MODUL ONLINE 4
ESA143 - MATEMATIKA

Materi 5

TURUNAN (DIFFERENSIAL)

Disusun Oleh

TEAM DOSEN

Universitas Esa Unggul

BAHAN 7

☑ **TURUNAN FUNGSI (DERIVATIVES OR DIFFERENTIATIONS)**

☑ **LANJUTAN TURUNAN FUNGSI**
(DERIVATIVE OR DIFFERENTIATION) :
PARTIAL DERIVATIVE, TOTAL DIFFERENTIAL,
TOTAL DERIVATIVE

Bahan 7.1.

TURUNAN FUNGSI
(FUNCTION DERIVATIVES OR DIFFERENTIATIONS)

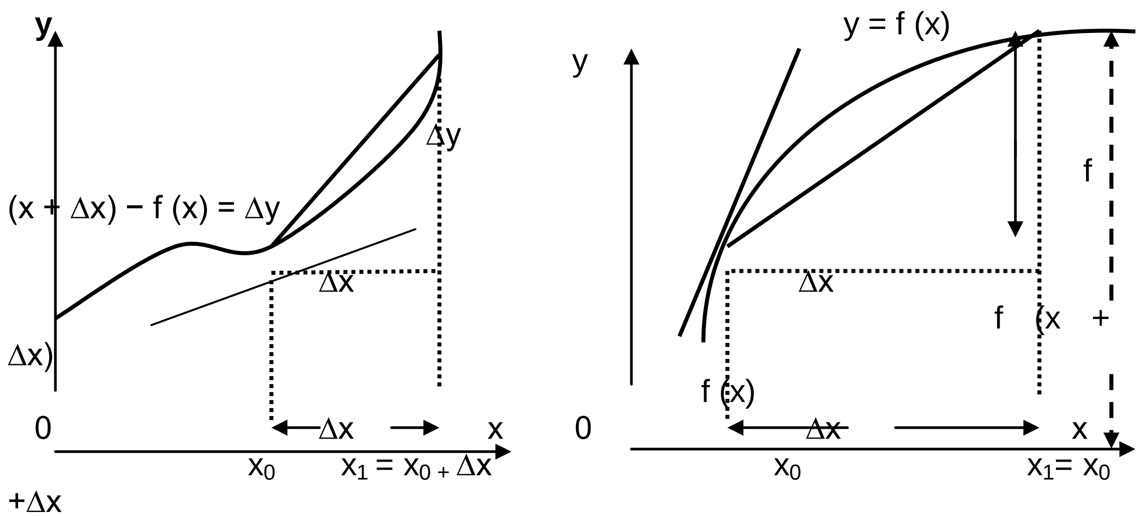
1. The Difference Quotient

Fungsi (a primitive function) : $y = f(x)$

Kemudian, nilai fungsi atau dependent variable y berubah dari $y_0 = f(x_0)$ ke $y_1 = f(x_1)$, karena nilai independent variable x berubah dari x_0 ke x_1.
Maka timbul : $\Delta y/\Delta x$
yaitu perubahan pada varabel y karena perubahan per unit atau 1 unit pada variabel x (the change in y per unit of change in x), yang dinyatakan dengan istilah **the difference quotient** :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta X} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x} = \frac{change\, in\ y}{change\, in\ x}$$

Diagram : The Difference Quotient atau the Function Slope



Contoh :

y = f (x) = 3 x^2 − 4 → a primitive function

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x} = \frac{\{3(x_0 + \Delta x)^2 - 4\} - \{3x_0^2 - 4\}}{\Delta x} = =$$

$$= \frac{6\, x_0\, \Delta x + 3\, (\Delta x)^2}{\Delta x} = 6\, x_0 + 3\, \Delta x = 6.3 + 3.4 = 30$$

apabila x_0 = 3 dan Δx = 4

Artinya, secara rata-rata, perubahan x dari 3 ke 7 menyebabkan perubahan pada fungsi atau y sebesar 30 unit untuk setiap unit perubahan x atau per unit perubahan x.

2. The Derivative

Derivatif (the derivative) menyatakan tingkat perubahan nilai fungsi atau dependent variable y untuk perubahan independent variable x sekecil-kecilnya mendekati 0 (nol) atau $\Delta x \to 0$, yaitu :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x}$$

Dibaca :

Apabila, perubahan x mendekati 0 atau $\Delta x \to 0$, limit dari the difference quotient terjadi (exist) atau mendekat nilai fungsi pada x_0, maka limit itu disebut **derivative (the derviative)**.

If, as Δx approaches zero or $\Delta x \to 0$, the limit of the difference quotient $\Delta y/\Delta x$ indeed exists, that limit is called the derivative of the function $y = f(x)$.

Contoh :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 6\, x_0 + 3\, \Delta x = 6\, x_0 = 6.\,3 = 18$$

Penjelasan :

- ☑ The derivative terjadi (exist) apabila $y = f(x)$ merupakan fungsi yang kontinyu (continuous) pada nilai variabel x sebesar x_0. Jadi *differentiable* berarti kontinyu, sebaliknya tidak berlaku.
  Atau suatu fungsi yang differentiable pada titik $x = x_0$, apabila fungsi mempunyai derivatif dan berarti kontinyu pada titik itu.

