a}\{ f(x) \pm g(x)\}$ = L ± M

II. $\lim_{x \to a} \{ f(x) \,.\, g(x) \}$ = L . M

III. $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$ , Jika L ≠ 0

IV. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ , Jika M ≠ 0

## Fungsi kontinu.

**Definisi** : Suatu fungsi f (x) dikatakan kontinu di x = a ,

**Jika :**

i) f (a) ada

ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ ada

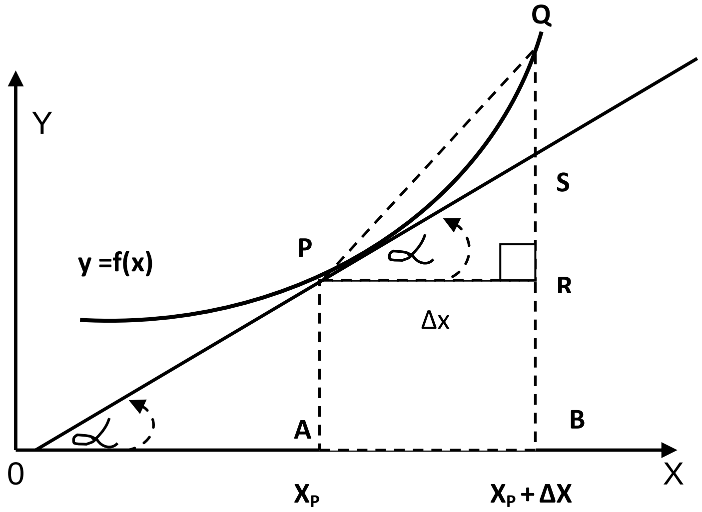
iii) $\lim_{x \to a} f(x)$ = f (a)

**Tegasnya** f (x) disebut kontinu di x = a jika $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ **ada**.

Jika f (x) kontinu pada setiap titik dari suatu interval maka f (x) dikatakan kontinu pada interval itu.

Jika satu atau lebih dari syarat-syarat kontinuitas diatas tidak dipenuhi , maka f (x) dikatakan **diskontinu** (tidak kontinu) di x = a.

**Turunan (derivative)**




Pandang fungsi y = f (x)

Titik P dan Q berdekatan ,Terletak pada y = f (x).P $(x_p,y_p)$ , Q $(x_q,y_q)$

$y_p = f(x_p)$ ; $x_q = x_p + \Delta x$ ;

$y_q = f(x_p + \Delta x)$

PA = $y_p = f(x_p)$ ; QB = $y_q = f(x_p + \Delta x)$ ; RB = PA ; AB = PR =$\Delta x$

QR = $\Delta y$ = QB – RB $\Longrightarrow$ $\Delta y = f(x_p + \Delta x) - f(x_p)$

$$\text{tg} < QPR = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_p + \Delta x) - f(x_p)}{\Delta x}$$

Jika titik Q bergerak pada y = f (x) menuju P hingga berimpit , maka tali busur PQ menjelma menjadi garis singgung PS yang menyinggung y = f(x) dititik P. Pada keadaan limit ini tg < QPR menjadi tg $\propto$ **,**dimana $\propto$ adalah sudut antara ab $x_+$ dengan garis singgung PS.

Turunan dari y = f (x) terhadap x pada titik x = $x_p$ didefinisikan sbb :

$$y^{I}(x_p) = f^{I}(x_p) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_p + \Delta x) - f(x_p)}{\Delta x} = \text{tg} \propto$$

yang berarti koefisien arah garis singgung di P.

Definisi turunan dari y = f(x) terhadap x adalah :

$$\boxed{y^{I} = f^{I}(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

**Contoh** : Dapatkan $y^I$ dari $y = x^3$

Penyel. : $$y^{I} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$y^{I} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$y^{I} = \lim_{\Delta x \to 0} [\, 3x^2 + 3x\,\underbrace{(\Delta x)}_{0} + \underbrace{(\Delta x)^2}_{0} \,] = \underline{\mathbf{3x^2}}$$

## I. Sifat-sifat turunan

1. $y = u \pm v \Rightarrow y^I = u^I \pm v^I$ ; ( $u = f(x)$ , $v = g(x)$ )
2. $y = uv \Rightarrow y^I = u^I v + uv^I$
3. $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y^I = y^I = \frac{u^I v - uv^I}{v^2}$

## II. Beberapa rumus turunan

1. $y = C$ ; ( C = konstanta ) → $y^I = 0$
2. $y = x^n$ → $y^I = nx^{n-1}$
3. $y = e^x$ → $y^I = e^x$
4. $y = \text{Ln}x$ → $y^I = \frac{1}{x}$
5. $y = {}^a\text{Log } x$ → $y^I = \frac{1}{x \text{ Ln } a}$
6. $y = a^x$ ; ( $a > 0$ , $a \neq 1$ ) → $y^I = a^x \text{ Ln } a$
7. $y = u^v$ → $y^I = u^v \left( v^I \text{Ln } u + v \frac{u^I}{u} \right)$

   ( $u = f(x)$ , $v = g(x)$ )
8. $y = \sin x$ → $y^I = \cos x$
9. $y = \cos x$ → $y^I = -\sin x$
10. $y = \text{tg } x$ → $y^I = \sec^2 x$
11. $y = \text{cotg } x$ → $y^I = -\text{cosec}^2 x$
12. $y = \sec x$ → $y^I = \sec x \text{ tg } x$
13. $y = \text{cosec } x$ → $y^I = -\text{cosec } x \text{ cotg } x$
14. $y = \text{Ln} |\sin x|$ → $y^I = \text{cotg } x$
15. $y = \text{Ln} |\cos x|$ → $y^I = -\text{tg } x$
16. $y = \text{Ln} |\sec x + \text{tg } x|$ → $y^I = \sec x$
17. $y = \text{Ln} |\text{cosec } x - \text{cotg } x|$ → $y^I = \text{cosec } x$
18. $y = \text{Ln} \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right|$ → $y^I = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}}$
19. $y = \text{arc sin } x$ → $y^I = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
20. $y = \text{arc cos } x$ → $y^I = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
21. $y = \text{arc tg } x$ → $y^I = \frac{1}{1 + x^2}$
22. $y = \text{arc cotg } x$ → $y^I = \frac{-1}{1 + x^2}$
23. $y = \text{arc sec } x$ → $y^I = \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}}$
24. $y = \text{arc cosec } x$ → $y^I = \frac{-1}{x \sqrt{x^2 - 1}}$

**Catatan :**

y = arc sin x artinya sin y = x ( y adalah sudut atau busur (arc) yang sinusnya = x).

arcsin 0 = 0 ; arcsin 1 = ½$\pi$ ; arctg 0 = 0 ; arctg ∞ = ½ $\pi$

arctg 1 = ¼ $\pi$

## III. Fungsi hiperbolik.

**Definisi** : sinhx : $\frac{1}{2}$ ($e^x$ - $e^{-x}$)

coshx : $\frac{1}{2}$ ($e^x$ + $e^{-x}$)

**Sifat – sifat** :

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
2. sinh ( x ± y ) = sinhx coshy ± coshx sinhy
3. cosh ( x ± y ) = coshx coshy ± sinhx sinhy

**Turunan** :

1. y = sinh x → $y^I$ = cosh x
2. y = cosh x → $y^I$ = sinh x
3. y = tgh x → $y^I = \text{sech}^2\, x$
4. y = cotgh x → $y^I = -\,\text{cosech}^2\, x$
5. y = sech x → $y^I$ = - sech x tgh x
6. y = cosech x → $y^I$ = - cosech x cotgh x
7. y = ar sinh x → $y^I = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

