Universitas Esa Unggul

Smart, Creative and Entrepreneurial

www.esaunggul.ac.id

LIMIT FUNGSI
PERTEMUAN 5

KEMAMPUAN AKHIR YANG DIHARAPKAN

Mahasiswa mampu untuk menganalisis serta menerapkan konsep limit fungsi

DEFINISI

LIMIT FUNGSI

- Limit merupakan salah satu pengetahuan dasar untuk memahami integral dan diferensial
- Limit dapat digunakan untuk menjelaskan pengaruh variabel fungsi yang bergerak mendekati suatu titik terhadap fungsi tersebut
- Limit f (x) ketika x mendekati c sama dengan L , dapat ditulis

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

- Suatu barisan dikatakan memiliki limit jika untuk setiap bilangan $\in > 0$ dapat diberi suatu nomor indeks n_0 sedemikian sehingga untuk $n \geq n_0$ berlaku $l - \in < c_n < l + \in$ atau dapat ditulis $|c_n - l| < \in$
- Artinya jika l adalah limit dari c_n mendekati l jika n mendekati tak hingga
- Ditulis $c_n \to 1$, jika $n \to \infty$ atau $\lim_{n \to \infty} c_n = 1$

Suatu barisan disebut konvergen jika barisan itu mempunyai limit dan hal lain disebut konvergen

LIMIT FUNGSI

Perhatikan contoh berikut :

Fungsi $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$, untuk x ∈ Real.

Tabel A

x	0	1,1	1,5	1,9	1,999	2,000	2,001	2,01	2,5	2,7
$f(x)$	1	2,1	2,5	2,9	2,999	???	3,001	3,01	3,5	3,7

Dari tabel A diatas, dapat disimpulkan bahwa $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$ mendekati 3, dan jika x mendekati 2, baik dari kanan (limit kanan) maupun dari kiri (limit kiri) maka nilainya mendekati 3

Suatu fungsi real y = f (x) dikatakan mempunyai limit l pada x = a, jika untuk bilangan ∈ > 0 (bagaimanapun kecilnya) terdapat bilangan $\delta > 0$, sedimikian sehingga |f(x)-l| < ∈ untuk |x-a| < δ

Secara ilmu ukur dapat digambarkan y = f (x) didefinisikan pada

$x_1 < x < x_2$

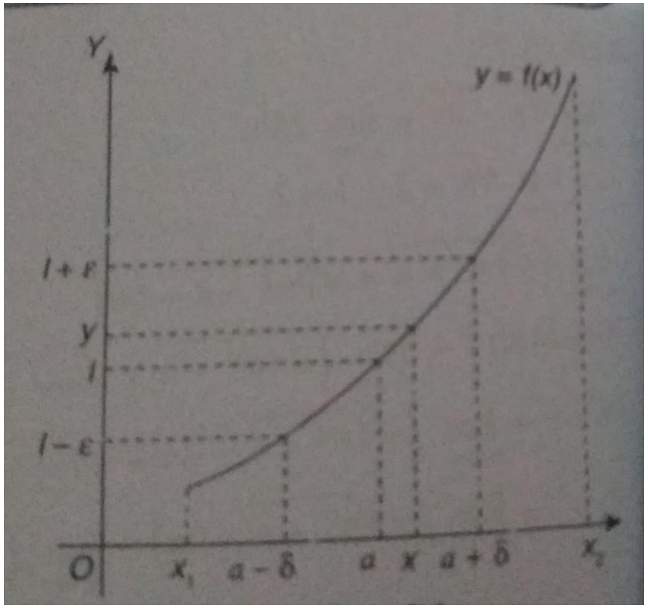
$|x-a| < \delta \leftrightarrow a - \delta < x < a + \delta$

$|y-l| < \in \leftrightarrow l - \in < y < l + \in$

Definisi diatas dengan singkat ditulis $\lim_{x \to a} f(x) = 1$

Berarti $f(x) \to l$ jika $x \to a$

l dan a bilangan real, boleh tak berhingga



Dengan cara yang sama, didapat pengertian-pengertian lain seperti

$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$ berarti $f(x) \to l$, jika $x \to \infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ berarti $f(x) \to l$, jika $x \to -\infty$