  A function which is differentiable at every point in its domain, it must be continuous in its domain. That is, differentiability implies continuity. Yet, the converse is not true.
  Lihat **C**&W (Book 1) Ch. 6 hal. 143-146).

- ☑ Derivatif (derivative) adalah turunan atau perubahan dari dependent variable (fungsi) karena perubahan (sekecil apapun) dari setiap independent variable.
  Seperti terlihat pada Diagram di atas, derivatif adalah **the slope** dari fungsi $y = f(x)$ pada setiap titik x.

Istilah derivative mempunyai sama arti dengan istilah **differentiation** atau **derivation**.
Turunan atau perubahan dependent variable dimaksud mempunyai order : kesatu (the first derivative), kedua (the second derivative), dan seterusnya.

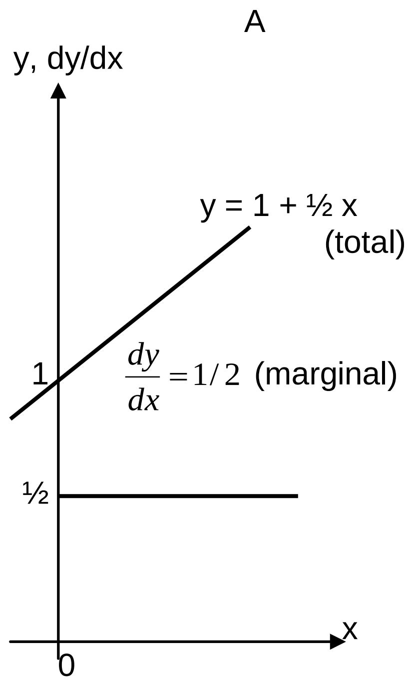
A derivative of the function y = f(x) is the limit of ∆y/∆x for every small changes in x, and it is denoted as dy/dx or f'(x), etc.
The term of derivative is the same as derivation or differentiation.
There are the first derivative, the second derivative, and further order derivatives on.
Lihat **C**&W (Book 4) Ch. 6 hal. 143-146).

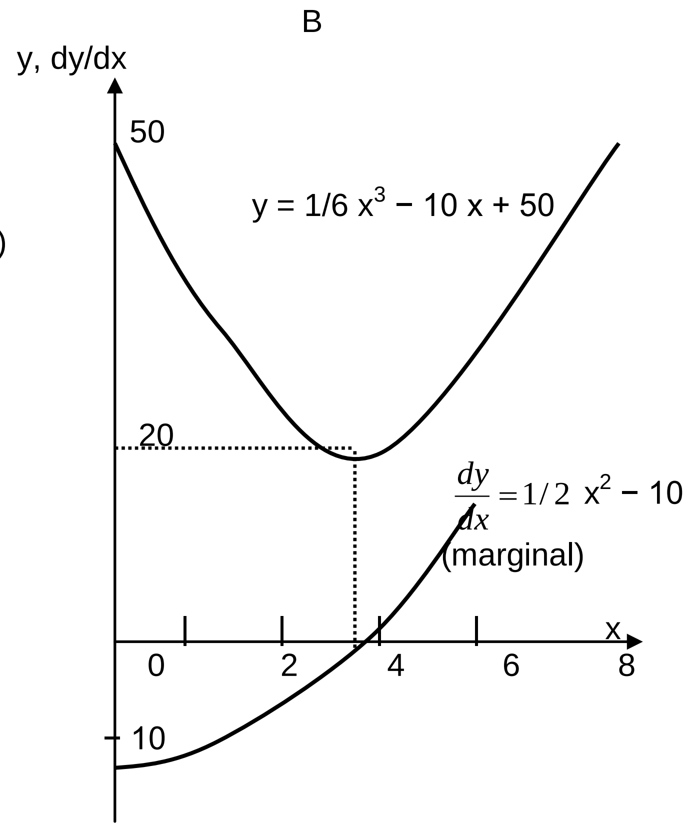
☑ Notasi derivatif :

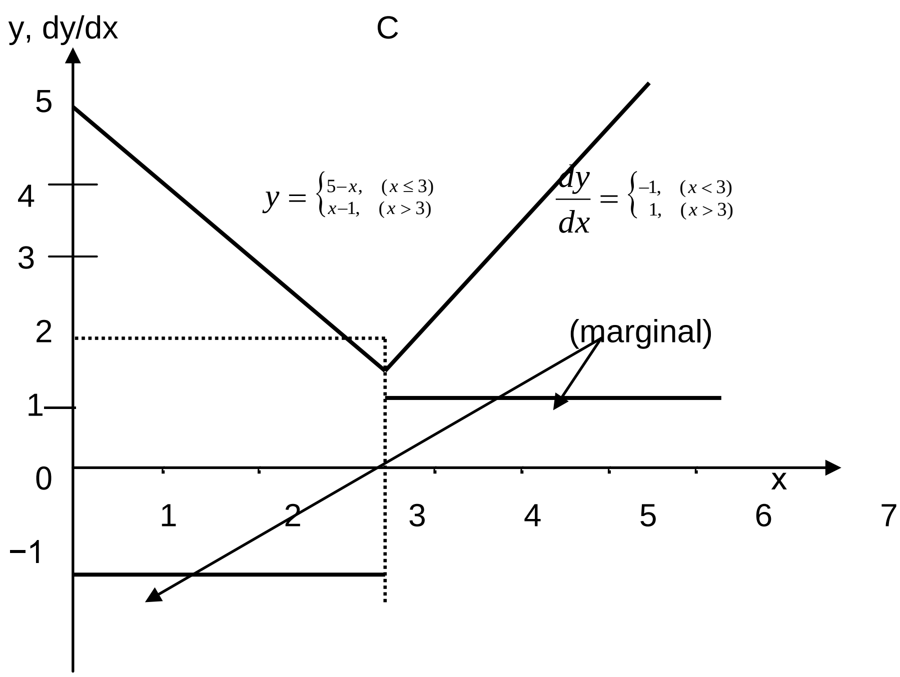
$$\frac{dy}{dx},\quad \frac{d}{dx}y,\quad D_x y,\quad y',\quad f'(x),\quad \frac{d}{dx}f(x)$$

