

S1- MATEMATIKA

Materi 4

- LIMIT FUNGSI (LIMITS OF FUNCTIONS)**
- KONTINUITAS FUNGSI (FUNCTION CONTINUITY OR CONTINUOUS FUNCTIONS)**

Bahan 4.1.

LIMIT FUNGSI (LIMITS OF FINCTIONS)

A. BARISAN (SEQUENCES) VS. LIMIT FUNGSI (LIMITS OF FUNCTIONS)

Contoh :

Sequence :

$$f(n) = 2 + 1/10^n \rightarrow 2,1, 2,01, 2,001, 2,0001, \dots, 2 + 1/10^n$$

maka :

Limit dari fungsi $f(x) = x^2$,

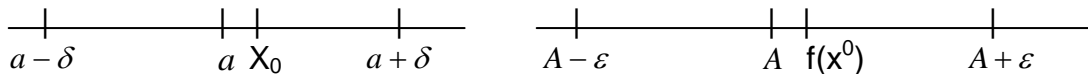
dimana variabel x bergerak diatas sequence itu menuju 2 atau $x \rightarrow 2$, sehingga $f(x) = x^2$ menuju 4, yaitu :
 4,41, 4,0401, 4,004001, ..., $\{(2 + 1/10^n)^2 = 4\}$ pada x menjadi 2
 untuk $x = 2 + 1/10^n$ dengan $n \rightarrow \infty$

jadi $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$

B. LIMIT FUNGSI (LIMITS OF FUNCTIONS) : DEFINISI & PEMBUKTIANNYA,

2. Definisi

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \rightarrow$ apabila untuk setiap bilangan positif ϵ sekecil apapun, maka dapat diperoleh bilangan positif δ (besarnya tergantung ϵ) sehingga $|f(x) - A| < \epsilon$ jika $0 < |x - a| < \delta$, berarti :



Jadi $x \rightarrow a$ (variabel x bergerak menuju dan hanya dekat ke titik atau angka a di atas sequence), maka fungsi $f(x)$ menuju dan hanya dekat ke nilai atau angka A.

2. Pembuktian Definisi Limit Fungsi

Contoh :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{jika } x \neq 2 \\ 0 & \text{jika } x = 2 \end{cases} \quad \text{sehingga jika } x \rightarrow 2, \text{ maka } f(x) \rightarrow 4, \text{ jadi}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

Bukti

Pilih $\delta \leq 1$, maka

$0 < |x - a| < \delta$ menjadi $0 < |x - 2| < 1$ yang berarti $1 < x < 3$ untuk $x \neq 2$

Karena $|x^2 - 4| = |(x - 2)(x + 2)| = |x - 2||x + 2| < \delta|x + 2| < 5\delta$.

Dengan pilih $\delta = 1$ atau $\varepsilon/5$ atau mana yang terkecil, sehingga

$|f(x) - A| < \varepsilon$ menjadi $|x^2 - 4| < \varepsilon$ jika $0 < |x - 2| < \delta (=1)$, jadi terbukti.

Misal, ingin $|x^2 - 4| < \varepsilon (=0,05)$, jadi $\delta = \varepsilon/5 = 0,01$, jadi jika

$0 < |x - 2| < \delta (=0,01)$, maka $1,99 < x < 2,01$ ($x \neq 2$), sehingga

$3,9601 < x^2 < 4,0401$ atau $-0,0399 < x^2 - 4 < 0,0401$

berarti $|x^2 - 4| < 0,05$ dimana ($x^2 \neq 4$)

Misal, ingin $|x^2 - 4| < \varepsilon (=6)$ dan pilih $\delta = 1$, juga terbukti, **coba!**

3. Limit Fungsi Unik

Pada $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, variable x menuju titik atau angka a bisa dari kiri

atau $x \rightarrow a^-$, atau dari kanan yaitu $x \rightarrow a^+$, sehingga

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A_1 \text{ (left hand limit) dan } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A_2 \text{ (right hand limit)}$$

Maka $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ (unik atau hanya satu-satunya)

hanya apabila benar2 (if and only if)

$$\{\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A_1\} = \{\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A_2\}$$

Bukti :

Untuk $\varepsilon > 0$, maka bisa diperoleh $\delta > 0$, sehingga

$$|f(x) - A_1| < \varepsilon/2 \text{ jika } 0 < |x - a| < \delta \text{ dan } |f(x) - A_2| < \varepsilon/2 \text{ jika } 0 < |x - a| < \delta$$

$$|A_1 - A_2| = |A_1 - f(x) + f(x) - A_2| < |A_1 - f(x)| + |f(x) - A_2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Karena ε sangat kecil dan bahkan menjadi 0, maka $A_1 = A_2$, jadi terbukti.