Atau ditulis sebagai lim f(x) = 1

$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ berarti $f(x) \to \infty$, jika $x \to a$, dapat dikatakan limitnya tak ada atau

mempunyai limit yang tak sebenarnya $+\infty$ Disini berarti: untuk M > 0 (bagaimanapun besarnya) terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga f(x) > M jika |x-a| < δ

- $\lim_{x \to a^+} f(x) = l$ disebut limit kanan, artinya jika $x \to a$ dari sebelah kanan maka $f(x) \to 1$

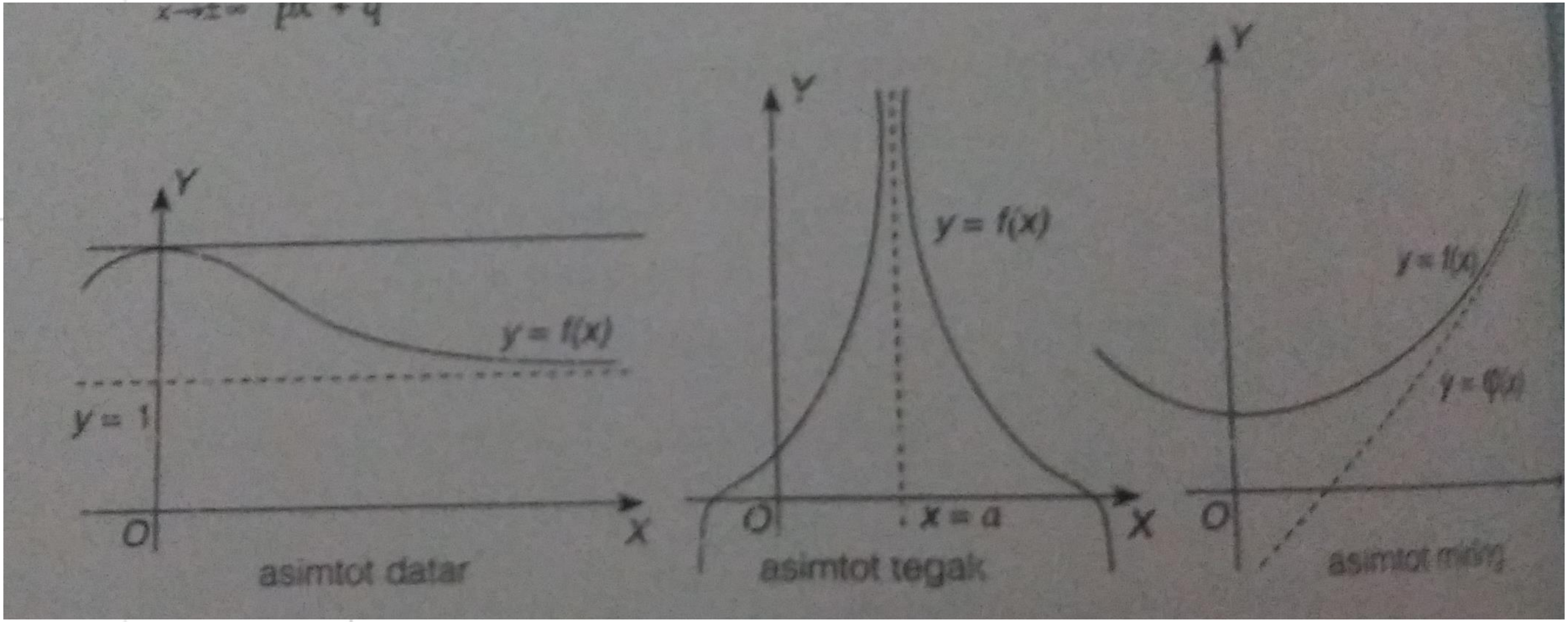
- $\lim_{x \to a^-} f(x) = 1$ disebut limit kiri, artinya jika $x \to a$ dari sebelah kiri maka $f(x) \to 1$