☑ The derivative juga merupakan suatu fungsi atau fungsi turunan (a derived function) dari fungsi asal (a primitive function) seperti di atas yaitu y = f (x).

3. Kurva fungsi dan marginal atau derivative







4. Aturan derivatif dari fungsi dengan 1 (satu) independent variable (derivative rules for functions of one independent variable)

1). Constant function rule

$$y = f(x) = k = k.x^0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) = 0.\ k.\ x^{0-1} = 0$$

2). Power function rule

$$y = f(x) = c\ x^n \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) = c.\ n.\ x^{n-1}$$

3). Sum difference rule

$$y = f(x) + g(x) + h(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) + g'(x) + h'(x) = 2ax + b$$

4). Product rule

$$y = f(x)g(x) = (2x - 3)(x + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 2(x + 1) + (2x - 3)1$$

5). Quotient rule

$$y = f(x) / g(x) = (2x - 3) / (x + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$$

$$= \frac{2\ .\ (x + 1) - (2x - 3)\ .\ 1}{(x + 1)^2} = \frac{5}{(x + 1)^2}$$

6). Chain rule : derivatives for functions of different variables

$$z = f(y) \text{ while } y = g(x) \text{ --- } z = f(g(x)) = y^{17} = (x^2 + 3x - 2)^{17}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = f'(y).g'(x) = 17y^{16}.g'(x) = 17(x^2+3x-2)^{16}.(2x+ 3)$$

5. Derivatives dari fungsi pangkat dan fungsi logaritma (derivatives of exponential and logarithmic functions)

1). Exponential function

☑ $y = e^{f(t)} \longrightarrow \dfrac{dy}{dt} = f'(t)\, e^{f(t)}$

Misal : $y = A e^{rt} \longrightarrow \dfrac{dy}{dt} = r A e^{rt}$

☑ $y = f(t) = b^{f(t)} \longrightarrow \dfrac{dy}{dt} = f'(t)\, b^{f(t)} \ln b$

Misal : $y = f(t) = A b^{rt} \longrightarrow \dfrac{dy}{dt} = r A b^{rt} \ln b$

2). Logarithmic (log) functions

☑ $y = \ln f(t) \longrightarrow \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{f(t)} f'(t)$

$y = \log_b f(t) \longrightarrow \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{f(t)} f'(t) \dfrac{1}{\ln b}$

Contoh :

✪ $y = k \ln at \longrightarrow \dfrac{dy}{dt} = k \dfrac{1}{at} a = \dfrac{k}{t}$

✪ $y = \ln t^c \longrightarrow \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{ct^{c-1}}{t^c} = \dfrac{c}{t}$

✪ $y = e^{t \ln b} \longrightarrow \dfrac{dy}{dt} = (\ln b)(e^{t \ln b}) = b^t \ln b$

✪ $y = \log_b t \longrightarrow \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{t \ln b}$

6. Soal latihan

1). $y = x^3 + 2x - 3$

2). $y = \dfrac{2x-1}{2x+1}$

3). $y = \dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$

4). $y = (2x + 1)^2 + 3$

5). $s = t^3 - 3t^2$ dimana s adalah *velocity* diukur dalam ms^{-1} atau dalam meter dan detik

6). $f(x) = \begin{cases} x\,e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Buktikan :

- ✪ f(x) continuous pada x = 0
- ✪ f(x) punya derivatif pada x = 0

7). $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & 0 \le x \le 2 \\ x^2-3, & 2 \le x \le 4 \end{cases}$

Buktikan :

- ✪ Continuity
- ✪ Differentiability

8). Soal-soal lainnya

1. TFC = f (Q) = 7 2. y = f (x) = a + b x 3. $y = 3x^{-2} + 4\sqrt{x} - 7x^{2/3}$ 4. $y = g(x) = (2x + 3)(3x^2)$ 5. $y = f(x) / g(x) = (2x - 3)/(x + 1)$ 6. $y = (ax^2 + b) / cx$ 7. $z = 3(2x + 5)^2$ 8. $Y = F(X) = (X - 1)/(X^2 + 2X + 4)$ 9. Y = A / X 10. Q = Q (P) = a − b P 11. Q = − 4 + 3 P	14. $z = g(w) = b_0 + b_1 w + b_2 w^2$ 15. $C = C(Q) = k_0 + k_1 Q + k_2 Q^2 + k_3 Q^3$ 16. $C = 0{,}04\,Q^3 - 0{,}9\,Q^2 + 10\,Q + 5$ 17. $TVC = aQ + b\,Q^2 + c\,Q^3$ 18. $AVC = TVC/Q = a + b\,Q + c\,Q^2$ (buktikan dengan sum dan quotient rules) 19. $MC = k(Q) = a + 2b\,Q + 3c\,Q^2$ 20. $TR = R(Q) = 7\,Q - 0{,}01\,Q^2$ 21. AR = TR/Q = 7 − 0,02 Q (buktikan dengan sum dan quotient rules) 22. $y = f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