   (artinya sinh y = x)
8. y = ar cosh x → $y^I = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
9. y = ar tgh x → $y^I = \frac{1}{1 - x^2}$ ; ($x^2 < 1$)
10. y = ar cotgh x → $y^I = \frac{1}{1 - x^2}$ ; ($x^2 > 1$)
11. y = ar sech x → $y^I = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$ ; ( 0 < x < 1 )
12. y = ar cosech x → $y^I = \frac{-1}{x\sqrt{x^2+1}}$ ; ( x ≠ 0 )

## IV. Aturan Berantai ( AB )

Jika $y = f(u)$ & $u = g(x)$ maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Jika $y = f(u)$ , $u = g(v)$ & $v = h(x)$ → $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$

Contoh :

1. $y = (2x+3)^5$ → $y^I = ?$

   Penyelesaian : misalkan $u = 2x + 3$ ; $y = u^5$

   $\frac{du}{dx} = 2$ ; $\frac{dy}{du} = 5u^4$

   AB → $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

   $y^I = (5u^4)(2) = 10(2x+3)^4$

2. $y = ex^2$ → $y^I = ?$

   Penyelesaian : misalakan $u = x^2$ ; $y = e^u$

   $\frac{du}{dx} = 2x$ ; $\frac{dy}{du} = e^u$

   AB → $y^I = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (e^u)(2x) = 2xex^2$

3. $y = \text{Ln}(x^2 - 3x + 5)$ → $y^I = ?$

   Misal : $u = x^2 - 3x + 5$ ; $y = \text{Ln } u$

   $\frac{du}{dx} = 2x - 3$ ; $\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$

   AB → $y^I = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u}(2x - 3) = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 5}$

## V. Turunan tingkat tinggi

$y = f(x)$ → turunan ke 1

terhadap x ialah $y^I = f^I(x)$

turunan ke 2 : $y^{II} = y^{(2)} = f^{(2)}(x)$

turunan ke 3 : $y^{III} = y^{(3)} = f^{(3)}(x)$

------------------------- dst

Turunan ke n: $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$

Contoh :

1. $y = e^{ax}$ → $y^{(n)} = ?$

   Penyelesaian : $y = e^{ax}$ → $y^I = a\ e^{ax}$

   $y^{II} = a^2 e^{ax}$

   $y^{(3)} = a^3 e^{ax}$

dst

$\underline{y^{(n)} \quad = \quad a^n \quad e^{ax}}$

2. y = sin x → $y^{(n)}$ = ?

Penyelesaian: $y^{I} = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$y^{II} = -\sin x = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$

$y^{(3)} = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$

dst.

$Y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

=================

## VI. Rumus Leibnits.

$D = \frac{d}{dx}$ operator turunan ; $D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$ ; $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$ operator turunan tingkat n

Jika y = UV dimana U = f(x) dan V = g(x) maka turunan tingkat n dari y terhadap x dinyatakan dengan $y^{(n)} = D^n(UV)$ dan dirumuskan sbb :

$$\boxed{D^n(UV) = UD^nV + nDUD^{n-1}V + \frac{1}{2!}n(n-1)D^2UD^{n-2}V + \frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)D^3UD^{n-3}V + \ldots\ldots..}$$

**Bukti** y = UV → $y^{I} = UV^{I} + U^{I}V$

$y^{II} = UV^{II}$

$y^{(3)} = UV^{(3)} + 3U^{I}V^{(2)} + 3U^{(2)}V^{I} + U^{(3)}V$

Ternyata koefisien-koefisien yang terdapat dalam jumlah tersebut adalah juga koefisien-koefisien binomial $(a+b)^n$ , sehingga didapat rumus umum :

$$y^{(n)} = UV^{(n)} + nU^{I}V^{(n-1)} + \frac{1}{2!}n(n-1)U^{(2)}V^{(n-2)} + \ldots\ldots$$

**atau** :

$$D^n(UV) = UD^nV + nDUD^{n-1}V + \frac{1}{2!}n(n-1)D^2UD^{n-2}V + \ldots\ldots$$

Contoh : dapatkan $y^{(n)}$ dari $y = x^2 e^x$

Penyel : Ambil $U = x^2 \rightarrow U^{I} = 2x$ , $U^{II} = 2$ , ............ , $U^{(n)} = 0$

$V = e^x \rightarrow V^{I} = e^x$ , $V^{II} = e^x$, ............ , $V^{(n)} = e^x$

$y^{(n)} = x^2 e^x + n(2x)e^x + \frac{1}{2!}n(n-1) \cdot (2)e^x + 0 + 0 + 0 = e^x(x^2 + 2nx + n^2 - n)$

**VII. Turunan fungsi parametrik.**

$$\begin{cases} x = f\ (t) \\ y = g\ (t) \end{cases} \quad \text{maka :}$$

$$\boxed{y^I = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad ; \quad y^{II} = \frac{\frac{dy^I}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad ; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; ; \quad y^{(n)} = \frac{\frac{dy^{(n-1)}}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}$$

Contoh : Dapatkan $y^{II}$ dari $\begin{cases} x = a\ \cos\ t \\ y = b\ \sin\ t \end{cases}$

Penyelesaian :

$$y^I = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{b\ \cos\ t}{-a\ \sin\ t} = -\frac{b}{a}\ \text{cotg}\ t$$

$$y^{II} = \frac{\frac{dy^I}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{b}{a}(-\text{cosec}^2 t)}{-a \sin t} = -\frac{b}{a^2}\ \text{cosec}^3\ t$$

**VIII. Menurunkan fungsi implisit.**

$y^I$ dari f(x,y) = 0 didapat sebagai berikut :

( i ). Jika mungkin y dinyatakan sebagai fungsi explisit dalam x .

Contoh : $x^2 + y - 3 = 0 \rightarrow y = 3 - x^2$

$y = -2x$

( ii ). Setiap suku dalam f (x,y) = 0 diturunkan terhadap x. Karena y fungsi

x maka setiap kali menurunkan y harus digandakan dengan $y^I$ , kemudian hubungan yang didapat diselesaikan ke $y^I$ .

Contoh :

$x^3 + y^3 - 3axy = 0$

$3x^2 + 3y^2y^1 - 3a( y + xy^I) = 0$

$3(ax - y^2)\ y^1 = 3\ (x^2 - ay) \rightarrow y^1 = \dfrac{x^2 - ay}{ax - y^2}$

## BAB VIII

## PENGGUNAAN TURUNAN

### 1. Theorema Rolle

Jika fungsi f(x) adalah :

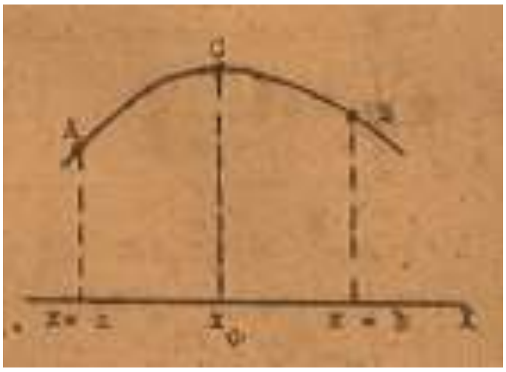
(1). Kontinu dalam selang $a \leq x \leq b$ ,

(2). Diferensiabel dalam selang $a < x < b$ ,dan

(3). $f(a) = f(b)$ ;