Pengertian ini sesuai dengan definisi pertama diatas, berlaku untuk x < a, maka y mempunyai suatu limit pada x = a jika berlaku limit kiri = limit kanan pada x = a tersebut, atau

$$\lim_{x \to a} f(x) = 1 \leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = 1$$

Asimtot suatu kurva adalah sebuah garis lurus g yang letaknya sedemikian sehingga lambat laun jarak antara titik-titik pada kutva tersebut dengan g lebih kecil dari ruas garis mana pun, tetapi tidak menjadi nol. Asimtot identik dengan garis singgung yang titik singgungnya terletak di tak hingga. Berikut ini beberapa asimtot:

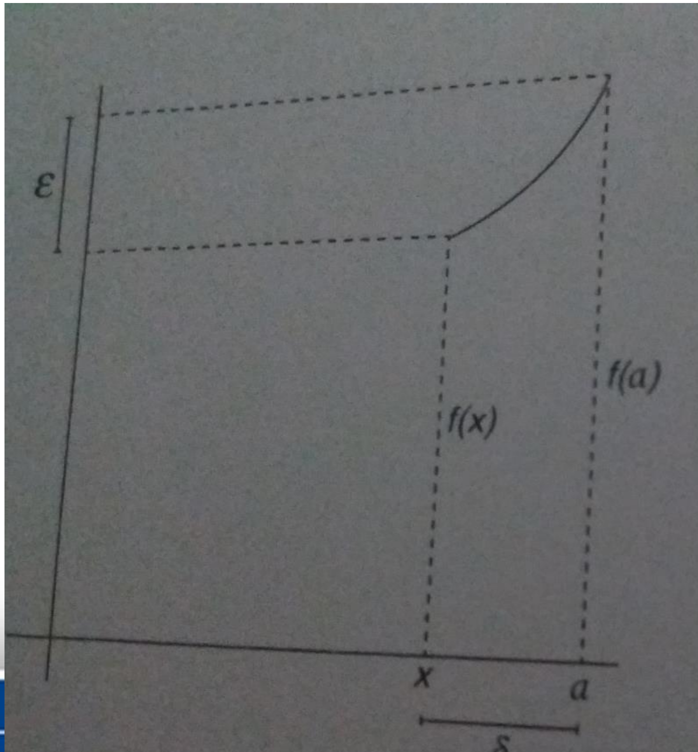
1. Asimtot datar dari y = f(x), yaitu y = lim f(x) = l, l hingga
2. Asimtot tegak dari y = f(x) adalah x = a dimana berlaku lim f(x) = +∞. Jika $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, suatu fungsi pecahan, maka $y \to \pm\infty$, jika $Q(x) \to 0$. Misalkan $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \ldots (x - a_n)$ maka $x_1 = a_1$ (i = 1, 2, 3,…., n) adalah asimtot tegak dari y = f(x)
3. Asimtot miring: fungsi pecahan $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$; a, p ≠ 0. Dapat ditulis sebagai $y = \varphi(x) + \frac{A}{px + q}$, dimana $\varphi(x)$ adalah hasil bagi yang merupakan fungsi linenar, sedangkan $\frac{A}{px + q}$ adalah asimtot miring



Y
y = f(x)
y = 1
O
X
asimtot datar
Y
y = f(x)
O
x = a
X
asimtot tegak
Y
O
asimtot miring

Sebuah fungsi y = f(x) dikatakan kontinu pada x = a, jika untuk suatu bilangan $\in > 0$ (bagaimanapun kecilnya)dapat ditemukan bilangan $\delta > 0$, sedemikian sehingga $|f(x) = f(a)| < \in$ untuk $|x - a| < \delta$. Dengan perkataan lain: f(x) kontinu pada x = a, jika ketiga syarat-syarat dibawah ini terpenuhi

1. f(a) terdefinisi
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ada
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$



Secara ilmu ukur, fungsi kontinu mempunyai sifat-sifat berikut:

1. Dalam menggambar grafik y = f(x) yang kontinu, maka setiap dua titik (a, f(a)) dan (b, f(b)) dihubungkan oleh sebuah busur yang tidak terputus
2. Jika f(a) dan f(b) berbeda tanda, maka grafik y = f(x) memotong sumbu x paling sedikit satu kali dan persamaan f(x) = 0 paling sedikit mempunyai satu akar antara x = a dan x = b
3. Misalkan daerah definisi D dari fungsi adalah suatu interval tertutup $a \leq x \leq b$. f(x) kontinu pada $a \leq x \leq b$, jika f(x) kontinu pada $a \leq x \leq b$, jika f(x) kontinu pada $a < x < b$ dan jika $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(b)$

1. Jika f(x) kontinu pada $a \leq x \leq b$ dan jika $f(a) \neq f(b)$, maka untuk bilangan c antara f(a) dan f(b) terdapat paling sedikit satu nilai $x = x_0$, sehingga $f(x_0) = c$

LIMIT FUNGSI

Contoh 1

1. Tentukan nilai dari $\lim_{x \to 3} 4x - 3$?

Penyelesaiannya :

$$\lim_{x \to 3} 4x - 3 = 4 \,.\, 3 - 3$$

$$= 12 - 3$$

$$= 9$$

Jadi, nilai $\lim_{x \to 3} 4x - 3 = 9$

LIMIT FUNGSI

- Selain cara diatas, kita dapat menentukkan nilai limit fungsi yang beragam macamnya dengan beberapa metode

- Diantaranya metode substitusi, metode faktorisasi dan metode perkalian sekawan

A. Metode Substitusi

yaitu mensubstitusikan nilai x pada limit fungsi tersebut

LIMIT FUNGSI

- Contoh metode substitusi :

Tentukan $\lim_{x \to 3} 2x+4$ dan $\lim_{x \to 3} x^2+2x-8$

Penyelesaian :

$\lim_{x\to 3} 2x + 4 = 2\ .\ (3) + 4 = 6 + 4 = 10$

$\lim_{x\to 3} x^2 + 2x - 8 = (3)^2 + 2\ .\ (3) - 8 = 9 + 6 - 8 = 7$

Jadi, nilai $\lim_{x\to 3} 2x + 4 = 10$ dan nilai $\lim_{x\to 3} x^2 + 2x - 8 = 7$

LIMIT FUNGSI

B. Metode Faktorisasi

Jika suatu limit fungsi berbentuk pecahan dan didalamnya terdapat persamaan kuadrat maupun persamaan pangkat tinggi maka penyelesaiannya yaitu memfaktorkan persamaan tersebut sehingga mempermudah dalam menentukan nilai limit fungsi

LIMIT FUNGSI

- Contoh metode faktorisasi :

Tentukan $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-2x-3}{x-3}$ dan $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$

Penyelesaian :

$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-2x-3}{x-3}$ untuk x, maka nilai limitnya $= \frac{3^2-2.(3)-3}{3-3} = \frac{0}{0}$

Sehingga, untuk menentukkan nilai limit tersebut yaitu dengan metode faktorisasi.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-2x-3}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+1)}{x-3} = \lim_{x \to 3}(x+1) = 3+1 = 4$$

Jadi, nilai $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-2x-3}{x-3} = 4$

LIMIT FUNGSI

$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$ untuk x = 2, maka nilai limitnya = $\frac{2^3-8}{2-2} = \frac{0}{0}$

Karena jika dengan cara substitusi langsung hasilnya $\frac{0}{0}$, maka harus dengan metode faktorisasi

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\,(x^2+2x+4)}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x^2 + 2x + 4) = 2^2 + 2\,.(2) + 4 = 12$$

Jadi, nilai $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = 12$

Ingat !

$$f\ (x) \neq \frac{0}{0}$$

Nilai suatu limit fungsi tidak boleh $\frac{0}{0}$ karena tak terdefinisi. Sehingga harus menggunakan cara lain jika hasilnya demikian.