12. $P = P(Q) = -c/d + (1/d)P$ 13. $Q = -5 + 4P + P^2$	23. $h = h(g) = g^4 + 5/2\,g^3 - 11/2\,g^2 - 10g + 6$ 24. $Z = Z(G) = 2G^4 + 5G^3 - 11G^2 - 20g + 12$

Fungsi-fungsi exponential dan logarithma

1. $y = 4^{3x}$ 2. $y = 6e^{-2t}$ dan $y = Ae^{rt}$ 3. $y = b^{12-x}$ 4. $y = \exp(ax^2 + bx + c)$ 5. $A(t) = Ve^{-rt} = Ke^{\sqrt{t}}e^{-rt} = Ke^{-rt+\sqrt{t}}$	6. $y = x^2 / \{(x+3)(2x+1)\}$--- dengan ln 7. $y = x^3 \ln x^2$ 8. $U = q_1^6 q_2^4 + 1{,}5 \ln q_1 + \ln q_2$ 9. $U = b_1 \ln(q_1 - \gamma_1) + b_2 \ln(q_2 - \gamma_2)$ 10. $C = 0.04q^3 - 0{,}9q^2 + (10 - \ln k)q + 8k^2$

Bahan 7.2.

TURUNAN (DERIVATIVES) DARI FUNGSI DENGAN LEBIH DARI 1 (SATU) INDEPENDENT VARIABLE : PARTIAL DERIVATIVES, TOTAL DIFFERENTIALS, TOTAL DERIVATIVES

1. TURUNAN PARSIAL (PARTIAL DERIVATIVES) DARI FUNGSI DENGAN LEBIH DARI 1 (SATU) INDEPENDENT VARIABLE

Partial derivatives adalah derivatives dependent variable (fungsi) karena perubahan hanya satu independent variable sementara satu independent variable lainnya dianggap tetap.

Fungsi : $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ --- $y = f(n_j)$ dimana $i = 1, 2, 3, \dots, n$

Derivatives : $f_j = \dfrac{\partial y}{\partial x_j}$

Contoh :

$$y = 3(x_1)^2 + x_1 x_2 + 4(x_2)^2$$

$$f_1 = 6x_1 + x_2 \; ; \quad f_2 = x_1 + 8x_2$$

2. TOTAL DIFFERENTIALS : DERIVATIVES DARI FUNGSI DENGAN INDEPENDENT VARIABLE LEBIH DARI 1 (SATU)

Total differential dapat didiefinisikan sebagai derivative (perubahan) dependent variable karena perubahan setiap independent variable secara besamaan.

Jadi berbeda dengan derivative dan partial derivative sebelumnya, yang merupakan perubahan dependent variable (fungsi) karena perubahan

satu independent variable sementara independent variable lainnya dianggap tetap.
Penulisan total differential :

$y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ --- $y = f(n_j)$ dimana $j = 1, 2, 3, \ldots, n$

Total differential atau total perubahan y karena setiap independent variable berubah secara bersamaan, ditulis dy :

$$dy = f_1 . dx_1 + f_2 . dx_2 + \ldots + f_n . dx_n$$

Contoh :

$$y = 3(x_1)^2 + x_1x_2 + 4(x_2)^2$$

$$dy = f_1.dx_1 + f_2.dx_2 = (6x_1 + x_2) . dx_1 + (x_1 + 8x_2) . dx_2$$

3. TOTAL DERIVATIVES : DERIVATIVES DARI FUNGSI DENGAN INDEPENDENT VARIABLE LEBIH DARI 1 (SATU)

Total derivative adalah total differential dengan fokus pada perubahan hanya satu independent variable.
Dengan kata lain, total derivative adalah total differential dibagi perubahan satu independent variable.

Penulisan total derivative dengan total differential di atas, misal dengan perubahan independent variable x_2 (dx_2) :

$$\frac{dy}{dx_2} = f_1 \frac{dx_1}{dx_2} + f_1 + \ldots f_n \frac{dx_n}{dx_2}$$

Contoh :

$$y = 3(x_1)^2 + x_1x_2 + 4(x_2)^2$$

$$dy/dx_2 = f_1.(dx_1/dx_2) + f_2 = (6x_1 + x_2) . dx_1/dx_2 + (x_1 + 8x_2)$$

Bahan 7.3.