4. Infinity

Infinite limits

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ (infinite) :}$$

apabila untuk bilangan positif M (apapun besarnya), terdapat bilangan positif δ sehingga $|f(x)| > M$ jika $0 < |x - a| < \delta$.

$$\text{Juga, } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \text{ (infinite) :}$$

apabila untuk bilangan positif M (apapun besarnya), terdapat bilangan positif δ sehingga $|f(x)| < -M$ jika $0 < |x - a| < \delta$.

Juga berlaku untuk notasi dengan $x \rightarrow a^+$ dan $x \rightarrow a^-$.

$x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \rightarrow \text{apabila untuk setiap bilangan positif } \varepsilon \text{ sekecil}$$

apapun, maka dapat diperoleh bilangan positif δ (besarnya tergantung ε) sehingga $|f(x) - A| < \varepsilon$

jika $|x| > M \rightarrow$ bandingkan dengan definisi di atas.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{ (infinite) :}$$

apabila untuk bilangan positif M (apapun besarnya), terdapat bilangan positif P sehingga $|f(x)| > M$ jika $|x| > P$.

5. Teori Limit Fungsi

Dengan $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ dan $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$

1). $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ (konstan) \rightarrow apabila $f(x) = A$ (konstan)

2). $\lim_{x \rightarrow a} k \cdot f(x) = k \cdot A$

3). $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{A} \rightarrow$ (bilangan riil)

4). $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \pm B$

5). $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B$

6). $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B}$ dan $B \neq 0$

Contoh

1). $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x} = \infty$

2). $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x^2} = \infty$

3). $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 5) = \infty$

- 4). $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x^2) = -\infty$
- 5). $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{1}{1-x^2}} \right) = 2$ (buktikan dan bandingkan dengan contoh di atas)
- 6). $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 5) + (2 - x^2) = 7$ (bandingkan dengan contoh di atas)
- 7). Special limits :
- ★ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$ dan $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x} = e$
 - ★ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
 - ★ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$

6. Soal Latihan

- 1). $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x-1} = -8$
- 2). $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^4} = \infty$
- 3). $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-3|}{x-3}, & x \neq 3 \\ 0 & x = 3 \end{cases}$
- a). Cari $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$
- b). Cari $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$
- c). Cari $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
- 4). $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-4}{x^2 - x - 12} = \frac{1}{7}$

$$5). \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^3}{3 - \sqrt{x^3 + 5}} = 6$$

$$6). \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 2}{4x^3 - 1} = 0$$

Dibawah ini diberikan contoh-contoh soal latihan :

1. Tentukan hasil dari:

a) $\lim_{x \rightarrow 4} 10 = \dots$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} 5 = \dots$

Pembahasan

Limit bentuk $\lim_{x \rightarrow c} k = k$ diperoleh

a) $\lim_{x \rightarrow 4} 10 = 10$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} 5 = 5$

2. Carilah nilai :

a) $\lim_{x \rightarrow 2} 3x = \dots$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 + 5 = \dots$

Pembahasan

Limit aljabar bentuk

$$\lim_{x \rightarrow c} x = c$$

Substitusikan saja nilai x,

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} 3x = 3(2) = 6$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 + 5 = 3(2)^2 + 5 = 17$$

matematikastudycenter.com

Berikutnya dilanjutkan dengan tipe metode turunan yaitu limit x menuju angka tertentu dimana jika disubstitusikan langsung mendapatkan hasil yang tak tentu.

Soal No. 3

Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$

Pembahasan

Jika angka 2 kita substitusikan ke x, maka akan diperoleh hasil 0/0 (termasuk bentuk tak tentu), sehingga selesaikan dengan metode turunan saja.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 5}{2x} = \frac{2(2) - 5}{2(2)} = -\frac{1}{4}$$

Turunkan

Turunkan

Soal No. 4

Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16} = \dots$

Pembahasan

Masih menggunakan turunan

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^{\frac{1}{2}} - 2}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{2x} = \frac{\frac{1}{2}(4)^{-\frac{1}{2}}}{2(4)} = \frac{1/4}{8} = \frac{1}{32}$$

Soal No. 5

Nilai $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x+1}}{x-3} = \dots$

- A. $-1/4$
- B. $-1/2$
- C. 1
- D. 2
- E. 4

Pembahasan

Bentuk $0/0$ juga, ubah bentuk akarnya ke bentuk pangkat agar lebih mudah diturunkan seperti ini

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x+1}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - (x+1)^{\frac{1}{2}}}{x-3}$$

Turunkan atas - bawah, kemudian masukkan angka 3 nya

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{1} = -\frac{1}{2}(3+1)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(4)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{4}} = -\frac{1}{4}$$