Maka paling sedikit terdapat satu nilai $x_o$ Dalam (a,b) sedemikian Hingga :

$$\boxed{f^I(x_o) = 0}$$



Catatan : boleh $f(a) = f(b) = 0$

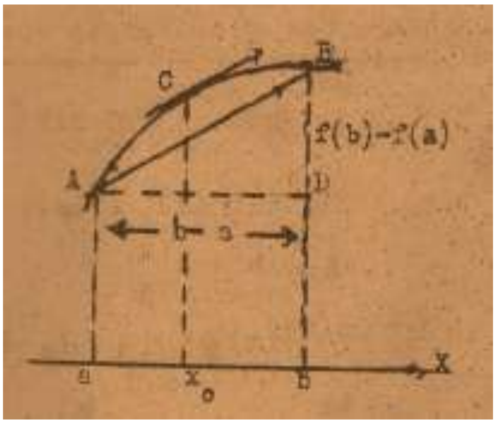
### 2. Theorema Nilai Menengah Lagrange (TNML)

Jika fungsi f(x) adalah :

(1). Kontinu dalam $a \leq x \leq b$,

(2). Diferensiabel dalam $a < x < b$ , maka paling sedikit terdapat satu nilai $x_o$ dalam (a,b) sedemikian hingga :

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f^I(x_o)}$$




Bentuk lain TNML : $\boxed{f(a + h) = f(a) + h\ f^I(a + \theta h)}$

Dimana : $0 < \theta < 1$.

$b = a + h$

### 3. Theorema Nilai Menegah Cauchy (TNMC)

Jika f (x) dan g (x) masing-masing kontinu dalam $a \leq x \leq b$ , d

Jika $f^I(x)$ dan $g^I(x)$ ada dan $g^I(x) \neq 0$ dalam $a < x < b$ , maka paling sedikit ada satu titik $x_o$ diantara a dan b sedemikian hingga :

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f^{I}(x_0)}{g^{I}(x_0)}} \; ; \; a < x_o < b \; ; g(a) \neq g(b)$$

Atau dapat ditulis sebagai berikut :

$$\boxed{\frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)} = \frac{f^{I}(a+\theta h)}{g^{I}(a+\theta h)}} \; ; 0 < \theta < 1$$

## 4. Theorema Taylor dengan suku sisa Lagrange.

Jika f(x) adalah sedemikian hingga :

(1). $f(x)$ , $f^{I}(x)$ , $f^{II}(x)$ , ..................................., $f^{(n-1)}$ (x) **adalah kontinu dalam** $[a, a + h]$

(2). $f^{(n)}$ (x) **ada** dalam ( a, a + h ) , maka :

$$f(a+h) = f(a) + hf^{I}(a) + \frac{h^2}{2!} f^{n}(a) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n$$

dimana :

$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h)$ ; ( $0 < \theta < 1$ ) disebut **suku sisa Lagrange.**

## 5. Deret Taylor dan Maclaurin.

Deret Taylor dari f (x) disekitar x = a :
( Expansi f(x) menurut deret kuasa dalam (x - a) )

$$\boxed{f(x) = f(a) + (x-a) f^{I}(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f^{II}(a) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots\ldots\ldots\ldots}$$

Deret Maclaurin dari f(x) adalah :

$$\boxed{f(x) = f(0) + xf^{I}(0) + \frac{x^2}{2!} f^{II}(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(0) + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots\ldots\ldots\ldots}$$

Contoh-contoh deret Maclaurin :

1. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ ; **(x dalam radian)**

2. Cos x $= 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \frac{x^6}{6\,!} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ ; (**x dalam radian)**

3. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^4}{4\,!} + \ldots\ldots\ldots + \frac{x^n}{n\,!} + \ldots$

4. $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots\ldots$ ; $|x| < 1$

5. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\ldots + x^n + \ldots\ldots\ldots$ ; $|x| < 1$

6. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 - x^4 - \ldots\ldots + (-1)^{nxn} + \ldots\ldots$ ; $|x| < 1$

7. $(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2\,!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3\,!}x^3 + \ldots\ldots$ ; $|x| < 1$

Ini disebut **<u>deret binomial</u>** m = bilangan real

## 6. <u>Limit dari bentuk-bentuk tak tentu.</u>

I. $\frac{0}{0}$ II. $\frac{\infty}{\infty}$ III. $\infty - \infty$ IV. $0 \cdot \infty$

V. $1^{\infty}$ VI. $\infty^0$ VII. $0^0$

I. <u>Bentuk</u> $\frac{0}{0}$ . Aturan $L^{I}$ Hospital.

Jika $f(a) = f^{I}(a) = f^{II}(a) = \ldots\ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ dan
$g(a) = g^{I}(a) = g^{II}(a) = \ldots\ldots = g^{(n-1)}(a) = 0$ ,tetapi
$f^{(n)}(a)$ dan $g^{(n)}(a)$ tidak serentak sama dengan nol,maka :

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}}$$

<u>Contoh</u> :

1. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{2x} = \frac{3\,(1)^2}{2\,(1)} = \frac{3}{2}$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6} = \frac{\cos 0}{6} = \frac{1}{6}$

II. Bentuk $\frac{\infty}{\infty}$ . Berlaku langsung aturan L[I] Hospital .

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x+1}{3x^2+6x+7} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{6x+6} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

2. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\text{Ln } \sin x}{\text{Ln } \text{tg } x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{cotg } x}{\frac{\sec^2 x}{\text{tg } x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sec^2 x} = 1$

III. Bentuk ; $\infty - \infty$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x} = \frac{1}{1+1+0} = \frac{1}{2}$

IV. Bentuk : $0 \,.\, \infty$

$\text{Lim}_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \text{tg } x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{\text{cotg } x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{-\text{cosec}^2 x}$

$= -1$

V. Bentuk $1^\infty$

$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{e^x\to 0} \frac{1}{x^2} \text{ Ln}(\cos x) = e^\infty \,.\, 0$

$= \lim_{e^x\to 0} \frac{\text{Ln}(\cos x)}{x^2} = e^{\frac{0}{0}} = \lim_{e^x\to 0} \frac{-\text{tg } x}{x^2} = e^{\frac{0}{0}}$

$= \lim_{e^x\to 0} \frac{-\sec^2 x}{2} = e^{--}$

VI. Bentuk : $\infty^0$

$\lim_{x\to\infty}(e^x + x)^{\frac{3}{x}} = \lim_{e^x\to\infty} \frac{3\text{Ln}(e^x+X)}{x} = e^{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{e^x\to\infty} \frac{3(e^x+1)}{e^x+x}$

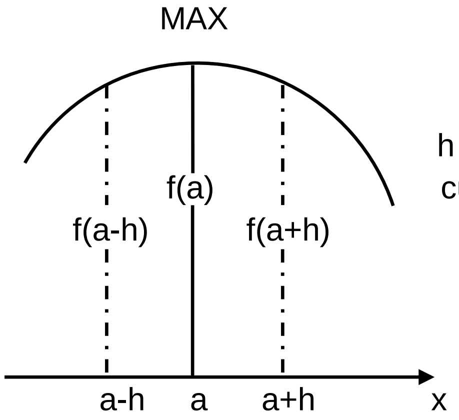
$= e^{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{e^x\to\infty} \frac{3e^x}{e^x+1} = e^{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{e^x\to\infty} \frac{3e^x}{e^x} = e^3$