TURUNAN (DERIVATIVES) DARI FUNGSI IMPLISIT (IMPLICIT FUNTIONS) DENGAN LEBIH DARI 1 (SATU) INDEPENDENT VARIABLE :

Fungsi $F(y, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0$ adalah an implicit function dari an explicit function $y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ --- $y = f(n_j)$ dimana $j = 1, 2, 3, \ldots, n$

Derivative the implicit function :

$$dF = 0$$

$$dF = F_y .dy + F_1 .dx_1 + F_2 .dx_2 + \ldots + F_n . dx_n = 0$$

dimana $dy = f_1. dx_1 + f_2. dx_2 + \ldots + f_n. dx_n$, maka :

$$df = F_y .\{f_1.dx_1 + f_2.dx_2 + \ldots + f_n.dx_n) + F_1.dx_1+F_2.dx_2+\ldots+F_n.dx_n=0$$

$$= (F_y.f_1 + F_1)dx_1 + (F_y.f_2 + F_2)dx_2 + \ldots + (F_y.f_n + F_n)dx_n = 0$$

berarti setiap $(F_y.f_j + F_j)dx_j = 0$ dimana $j = 1, 2, 3, \ldots, n$

$$\text{maka} \quad f_j = \frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{F_j}{F_y}$$

Untuk the implicit function dua variabel $F(y, x) = 0$:

$$\text{maka} \quad f_x = \frac{dy}{dx} = \frac{F_x}{F_y}$$

Contoh : $F(y,x) = x^2 + y^2 + 9 = 0$

$$\text{maka} \quad f_x = \frac{dy}{dx} = \frac{F_x}{F_y} = \frac{2x}{2y} = \frac{x}{y}$$

Exercise dengan fungsi F(Q,K,L) dari the explicit function production function Q = f(K,L), cari MP_K dan MP_L

Tambahan Materi Differensial

Sebelum kalian mempelajari topik ini, mari kita ingat kembali konsep turunan menggunakan limit fungsi berikut ini.
Jika diketahui fungsi *f*(*x*), maka turunan fungsi *f*(*x*) pada *x* adalah:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Tentu sekarang kalian sudah ingat, kan? Jika sudah, mari kita simak penjelasan berikut.

1. Turunan Fungsi Konstan

Fungsi konstan adalah fungsi dengan bentuk *f*(*x*) = *n* dengan *n* = bilangan real. Turunan fungsi konstan menggunakan limit fungsi adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{n-n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jadi, turunan fungsi yang berbentuk nilai konstan adalah 0.
Jika diketahui *f*(*x*) = *n*, dengan *n* bilangan real, maka *f* '(*x*) = 0

2. Turunan Fungsi Identitas

Fungsi identitas adalah fungsi dengan bentuk *f*(*x*) = *x*. Turunan fungsi identitas menggunakan limit fungsi adalah sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Jadi, turunan fungsi identitas adalah 1.
Jika diketahui *f*(*x*) adalah sebuah fungsi identitas atau *f*(*x*) = *x*, maka *f* '(*x*) = 1

3. Turunan Fungsi Pangkat

Misalkan diketahui fungsi pangkat dengan bentuk *f*(*x*) = *xn* dengan *n* bilangan bulat positif. Untuk menentukan rumus umumnya, kita dapat mencari pola dari hasil yang diperoleh melalui tabel berikut.

$f(x)$	1	x	x^2	...	x^n
$f'(x)$	0	1	...	...	....

Sekarang, kita tentukan dahulu turunan fungsi untuk *n* = 2.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2x+h \\ &= 2x \end{aligned}$$

Kita masukkan hasilnya ke dalam tabel berikut ini.

$f(x)$	1	x	x^2	...	x^n
$f'(x)$	0	1	$2x$	...	nx^{n-1}

Coba kalian perhatikan tabel di atas. Dari tabel tersebut, dapat terlihat pola yang terbentuk sehingga diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

Turunan untuk fungsi $f(x) = x^n$ adalah $f'(x) = nx^{n-1}$ dan turunan untuk fungsi $f(x) = mx^n$ adalah $f'(x) = mnx^{n-1}$
Agar kalian lebih memahami penggunaan aturan turunan fungsi di atas, mari kita perhatikan contoh berikut.

Contoh:

$f(x) = 6\sqrt{x^5} = 6x^{5/2}$ maka $f^1(x) = 5/2.6.\ x^{3/2} = 15\ x^{3/2}$

Tentukan $f'(x)$ dari fungsi berikut.

a. $f(x) = 6x$

b. $f(x) = 5x^3$

Penyelesaian:

a. $f(x) = 6x \rightarrow f'(x) = 6$

b. $f(x) = 5x^3 \rightarrow f'(x) = 15x^2$

4. Turunan Jumlah dan Selisih Fungsi-Fungsi

Jika diketahui fungsi $y = f(x) = u(x) \pm v(x)$ dengan turunan dari $u(x)$ adalah $u'(x)$ dan turunan dari $v(x)$ adalah $v'(x)$, maka turunan dari $f(x)$ adalah:

$f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$

Agar kalian lebih paham penggunaan aturan turunan fungsi aljabar di atas, mari perhatikan contoh berikut.