LIMIT FUNGSI

C. Metode Perkalian Sekawan

Metode perkalian sekawan digunakan jika limit pecahan tersebut terdapat akar

LIMIT FUNGSI

- Contoh metode perkalian sekawan :

Contoh 4

$$\text{Tentukan } \lim_{x\to 3} \frac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}} \text{ dan } \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{t}-2}{t-4}$$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to 3} \frac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}} \text{ untuk } x = 3 \text{, nilai limitnya } = \frac{9-3^2}{4-\sqrt{3^2+7}} = \frac{9-9}{4-\sqrt{16}} = \frac{0}{0}$$

$$\text{Maka, } \lim_{x\to 3} \frac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}} = \lim_{x\to 3} \frac{16-(x^2+7)}{4-\sqrt{x^2+7}} = \lim_{x\to 3} \frac{\left(4-\sqrt{x^2+7}\right)\left(4+\sqrt{x^2+7}\right)}{4-\sqrt{x^2+7}}$$

$$= \lim_{x \to 3} (4 + \sqrt{x^2 + 7}) = 4 + \sqrt{9 + 7} = 4 + \sqrt{16} = 4 + 4 = 8$$

Jadi, nilai $\lim_{x \to 3} \frac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}} = 8$

$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{t}-2}{t-4}$ untuk t=4, maka nilainya= $\frac{\sqrt{4}-2}{4-4} = \frac{0}{0}$

Maka, $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{t}-2}{t-4} = \frac{\sqrt{t}-2}{(\sqrt{t}-2)(\sqrt{t}+2)} = \frac{1}{\sqrt{t}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$

Jadi nilai $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{t}-2}{t-4} = \frac{1}{4}$

APLIKASI LIMIT FUNGSI

- Soal :

Jika diketahui $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ dan $g(x) = 5 - 3x$. Tentukan :

a. $\lim\limits_{x\to 2} 3\,f(x)$

b. $\lim\limits_{x\to 2} \left(f(x) + g(x)\right)$

c. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

APLIKASI LIMIT FUNGSI

- Jawab :

a. $\lim\limits_{x \to 2} 3\, f(x) = \lim\limits_{x \to 2} 3(x^3 + 2x^2 - 1)$

$$= 3 \,.\, \lim_{x \to 2} (x^3 + 2x^2 - 1)$$

$$= 3 \,.\, (\lim_{x \to 2} x^3 + \lim_{x \to 2} 2x^2 - \lim_{x \to 2} 1)$$

$$= 3 \,.\, (2^3 + 2 \,.\, (2)^2 - 1)$$

$$= 3 \,.\, (8 + 8 - 1)$$

$$= 3 \,.\, (15)$$

$$= 45$$

Jadi, nilai $\lim\limits_{x \to 2} 3(x^3 + 2x^2 - 1) = 45$

APLIKASI LIMIT FUNGSI

- Jawab :

b. $$\lim_{x\to 2}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to 2}\left((x^3+2x^2-1)+(5-3x)\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}(x^3+2x^2-1)+\lim_{x\to 2}(5-3x)$$

$$=\left(\lim_{x\to 2}x^3+\lim_{x\to 2}2x^2-\lim_{x\to 2}1\right)+\left(\lim_{x\to 2}5-\lim_{x\to 2}3x\right)$$

$$=(2^3+2\,.\,(2)^2-1)+(5-3\,.\,(2))$$

$$=(8+8-1)+(5-6)$$

$$=15+(-1)$$

$$=14$$

Jadi nilai $\lim_{x\to 2}(x^3+2x^2-1)+\lim_{x\to 2}(5-3x)=14$

APLIKASI LIMIT FUNGSI

- Jawab :

c. $$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$$

$$= \frac{2^3 + 2\,.\,(2)^2 - 1}{5 - 3.(2)}$$

$$= \frac{8 + 8 - 1}{5 - 6}$$

$$= \frac{15}{-1}$$

$$= -15$$

Jadi, nilai $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = 15$

- LATIHAN :

Tentukan nilai dari limit berikut ini :

a. $\lim_{x\to 2} 5x + 2$ b. $\lim_{x\to 2} \frac{x-4}{x^2+1}$ c. $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2}$