VII. Bentuk : $0^0$

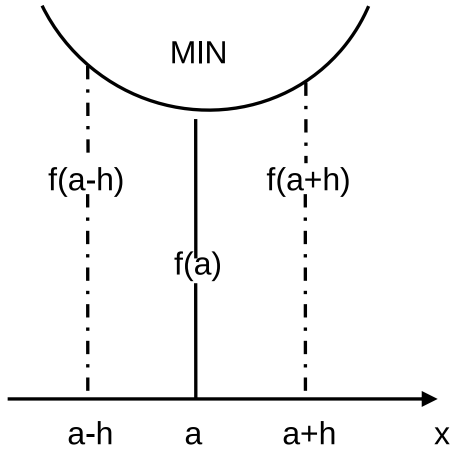
$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{e^x\to 0^+} x \,.\, \text{Ln } x = e^0 \,.\, (-\infty) = \lim_{e^x\to 0^+} \frac{\text{Ln } x}{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{\infty}{\infty}}$

$\lim_{e^x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{e^x\to 0}(-x) = e^0 = 1$

## 7. NILAI EXTRIM ( MAX & MIN )



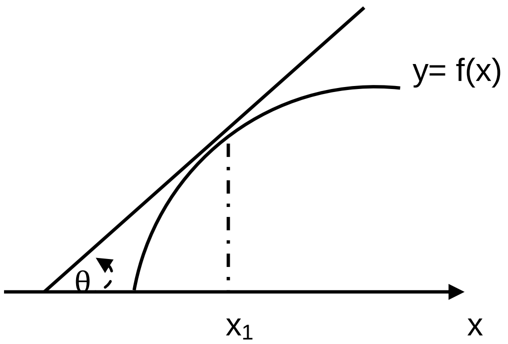

h bil.positip
cukup kecil

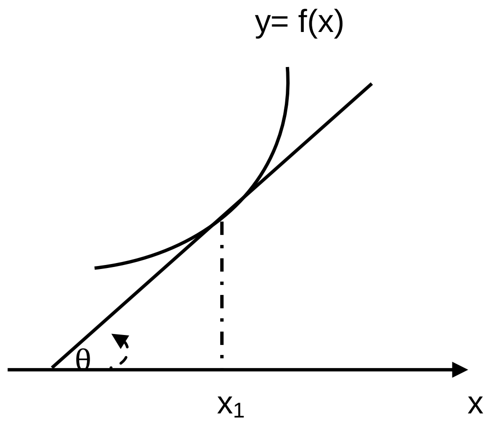



y = f(x) punya titik max pada
x = a , jika :
f(a-h) **<** f(a) **>** f (a +h)

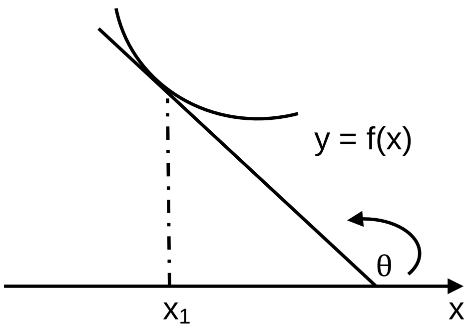
y = f(x) punya titik min.
pada x = a , jika :
f(a-h) **>** f(a) **<** f(a+h)

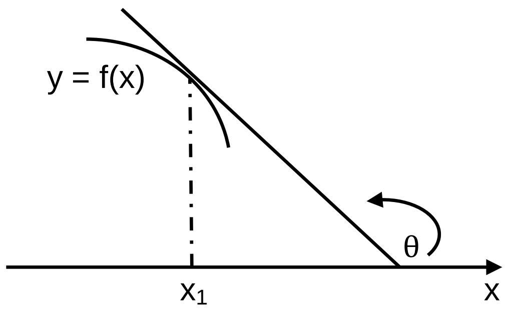
<u>Fungsi Naik/Turun</u>.




$\theta$ = Lancip → tg $\theta$ $f^{l}$ $(x_1) > 0$
y = f(x) <u>naik</u> di $x_1$ jika $f^{l}$ $(x_1) > 0$

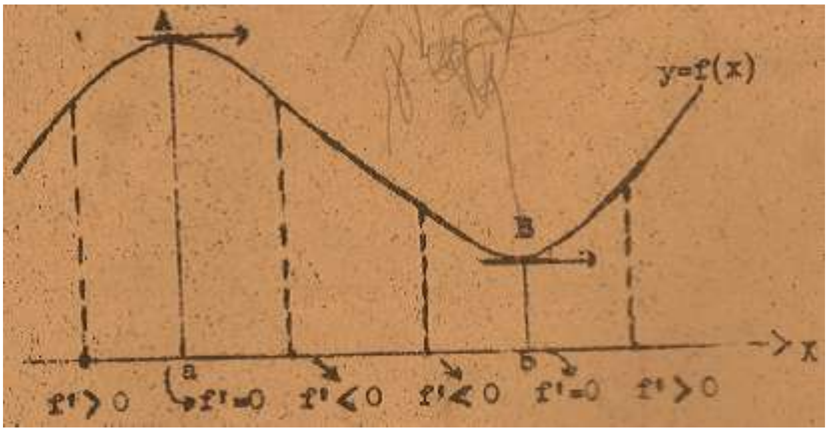



$\theta$ = tumpul → tg $\theta$ = $f^{l}$ $(x_1) < 0$
y = f(x) <u>turun</u> di $x_1$ , jika $f^{l}$ $(x_1) < 0$

Titik kritis ( titik stasioner )

Ialah titik pada kurva dimana garis singgungnya mendatar.Pada titik ini $f^{I}(x) = 0$




Dititik max A, $f^{I}(a) = 0$
Dititik min B, $f^{I}(b) = 0$

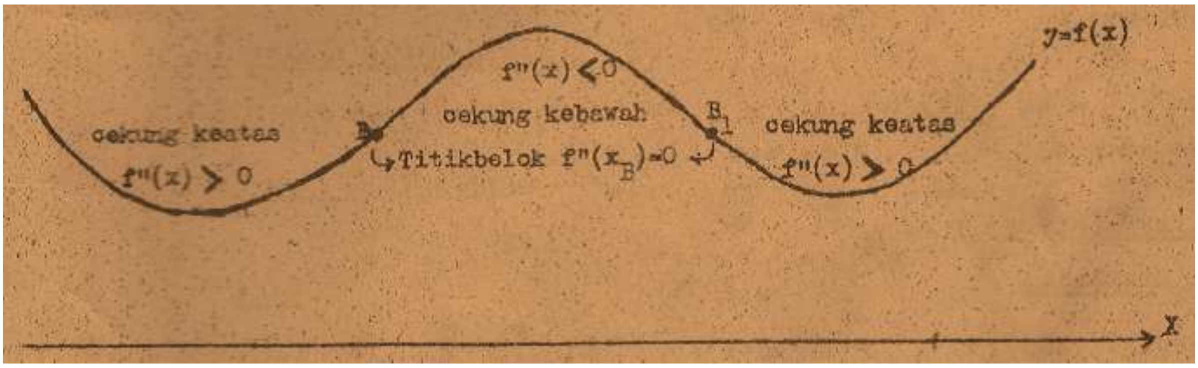
$f^{I}(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ ; $f^{II}(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{I}(a+\Delta x) - f^{I}(a)}{\Delta x}$

$f^{II}(a) < 0 \rightarrow y_{max} = f(a)$

$f^{I}(b) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(b+\Delta x) - f(b)}{\Delta x}$ ; $f^{II}(b) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{I}(b+\Delta x) - f^{I}(b)}{\Delta x}$

$f^{II}(b) > 0 \rightarrow y_{min} = f(b)$

Cekung keatas & Cekung ke bawah




Titik balok : titik dimana terjadi perubahan dari cekung keatas ke cekung kebawah atau sebaliknya .