Contoh:

Carilah turunan fungsi $g(x) = 2x^2 + 4x^3 – 12x$
.
Penyelesaian:

Misalkan $u(x) = 2x^2$ dan $v(x) = 4x^3 - 12$, maka:

$u'(x) = 4x$ dan $v'(x) = 12x -12$

Dengan demikian, turunan fungsi $g(x)$ adalah:

$g'(x) = u'(x) + v'(x) = 4x + 12x - 12 = 16x - 12$

5. Turunan Hasil Kali Fungsi-Fungsi

Jika diketahui fungsi $y = f(x) = u(x).v(x)$ dengan turunan dari $u(x)$ adalah $u'(x)$ dan turunan dari$v(x)$ adalah $v'(x)$, maka turunan dari $f(x)$ adalah:

$f'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$

Agar kalian lebih paham penggunaan aturan turunan fungsi aljabar di atas, mari perhatikan contoh berikut.

Contoh:

Tentukan turunan fungsi $f(x) = 2x(x^4 - 5)$.

Penyelesaian:

Misalkan $u(x) = 2x$ dan $v(x) = x^4 - 5$, maka:

$u'(x) = 2$ dan $v'(x) = 4x^3$

Dengan demikian, diperoleh:

$f'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x) = 2(x^4 - 5) + 2x(4x^3) = 2x^4 - 10 + 8x^4 = 10x4 - 10$

6. Turunan Hasil Bagi Fungsi-Fungsi

Jika diketahui fungsi $y = f(x) = u(x)/v(x)$
dengan turunan dari $u(x)$ adalah $u'(x)$ dan turunan dari$v(x)$ adalah $v'(x)$, maka turunan dari $f(x)$ adalah:

$$f'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

Agar kalian lebih paham penggunaan aturan turunan fungsi aljabar di atas, mari perhatikan contoh berikut.

Contoh:

Tentukan turunan fungsi $g(x) = \dfrac{3x^4}{2x-5}$.

Penyelesaian:

Misalkan $u(x) = 3x^4$ dan $v(x) = 2x - 5$, maka:

$u'(x) = 12x^3$ dan $v'(x) = 2$

Dengan demikian, diperoleh:

$$g'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

$$g'(x) = \frac{12x^3(2x-5) - 3x^4(2)}{(2x-5)^2}$$

$$= \frac{24x^4 - 60x^3 - 6x^4}{(2x-5)^2}$$

$$= \frac{18x^4 - 60x^3}{(2x-5)^2}$$

$$= \frac{6x^3(3x-10)}{(2x-5)^2}$$

Pada materi sebelumnya kita telah mempelajari tentang turunan fungsi aljabar, maka dalam kesempatan ini dilanjutkan dengan turunan trigonometri.

Rumus Turunan Dasar Trigonometri

Berikut ini adalah beberapa turunan dasar trigonometri yang wajib diketahui sebelum anda memecahkan persoalan turunan trigonometri:

1. f(x) = sin x → f '(x) = cos x
2. f(x) = cos x → f '(x) = −sin x
3. f(x) = tan x → f '(x) = $\sec^2$ x
4. f(x) = cot x → f '(x) = $-\csc^2$x
5. f(x) = sec x → f '(x) = sec x . tan x
6. f(x) = csc x → f '(x) = −csc x . cot x

Perluasan Rumus Turunan Trigonometri I

Misalkan u merupakan fungsi yang dapat diturunkan terhadap **x**, dimana **u'** adalah turunan **u** terhadap **x**, maka :

1. f(x) = sin u → f '(x) = cos u . u'
2. f(x) = cos u → f '(x) = −sin u . u'

3. $f(x) = \tan u \rightarrow f'(x) = \sec^2 u \cdot u'$
4. $f(x) = \cot u \rightarrow f'(x) = -\csc^2 u \cdot u'$
5. $f(x) = \sec u \rightarrow f'(x) = \sec u \tan u \cdot u'$
6. $f(x) = \csc u \rightarrow f'(x) = -\csc u \cot u \cdot u'$

Perluasan Rumus Turunan Trigonometri II

Berikut ini adalah turunan dari fungsi-fungsi trigonometri dalam variabel sudut ax +b, dimana a dan b adalah bilangan real dengan $a \neq 0$:

1. $f(x) = \sin(ax + b) \rightarrow f'(x) = a \cos(ax + b)$
2. $f(x) = \cos(ax + b) \rightarrow f'(x) = -a \sin(ax + b)$
3. $f(x) = \tan(ax + b) \rightarrow f'(x) = a \sec^2(ax + b)$
4. $f(x) = \cot(ax + b) \rightarrow f'(x) = -a \csc^2(ax + b)$
5. $f(x) = \sec(ax + b) \rightarrow f'(x) = a \tan(ax + b) \cdot \sec(ax + b)$
6. $f(x) = \csc(ax + b) \rightarrow f'(x) = -a \cot(ax + b) \cdot \csc(ax + b)$

Contoh Soal Turunan Trigonometri

Soal No.1

Carilah turunan f'(x) dari fungsi-fungsi trigonometri dibawah ini :

a. $f(x) = 4 \sin x$
b. $f(x) = 3 \cos x$
c. $f(x) = -2 \cos x$
d. $f(x) = 2 \sec x$
e. $f(x) = 2 \csc x$