Soal No. 6

Nilai dari $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \dots$

- A. 16
- B. 8
- C. 4
- D. -4
- E. -8

Pembahasan

Bentuk $0/0$ juga, dengan turunan:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x}{1} = 2(4) = 8$$

atau dengan cara pemfaktoran:

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + 4)}{(x - 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} (x + 4) = 4 + 4 = 8 \end{aligned}$$

Soal No. 7

Nilai

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{x^2 - 7}}{x^2 - 2x - 8} = \dots$$

- A. $-2/9$
- B. $-1/8$
- C. $-2/3$
- D. 1
- E. 2

Pembahasan

Dengan substitusi langsung akan diperoleh bentuk 0/0.

Cara Pertama

Perkalian dengan sekawan dan pefaktoran:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{x^2 - 7}}{x^2 - 2x - 8} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{x^2 - 7}}{x^2 - 2x - 8} \times \left(\frac{3 + \sqrt{x^2 - 7}}{3 + \sqrt{x^2 - 7}} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{9 - x^2 + 7}{(x^2 - 2x - 8)(3 + \sqrt{x^2 - 7})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-x^2 + 16}{(x^2 - 2x - 8)(3 + \sqrt{x^2 - 7})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(x^2 - 16)}{(x^2 - 2x - 8)(3 + \sqrt{x^2 - 7})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(x - 4)(x + 4)}{(x - 4)(x + 2)(3 + \sqrt{x^2 - 7})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(x + 4)}{(x + 2)(3 + \sqrt{x^2 - 7})} \\
&= \frac{-(4 + 4)}{(4 + 2)(3 + \sqrt{4^2 - 7})} \\
&= \frac{-8}{36} = -\frac{2}{9}
\end{aligned}$$

Cara Kedua

dengan turunan:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{x^2 - 7}}{x^2 - 2x - 8} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - (x^2 - 7)^{1/2}}{x^2 - 2x - 8} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-\frac{1}{2}(2x)(x^2 - 7)^{-1/2}}{2x - 2} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}(2 \cdot 4)(4^2 - 7)^{-1/2}}{2 \cdot 4 - 2} \\
&= \frac{-4}{\sqrt{9}} = -\frac{4}{3} = -\frac{4}{18} = -\frac{2}{9}
\end{aligned}$$

Bahan 4.2.

**KONTINUITAS FUNGSI
(FUNCTION CONTINUITY OR
CONTINUOUS FUNCTIONS)**

1. Tiga syarat untuk fungsi kontinyu (continuous functions)

Fungsi $f(x)$ dinyatakan kontinyu pada titik atau angka $x = x_0$, apabila 3 syarat dipenuhi :

1). $f(x)$ pada $x = x_0$, atau $f(x_0)$, diperoleh (defined).

2). $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \text{angka (diperoleh)}$

3). $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

- ☑ Fungsi dinyatakan continuous pada suatu interval (open or closed), apabila continuous di setiap titik pada suatu interval.

- ★ $f(x) = x^2 + 1$ continuous pada $x = 2$ karena $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0 = 2) = 5 \rightarrow$ tiga syarat di atas dipenuhi.

- ★ $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ tidak continuous pada $x = 3$ karena $f(x=3) = 5\sqrt{-1}$ adalah angka imajiner \rightarrow tiga syarat di atas tidak dipenuhi.

- ☑ Jadi, fungsi dinyatakan continuous, apabila fungsi continuous pada setiap titik di atas domain fungsinya :

- ★ Maka $f(x) = x^2 + 1$ (serta semua fungsi polynomial pada x , juga demikian untuk fungsi rasional sepanjang fungsi pada penyebut tidak nol) adalah continuous function.

- ★ Hanya di atas an open interval $a < x < b$ pada domain fungsinya, karena : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ dan $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$

Sedangkan dua limit itu tidak diperoleh apabila di atas a closed interval $a \leq x \leq b$.

- ☑ Kanan dan kiri kontinuitas (right and left hand continuity)

Apabila $f(x)$ terdefinisi (is defined) hanya pada interval $x \geq x_0$, maka $f(x)$ continuous (on the right) pada $x = x_0$, jika :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \text{ yaitu } f(x_0^+) = f(x_0)$$

Apabila $f(x)$ terdefinisi (is defined) hanya pada interval $x \leq x_0$, maka $f(x)$ continuous (on the left) pada $x = x_0$, jika :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \text{ yaitu } f(x_0^-) = f(x_0)$$