B titik balok → $f^{II}(x_B) = 0$

Jika $f^{II}(a) = f^{III}(a) = \ldots\ldots\ldots\ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ dan $f^{(n)}(a) \neq 0$ dimana **n gasal** ,maka y = f(x) punya titik belok pada x = a.

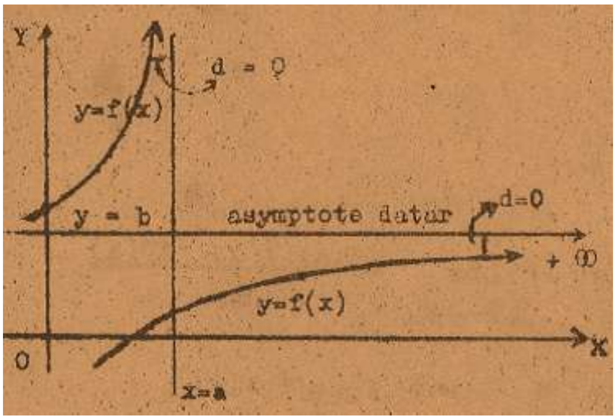
Theorema :

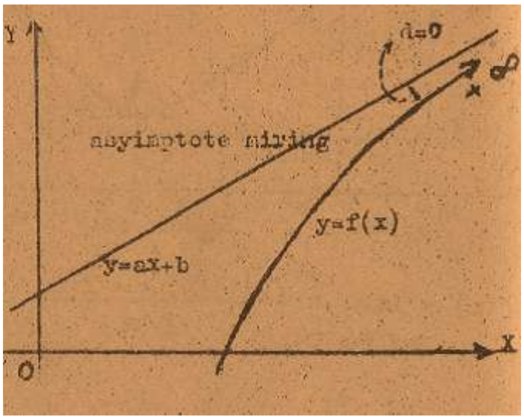
Jika $f^{I}(a) = f^{II}(a) = \ldots\ldots\ldots\ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ dan $f^{(n)}(a) \neq 0$ dimana **n genap** ,maka :

1). Jika $f^{(n)}(a) < 0$ , y = f(x) punya max pada x = a

2). Jika $f^{(n)}(a) > 0$ , y = f(x) punya min pada x = a.

Asymptote :




Garis x =a asymptote tegak dari y = f (x) jika $\lim_{x \to \pm a} y = \pm \infty$

Garis y = b asymptote datar dari y = f (x) jika $\lim_{x \to \pm \infty} y = b$

Arah-arah asymptotik :

$\lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x}$ = $m_1$ (ada) & $\lim_{x \to -\infty} (y - m_1 x)$ = $b_1$ (ada) → y = $m_1$x + $b_1$

**Asymptote miring**

$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x}$ = $m_2$ (ada) & $\lim_{x \to +\infty} (y - m_2 x)$ = $b_2$ (ada) → y = $m_2$x + $b_2$

**Asymptote miring**

Grafik simetri :

| Terhadap | jika : | maka : |
|---|---|---|
| 1. Sumbu x | y diganti – y | → persamaan tidak berubah |
| 2. Sumbu y | x diganti – x | → persamaan tidak berubah |
| 3. Titik 0 | x diganti – x Dan y diganti – y | → persamaan tidak berubah |

Grafik simetri

| Terhadap | jika : | maka : |
|---|---|---|
| 4. Garis y = x | x diganti y Dan y diganti x | → persamaan tidak berubah |
| 5. Garis y = -x | x diganti - y Dan y diganti - x | → persamaan tidak berubah |

Contoh – contoh :

1. Dapatkan dua bilangan positip bulat yang jumlahnya 18 dan hasil gandanya maximum .

   Penyelesaian :

   Misalkan bilangan itu x dan 18 – x .

   Hasil gandanya : $G = f(x) = x\ (18 - x) = 18x – x^2$

   $f^{I}(x) = 18 – 2x$ ; $f^{II}(x) = - 2$.

   Titik kritis ( calon titk extrim ) :

   $f^{I}(x) = 0 \rightarrow 18 – 2x < 0 \rightarrow x = 9$

   karena $f^{II}(9) = - 2 < 0 \rightarrow$ terhadap maximum untuk x = 9.

   Jadi bilangan-bilangan itu adalah 9 dan 9.

2. Periksalah nilai max/min dari $y = x^4$ pada titik 0.

   Penyelesaian :

   $y^{I} = 4x^3$ ; $y^{I}(0) = 0$

   $y^{II} = 12x^2$ ; $y^{II}(0) = 0$

   $y^{III} = 24x$ ; $y^{III}(0) = 0$

   $y^{(4)} = 24$ ; $y^{(4)}(0) = 24 > 0$

   karena n = 4 genap dan $y^{(4)}(0) = 24 > 0$ ,maka $y = x^4$ mempunyai minimum pada x = 0 dan $y_{min} = 0$ .

3. Dapatkan titik-titik max/min , titik balok dan skets grafik $f(x) = 2x^3 – 24x + 5$.

   Penyelesaian : $f^{I}(x) = 6x^2 – 24$ ; $f^{II}(x) = 12x$ ; $f^{III}(x) = 12$

   Titik-titik kritis : $f^{I}(x) = 0 \rightarrow 6x^2 – 24 = 0 \rightarrow x_1 = - 2$ ; $x_2 = 2$

   Untuk $x_1 = - 2$ $\rightarrow f^{II}(-2) = 12(-2) = - 24 < 0 \rightarrow y_{max}$

   $y_{max} = f(-2) = 2(-2)^3 – 24(-2) + 5 = 37$

   $\therefore$ Titik max M (-2 ,37)

   Untuk $x_2 = 2$ $\rightarrow f^{II}(2) = 12(2) = 24 > 0 \rightarrow y_{min}$

   $y_{min} = f(2) = 2(2)^3 – 24(2) + 5 = -27$

   $\therefore$ Titik min N (2,-27)

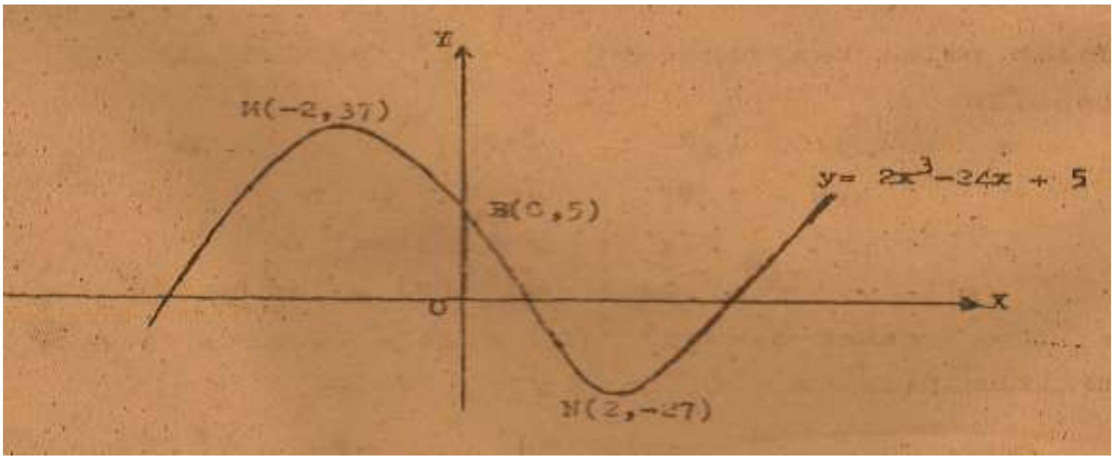
   Karena $f^{II}(x) = 0$ bila x = 0 dan $f^{III}(0) = 12 \neq 0$ , maka pada x = 0 terdapat titik belok.