Pembahasan

a. $f(x) = 4 \sin x \rightarrow f'(x) = 4 \cos x$
b. $f(x) = 3 \cos x \rightarrow f'(x) = -3 \sin x$
c. $f(x) = -2 \cos x \rightarrow f'(x) = -2 (-\sin x) \rightarrow f'(x) = 2 \sin x$
d. $f(x) = 2 \sec x \rightarrow f'(x) = 2 \sec x \cdot \tan x$
e. $f(x) = 2 \csc x \rightarrow f'(x) = 2 (-\csc x \cdot \cos x) \rightarrow f'(x) = -2 \csc x \cdot \cot x$

Soal No.2

Carilah turunan f'(x) dari fungsi-fungsi trigonometri dibawah ini :

a. $f(x) = \sin 6x + \cos 6x$

b. $f(x) = 3x^4 + \sin 2x + \cos 3x$
c. $f(x) = \tan 5x + \sec 2x$

Pembahasan
a. $f(x) = \sin 6x + \cos 6x \rightarrow f'(x) = 6 \cos 6x - 6 \sin 6x$
b. $f(x) = 3x^4 + \sin 2x + \cos 3x \rightarrow f'(x) = 12x^3 + 2 \cos 2x - 3 \sin 3x$
c. $f(x) = \tan 5x + \sec 2x \rightarrow f'(x) = 5 \sec^2 5x + \sec 2x \cdot \tan 2x$

Soal No.3

Carilah turunan f'(x) dari fungsi-fungsi trigonometri dibawah ini :
a. $f(x) = \sin 3x$
b. $f(x) = \sin x^2$
c. $f(x) = \sin 3x^2$
d. $f(x) = \sin (2x + 1)$

Pembahasan

a. $f(x) = \sin 3x$

Misalkan:

$u = 3x \Rightarrow u' = 3$
$f(x) = \sin 3x$
$f'(x) = \cos u \cdot u'$
$f'(x) = \cos 3x \cdot 3$
$f'(x) = 3 \cos 3x$

b. $f(x) = \sin x^2$

Misalkan:

$u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$
$f(x) = \sin x^2$
$f'(x) = \cos u \cdot u'$
$f'(x) = \cos x^2 \cdot 2x$
$f'(x) = 2x \cos x^2$

c. $f(x) = \sin 3x^2$

Misalkan:

$u = 3x^2 \Rightarrow u' = 6x$
$f(x) = \sin 3x^2$
$f'(x) = \cos u \,.\, u'$
$f'(x) = \cos 3x^2 \,.\, 6x$
$f'(x) = 6x \cos 3x^2$

d. $f(x) = \sin (2x + 1)$

Misalkan:

$u = 2x + 1 \Rightarrow u' = 2$
$f(x) = \sin (2x + 1)$
$f'(x) = \cos u \,.\, u'$
$f'(x) = \cos (2x + 1) \,.\, 2$
$f'(x) = 2 \cos (2x + 1)$

Soal No.4

Carilah turunan f'(x) dari fungsi-fungsi trigonometri dibawah ini :
a. $f(x) = \cos 3x$
b. $f(x) = \cos x^2$
c. $f(x) = \cos 3x^2$
d. $f(x) = \cos (2x + 1)$

Pembahasan

a. $f(x) = \cos 3x$

Misalkan:

$u = 3x \Rightarrow u' = 3$
$f(x) = \cos 3x$
$f'(x) = -\sin u \,.\, u'$
$f'(x) = -\sin 3x \,.\, 3$
$f'(x) = -3 \operatorname{sinx} 3x$

b. $f(x) = \cos x^2$

Misalkan:

$u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$
$f(x) = \cos x^2$
$f'(x) = -\sin u \, . \, u'$
$f'(x) = -\sin x^2 \, . \, 2x$
$f'(x) = -2x \sin x^2$

c. $f(x) = \cos 3x^2$

Misalkan:

$u = 3x^2 \Rightarrow u' = 6x$
$f(x) = \cos 3x^2$
$f'(x) = -\sin u \, . \, u'$
$f'(x) = -\sin 3x^2 \, . \, 6x$
$f'(x) = -6x \sin 3x^2$

d. $f(x) = \cos (2x + 1)$

Misalkan:

$u = 2x + 1 \Rightarrow u' = 2$
$f(x) = \cos (2x + 1)$
$f'(x) = -\sin u \, . \, u'$
$f'(x) = -\sin (2x + 1) \, . \, 2$
$f'(x) = -2 \sin (2x + 1)$

Soal No.5

Carilah turunan f'(x) dari fungsi-fungsi trigonometri dibawah ini :
a. $f(x) = \sin (x^2 + 3x + 1)$
b. $f(x) = \cot (x^3 + 3x^2 + 1)$

Pembahasan

a. $f(x) = \sin (x^2 + 3x + 1)$

Misalkan: $u = x^2 + 3x + 1 \Rightarrow u' = 2x + 3$
$f(x) = \sin (x^2 + 3x + 1)$
$f'(x) = \cos u \,.\, u'$
$f'(x) = \cos (x^2 + 3x + 1) \,.\, (2x + 3)$
$f'(x) = (2x + 3) \cos (x^2 + 3x + 1)$

b. $f(x) = \cot (x^3 + 3x^2 + 1)$

Misalkan : $u = x^3 + 3x^2 + 1 \Rightarrow u' = 3x^2 + 6x$
$f(x) = \cot (x^3 + 3x^2 + 1)$
$f'(x) = -\csc^2 u \,.\, u'$
$f'(x) = -\csc^2 (x^3 + 3x^2 + 1) \,.\, (3x^2 + 6x)$
$f'(x) = -(3x^2 + 6x) \,.\, \csc^2 (x^3 + 3x^2 + 1)$