2. Contoh Continuous Functions dan Discontinuous Functions

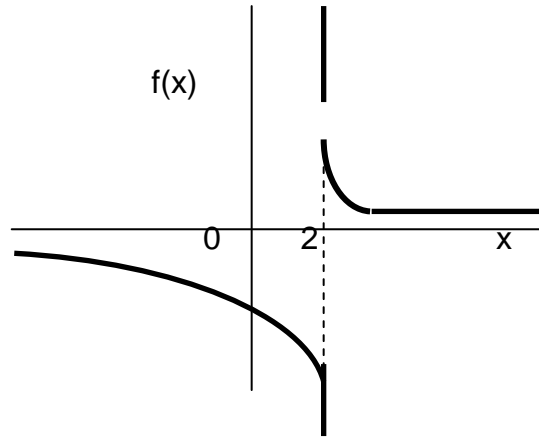
1). $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{jika } x \neq 2 \\ 0 & \text{jika } x = 2 \end{cases}$ sehingga jika $x \rightarrow 2$, maka $f(x) \rightarrow 4$, jadi $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$

Jadi $f(x)$ **continuous selain** pada $x = 2$.

Tapi $f(x) = x^2$ untuk semua x , maka $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$, jadi **continuous pada semua** titik termasuk $x = 2$.

2). $f(x) = \frac{1}{x-2}$

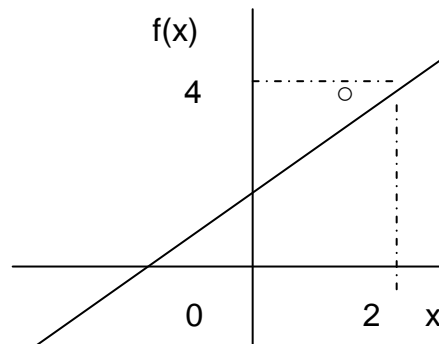
discontinuous pada $x = 2$ karena $f(2)$ dan $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ tidak diperoleh (exists). Bahkan berupa **infinite discontinuous**.



3). $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

discontinuous pada $x = 2$ karena terdapat lubang (a hole) sehingga $f(2)$ tidak diperoleh (defined) yaitu $0/0$, walaupun

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ (defined).



Discontinuity dimaksud dapat dihilangkan (removable) dengan mendefinisikan fungsi menjadi :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}; \quad x \neq 2$$

Catatan grafik atau kurva $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ dan $g(x) = x + 2$ sama, Kecuali pada fungsi rasional itu terdapat lubang (a hole).

SOAL-SOAL DAN PEMBAHASAN KONTINUITAS

A. KONTINUITAS	
No.	Jawab
<p>1. Tentukan apakah fungsi berikut kontinu pada $x = 1$</p> $f(x) = \begin{cases} 3x - 5, & \text{if } x \neq 1 \\ 2, & \text{if } x = 1 \end{cases}$	<p>$x \neq \text{berarti } \begin{cases} x < 1 \\ x > 1 \end{cases}$</p> <p>$x < 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} 3x - 5 = 3(1) - 5 = -2$</p> <p>$x > 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} 3x - 5 = 3(1) - 5 = -2$</p> <p>$x = 1 \rightarrow f(1) = 2$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 1^-} 3x - 5 = -2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3x - 5 \neq f(1) = 2$</p> <p>Jadi fungsi $f(x)$ tidak kontinu (diskontinu) di $x = 1$</p>

<p>2. Tentukan apakah fungsi berikut adalah kontinu pada $x = -2$</p> $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{if } x \leq -2 \\ x^3 - 6x, & \text{if } x > -2 \end{cases}$	<p>$x \leq \text{berarti } \begin{cases} x = -2 \\ x < -2 \end{cases}$</p> <p>$x = -2 \rightarrow f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) = 0$</p> <p>$x < -2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} x^2 + 2x = (-2)^2 + 2(-2) = 0$</p> <p>$x > -2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^+} x^3 - 6x = (-2)^3 - 6(-2) = -8 + 12 = 4$</p> <p>$f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} x^2 + 2x \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} x^3 - 6x$</p> <p>Jadi fungsi $f(x)$ tidak kontinu (diskontinu) di $x = -2$</p>
<p>3. Tentukan apakah fungsi berikut adalah kontinu pada $x = 0$</p> $f(x) = \begin{cases} \frac{x-6}{x-3}, & \text{if } x < 0 \\ 2, & \text{if } x = 0 \\ \sqrt{4+x^2}, & \text{if } x > 0 \end{cases}$	<p>$x < 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-6}{x-3} = 2$</p> <p>$x = 0 \rightarrow f(0) = 2$</p> <p>$x > 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{4+x^2} = 2$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-6}{x-3} = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{4+x^2} = 2$</p> <p>Jadi fungsi $f(x)$ kontinu pada $x = 0$</p>