   $f(0) = 2(0)^3 – 24(0) + 5 = 5$ . Titik belok B(0,5)

   Sket grafik :

   Titik potong dengan sumbu y adalah (0,5)

   Titik potong dengan sumbu x tidak dapat ditentukan dengan mudah.




4. Gambarkan kurva $y = \frac{1}{1 + x^2}$

Penyelesaian :

(1). Untuk x = 0 → y = 1 . Kurva simetri terhadap sumbu y sebab x diganti –x persamaan tetap

(2). y selalu positip.

(3). Untuk x → ± ∞ → y → $0^+$ .Berarti bahwa sumbu x adalah asymptote datar.

(4). Penyebut tidak pernah nol → tidak ada asymptote tegak.

(5). $y^{I} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ ; $y^{II} = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$ ; $y^{III} = \frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$

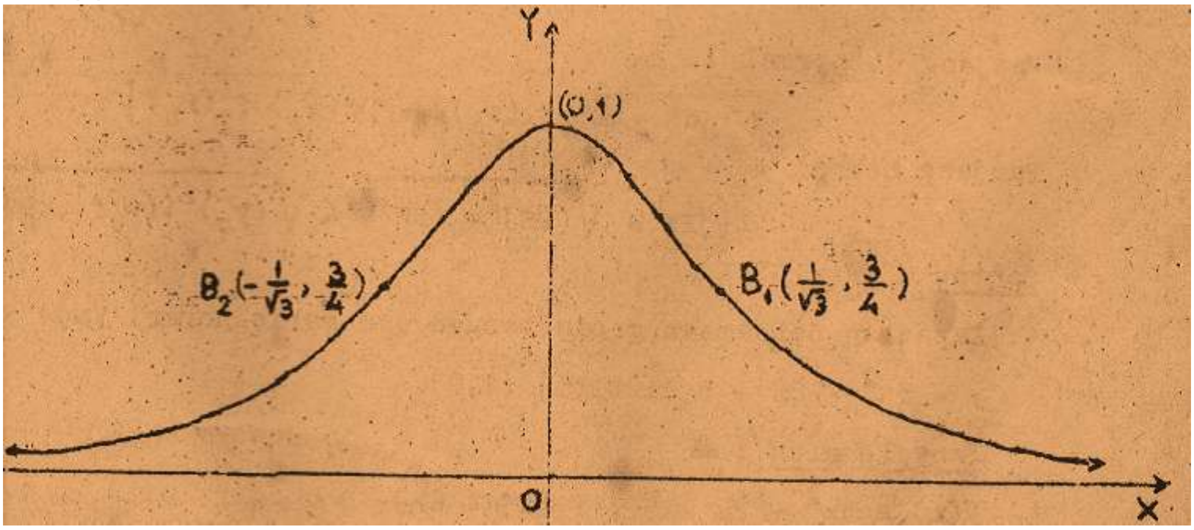
$y^{I} = 0$ untuk x = 0

$y^{II}(0) = -2 < 0 \rightarrow y_{max} = f(0) = \frac{1}{1 + 0^2} = 1.$

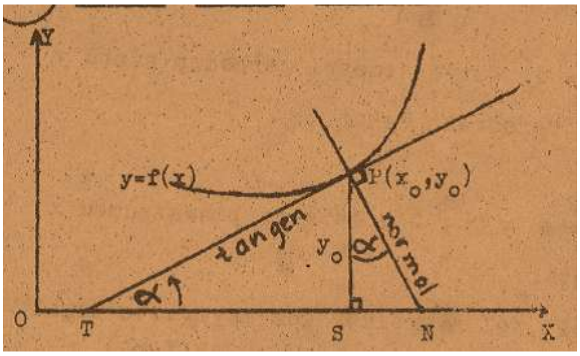
(6). $y^{II} = 0$ untuk $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ . $y^{II} = (\pm\frac{1}{\sqrt{3}}) \neq 0$ → pada $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ terdapat

Titik-titik belok .Ordinat titik-titik belok $y(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{3}{4}$

(7). Grafik :



## 8. **Tangen, Normal, Subtsngen, Subnormal.**




Titik $P(x_0 , y_0)$ terletak pada kurva $y = f(x)$.
$Tg \propto = f^I (x_0)$

Persamaan tangen (garis singgung) dititik $P(x_0,y_0)$ pada kurva $y = f(x)$ :
$y – y_o = f^I (x_0) (x-x_0)$

Persamaan normal di titik $P(x_0,y_0)$ pada kurva $y = f(x)$ :

$$y-y_o = \frac{-1}{f^I(x_0)} ( x – x_0 )$$

$$PS = y_0 = f(x_0) . \quad \frac{PS}{ST} = \frac{f ( x_0 )}{ST} = tg \propto = f^I(x_0) \; ;$$

$$\frac{SN}{PS} = tg \propto = f^I(x_0)$$

Panjang subtangen :

$$ST = \left| \frac{f (x_0)}{f^I (x_0)} \right| = \left| \frac{y_0}{f^I (x_0)} \right|$$

Panjang tangen :

$$PT = \sqrt{(PS)^2 + (ST)^2} = \sqrt{(y_0)^2 + \left\{\frac{y_0}{f^I (x_0)}\right\}^2}$$

Panjang subnormal :

$$SN = |y_o f^I(x_0)| = |f ( x_0) f^I(x_o)|$$

Panjang Normal :

$$PN = \sqrt{(PS)^2 + (SN)^2} = \sqrt{(y_0)^2 + (y_0)^2 + (y_o f^I(x_o) )^2}$$

Contoh :

1. Dapatkan persamaan garis tangen dan garis normal pada kurva $y = 3x^2 – 8x + 5$ di titik (1,0)
   Penyelesaian :
   $f(x) = 3x^2 – 8x + 5$ ; $f^I (x) = 6x – 8$
   koefisien arah garis tangen adalah :

$f^{I}(1) = 6(1) - 8 = -2$

maka koefisien arah garis normal = $\frac{1}{2}$

Persamaan garis tangen dititik (1,0) adalah :

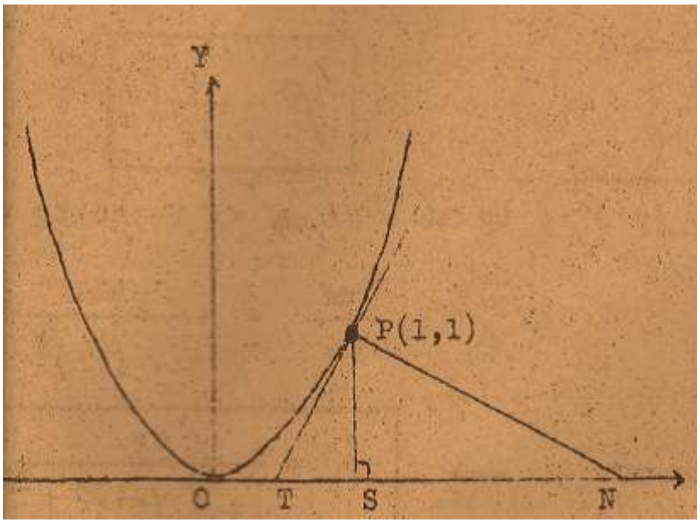
$$y - 0 = f^{I}(1)\ (x-1) \rightarrow y = -2\ (x-1)$$

Persamaan garis normal dititik (1,0) adalah :

$$y - 0 = \frac{1}{2}\ (x-1) \rightarrow y = \frac{1}{2}\ (x-1).$$

2. Dapatkan panjang subtangen,subnormal,tangen dan normal dari kurva $y= x^2$ pada titik (1,1).

Penyelesaian :