Soal No.6

Carilah turunan f'(x) dari fungsi-fungsi trigonometri dibawah ini :
a. $f(x) = \sin x \cos 3x$
b. $f(x) = \tan x \cos 4x$

Pembahasan

a. $f(x) = \sin x \cos 3x$
Misal :
$u = \sin x \Rightarrow u' = \cos x$
$v = \cos 3x \Rightarrow v' = -3 \sin 3x$

Turunan dari bentuk fungsi tersebut adalah :
$f'(x) = u' \,.\, v + u \,.\, v'$
$f'(x) = \cos x \,.\, \cos 3x + \sin x \,.\, -3 \sin 3x$
$f'(x) = \cos x \,.\, \cos 3x - 3 \sin x.\ \sin 3x$

b. $f(x) = \tan x \cos 4x$

Misal :
$u = \tan x \Rightarrow u' = \sec^2 x$
$v = \cos 4x \Rightarrow v' = -4 \sin 4x$
Turunan dari bentuk fungsi tersebut adalah :
$f'(x) = u' \,.\, v + u \,.\, v'$

$f'(x) = sec^2x \,.\, \cos 4x + \tan x \,.\, -4 \sin 4x$
$f'(x) = sec^2x \,.\, \cos 4x - 4 \tan x \,.\, \sin 4x$

Soal No.7

Tentukan turunan pertama dari fungsi berikut :
$y = 1 + \cos x \sin x$

Pembahasan

Misal :
$u = 1 + \cos x \Rightarrow u' = -\sin x$
$v = \sin x \Rightarrow v' = \cos x$

Maka :
$y' = u' \,.\, v + u \,.\, v' \, v^2$

$y' = -\sin x (\sin x) - (1 + \cos x) (\cos x) \sin^2 x$

$y' = -\sin^2 x - \cos^2 x - \cos x \sin^2 x$

$y' = -(\sin^2 x + \cos^2 x) - \cos x \sin^2 x$

$y' = -(1) - \cos x \; 1 - \cos^2 x$

$y' = -(1 + \cos x) (1 - \cos x).(1 + \cos x)$

$y' = -1 \; 1 - \cos x$

$y' = 1 \cos x - 1$

Soal No.8

Tentukan turunan pertama dari fungsi berikut :

$y = \sin^2 (2x + 3)$

Pembahasan

Misalkan :

$g(x) = 2x + 3 \Rightarrow g'(x) = 2$

Rumus turunan untuk fungsi trigonometri berpangkat :

$y = c \sin^n g(x)$
$y' = c.\ n \sin^{n-1} g(x) \ .\ \cos g(x) \ .\ g'(x)$

Sehingga : $y = \sin^2 (2x + 3)$

$y = \{\sin(2x + 3)\}^2$
$y' = c.\ n \sin^{n-1} g(x) \ .\ \cos g(x) \ .\ g'(x)$
$y' = 2 \sin^{2-1} (2x + 3) \ .\ \cos (2x + 3).(2)$
$y' = 4 \sin (2x + 3) \cos (2x + 3)$

Soal No.9

Tentukan turunan pertama dari fungsi berikut :
$y = \cos^2 (2x^2 + 3)$

Pembahasan
Misalkan :
$g(x) = (2x^2) + 3 \Rightarrow g'(x) = 4x$

Rumus turunan untuk fungsi trigonometri berpangkat :
$y = c \cos^n g(x)$
$y' = -c.\ n \cos^{n-1} g(x) \ .\ \sin g(x) \ .\ g'(x)$

Sehingga :
$y = \cos^2 (2x^2 + 3)$
$y = \{\cos(2x^2 + 3)\}^2$
$y' = -c.\ n \cos^{n-1} g(x) \ .\ \sin g(x) \ .\ g'(x)$
$y' = -2 \cos^{2-1} (2x^2 + 3) \ .\ \sin (2x^2 + 3) \ .\ 4x$
$y' = -8x \cos (2x^2 + 3) \ .\ \sin (2x^2 + 3)$

Soal No.10

Tentukan turunan pertama dari fungsi berikut :
$y = (\sin x + \cos x)^s$

Pembahasan :
Misalkan :
$g(x) = \sin x + \cos x \Rightarrow g'(x) = \cos x - \sin x$

$y = (\sin x + \cos x)^2$
$y' = n\,[g(x)]^{n-1}.\ g\,'(x)$
$y' = 2\,(\sin x + \cos x)^{2-1}.(\cos x - \sin x)$
$y' = 2\,(\sin x + \cos x).(\cos x - \sin x)$
$y' = 2\,(\cos x + \sin x).(\cos x - \sin x)$
$y' = 2\,(\cos^2 x - \sin^2 x)$
$y' = 2\,(\cos^2 x - (1 - \cos^2 x))$
$y' = 2\,(2\cos^2 x - 1)$
$y' = 4\cos^2 x - 2.$