$f(x) = x^2$ ; $f^{I}(x) = 2x$

Untuk x = 1 → f(1) = 1,

$f^{I}(1) = 2$

Panjang subtangen :

$$\overline{ST} = \left|\frac{f(1)}{f^{I}(1)}\right| = \frac{1}{2}$$

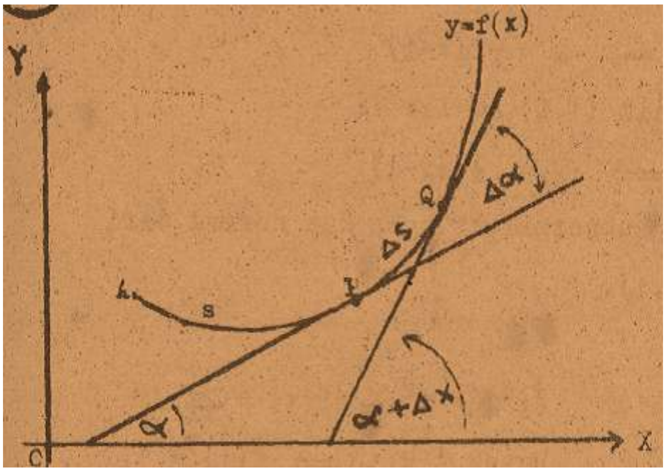
Panjang subnormal :

$$\overline{SN} = \left|f(1)\ f^{I}(1)\right| = (1)\ (2) = 2$$

Derivatif panjang busur :

1. $y= f(x)$ $\rightarrow \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (y^{I})^2}$
2. $\left.\begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \end{array}\right\} \rightarrow \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$
3. $r = f(\theta)$ $\rightarrow \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$

## 9. Kelengkungan




Kelengkungan dititik P :

$$\kappa \;= \lim_{Q\to P} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$$

$$\boxed{\kappa \;=\; \frac{d\alpha}{\Delta s}}$$

Jari-jari kelengkungan :

$$\boxed{\rho = \frac{1}{\kappa}}$$

1. $\underline{y = f(x)} \rightarrow \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+(y^{I})^2}$ ; tg $\alpha = y^{I} \rightarrow \alpha =$ arc tg $y^{I}$

$$\kappa \;= \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} \qquad\qquad \frac{d\alpha}{dx} = \frac{y^{II}}{1+(y^{I})^2}$$

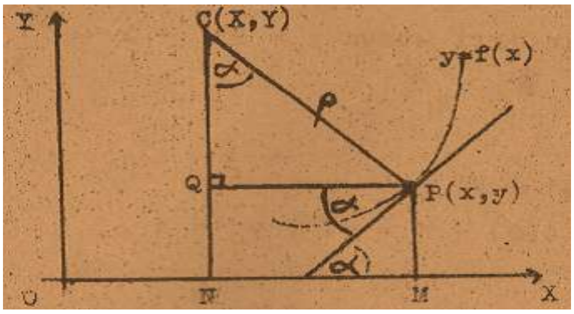
$$= \frac{y^{II}}{1+(y^{I})^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(y^{I})^2}} \rightarrow \kappa \;= \frac{y^{II}}{[1+(y^{I})^2]^{3/2}}$$

$$\boxed{\rho \;= \frac{1}{\kappa} = \frac{[1+(y^{I})^2]^{3/2}}{y^{II}}}$$

2. $\underline{\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}}$ $\rightarrow$ $\boxed{\kappa = \dfrac{g^{II}(t)\, f^{I}(t) - g^{I}(t)\, f^{II}(t)}{[\{f^{I}(t)\}^2 + \{g^{I}(t)\}^2]^{3/2}}}$

3. $\underline{r = f(\theta)}$ $\rightarrow$ $\boxed{\kappa = \dfrac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\,\frac{d^2r}{d\theta^2}}{[r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2]^{3/2}}}$

Pusat Kelengkungan.




tg $\alpha = y^{I} \rightarrow \sin\alpha \;= \dfrac{y^{I}}{\sqrt{1+(y^{I})^2}}$

$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+(y^{I})^2}}$

Pusat kelengkungan 0 (X,Y)

$X = x - PQ = x - \rho \sin\alpha$

$Y = y + CQ = y + \rho\cos\alpha$

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{[\,1+(y^{I})^2]^{3/2}}{y^{II}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} X &= x - \frac{y^{I}\,[\,1+(y^{I})^2\,]}{y^{II}} \\ Y &= y + \frac{1+(y^{I})^2}{y^{II}} \end{aligned}}$$

<u>Lingkaran Kelengkungan</u> : $\boxed{(x - X)^2 + (y - Y)^2 = \rho^2}$

<u>Evolute</u> :

TK ( tempat kedudukan ) pusat-pusat kelengkungan , didapat dengan eliminasi x dan y dari (1) , (2) , (3) berikut :

$$\boxed{\begin{aligned} y &= f(x) && (1) \\ X &= x - \frac{y^{I}\ 1+(y^{I})^2}{y^{II}} && (2) \\ Y &= y + \frac{1+(y^{I})^2}{y^{II}} && (3) \end{aligned}}$$

Contoh :

1. Dapatkan jari-jari kelengkungan ,kelengkungan ,pusat kelengkungan dan persamaan lingkaran kelengkungan dari kurva $y = 2x^2 - x + 3$ pada titik P (0,3).

   Penyelesaian :

   $$y = 2x^2 - x + 3\ ;\ y^{I} = 4x - 1\ ;\ y^{II} = 4$$

   Untuk $P(X_o,Y_o) = P(0,3) \rightarrow y^{I}_0 = 4(0) - 1 = -1\ ;\ y^{II}_0 = 4$

   Jari-jari kelengkungan :

   $$\rho = \frac{[\,1+(y^{I}_{o})^2\,]^{3/2}}{y^{II}} = \frac{[\,1+(-1)^2\,]^{3/2}}{4} = \frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

   Kelengkungan $\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

   Pusat kelengkungan (X,Y) dimana :

   $$X = x_o - \frac{y^{I}{}_o\,[\,1+(y^{I}_{o})^2\,]}{y^{II}{}_o} = 0 - \frac{(-1)\,[\,1+(-1)^2\,]}{4} = \frac{1}{2}$$

   $$Y = y_o + \frac{1+(y^{I}_{o})^2}{y^{II}{}_{o}} = 3 + \frac{1+(-1)^2}{4} = \frac{7}{2}$$

   Persamaan lingkaran kelengkungan :

   $(x - X)^2 + (y - Y)^2 = \rho^2$

$$( x - \tfrac{1}{2})^2 + ( y - \tfrac{7}{2})^2 = (\tfrac{\sqrt{2}}{2})^2 \rightarrow ( x - \tfrac{1}{2})^2 + ( y - \tfrac{7}{2})^2 = \tfrac{1}{2}$$

2. Dapatkan evolute dari parabola $y^2 = x$

Penyelesaian :

$y^2 = x \rightarrow 2yy^I = 1 \rightarrow y^I = \frac{1}{2y}$

$2yy^{II} + 2(y^I)^2 = 0 = y^{II} = \frac{(y^I)^2}{y} = \frac{1}{4y^3}$

(X,Y) koordinat pusat kelengkungan untuk titik (x,y) ; dimana :

$$X = x - \frac{y^I\,[1+(y^I)^2]}{y^{II}} = y^2 - \frac{\frac{1}{2y}[1+(\frac{1}{2y})^2]}{-\frac{1}{4y^3}} = 3y^2 + \frac{1}{2}$$

$$Y = y + \frac{1+(y^I)^2}{y^{II}} = y + \frac{1+(\frac{1}{2y})^2}{-\frac{1}{4y^3}} = -4y^3$$

Evolute diperoleh dengan eliminasi x dan y dari persamaan (1), (2) , (3) berikut ini :

$$\left.\begin{array}{lll} (1).\ y^2 & = x & \\ (2).\ X & = 3y^2 + \frac{1}{2} & \rightarrow (X - \frac{1}{2})^3 = 27y^6 \\ (3).\ Y & = -4y^3 & \rightarrow \frac{y^2}{16} = y^6 \end{array}\right\} \text{Maka persamaan Evolute}$$

$$( X - \tfrac{1}{2})^3 = 27\,(\tfrac{y^2}{16}) \text{ atau } Y^2 = \tfrac{16}{27}( X - \tfrac{1}{2})^3$$

=============

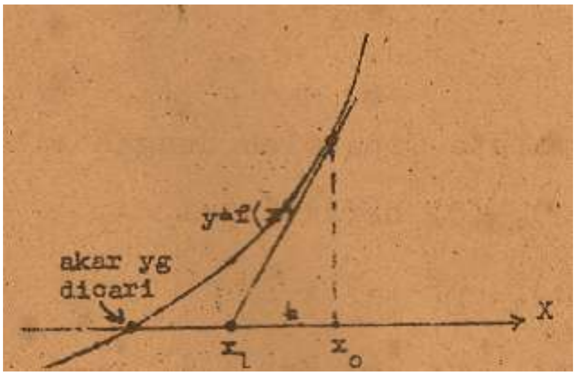
## 10. Penyelesaian akar-akar persamaan f (x) = 0.

### 1). Metode Newton-Raphson.

Pandang persamaan f (x) = 0

Jika f $(x_1) > 0$ dan f $(x_2) < 0$ atau f $(x_1) < 0$ dan f $(x_2) > 0$

Maka ada akar real yang terletak diantara $x_1$ dan $x_2$. Metoda Newton – Raphson : Kurva y = f (x) memotong sumbu x pada sebuah titik ,ini akar yang dicari .




Ambil nilai $x = x_0$ yang dekat Pada akar yang dicari,maka f $(x_0)$ mendekati nol. Garis singgung pada $x = x_0$ memotong sumbu x pada titik $x = x_1$ , demikian hingga $x_0 - x_1 = h$.

$f^I(x_0) = \frac{f(x_0)}{h} \rightarrow \frac{f(x_0)}{f^I(x_0)}$

jadi jika $x_0$ dekat pada akar itu,maka :

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f^I(x_0)}$ adalah lebih dekat kepada akar itu.

Proses ini diulangi ,didapat rumus Newton-Raphson

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f^I(x_n)}} \qquad ; (\ n = 0,1,2,3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ )$$

<u>Contoh</u> :

Dapatkan akar real yang terletak diantara 0 dan 10 dari persamaan $4 + 5x^2 - x^3 = 0$ cukup s/d 3 angka dibelakang koma ( 3 D ).

<u>Penyelesaian</u> : Dibuat tabel nilai-nilai dari $f(x) = 4 + 5x^2 - x^3$

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f ( x ) | 4 | 8 | 16 | 22 | 20 | 4 | -32 |

Tampak ada akar real di dekat x = 5 , maka diambil sebagai $x_o = 5$.

$f^I(x) = 10x - 3x^2$

$$x_1 = x_o - \frac{f(x_o)}{f^I(x_o)} = 5 - \frac{4 + 5(5)^2 - 5^3}{10(5) - 3(5)^2} = 5 + 0.6 = 5.16$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f^I(x_1)} = 5.16 - \frac{-0.2}{-28.2} = 5.153$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f^I(x_2)} = 5.153 - \frac{-0.06267}{-28.13} = 5.151$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f^I(x_3)} = 5.151 - \frac{-0.007478}{-28.088} = 5.15073$$

$$= 5.151 \text{ (s/d 3D)}$$

∴ Akar yang dimaksud <u>x = 5.151</u>

2). **<u>Metode Iterasi.</u>**

Dari persamaan f (x) = 0 ditulis menjadi x = h(x).

Dibentuk relasi berulang $x_{n+1} = h(x_n)$ dan andaikan $x_o$ akar pendekatan kasar untuk akar real a yang akan dicari. Dari relasi berulang itu disusun banjar nilai-nilai :

$$x_o , x_1 , x_2 , \ldots\ldots\ldots$$

Andaikan :

$x_o = a + \varepsilon_o$ , $x_1 = a + \varepsilon_1$ , $x_2 = a + \varepsilon_2$ , ............ $x_k = a + \varepsilon_k$ , .....................

dimana $\varepsilon_k$ adalah selisih antara akar pendekatan $x_k$ dengan nilai benar a . Maka banjar $x_o$ , $x_1$ , $x_2$ , ..... akan menuju ke a jika untuk suatu k , $|\varepsilon_k| > |\varepsilon_{k+1}| > |\varepsilon_{k+2}| >$ .......... $|\varepsilon_n| \rightarrow 0$

Sekarang dari :

$$x_{n+1} = h(x_n)$$

Maka didapat :

$$a + \varepsilon_{n+1} = h(a + \varepsilon_n)$$

Kemudian bagian kanan dikembangkan menurut deret Taylor ,diperoleh :

$$a + \varepsilon_{n+1} = h(a) + \varepsilon_n h^{I}(a) + \frac{1}{2}\varepsilon_n^{2} h^{II}(a) + \frac{1}{3!}\varepsilon_n^{3} h^{III}(a) + \dots\dots\dots$$

Suku-suku ketiga dst .diabaikan (karena $\varepsilon_n$ cukup kecil ) , maka diperoleh :

$$\varepsilon_{n+1} \simeq \varepsilon_n h^{I}(a)$$

Tampak bahwa jika $|h^{I}(a)| < 1$ maka tiap ε akan menjadi kurang dari pada yang didepannya sehingga banjar $x_o$ , $x_1$ , $x_2$ , ...... akan menuju ke a.

Jadi proses iterasi ini akan segera selesai (konvergen) jika dipenuhi syarat untuk akar pendekatan awal $x_o$ ,

$$\boxed{|h^{I}(x_o)| < 1}$$

<u>Contoh</u> : Dapatkan cukup s/d 5D saja akar penghampiran didekat 0.5 dari persamaan sin x = 5x – 2.

<u>Penyelesaian</u> :

Tulislah persamaan itu menjadi $x = \frac{1}{5}(\sin x + 2)$

Disini $h(x) = \frac{1}{5}(\sin x + 2)$ , $h^{I}(x) = \frac{1}{5}\cos x$.

$x_o = 0.5 \rightarrow h^{I}(0.5) = \frac{1}{5}\cos 0.5 = 0.2 \rightarrow |h^{I}(0.5)| < 1$

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \tfrac{1}{5}(\sin x_n + 2) \rightarrow x_1 &= \tfrac{1}{5}(0.479 + 2) = 0.496 \\ x_2 &= \tfrac{1}{5}(2.4759) = 0.4952 \\ x_3 &= \tfrac{1}{5}(2.475208) = 0.495042 \\ \left.\begin{aligned} x_4 &= \tfrac{1}{5}(2.475069) = 0.495014 \\ x_5 &= \tfrac{1}{5}(2.475044) = 0.495009 \end{aligned}\right\} &\therefore x = 0{,}49501 \end{aligned}$$