# MODUL 3
# ALJABAR LINIER (MIK106)
# DETERMINAN MATRIKS

**Disusun Oleh:**

**Mieke Nurmalasari**

**FAKULTAS ILMU-ILMU KESEHATAN**

**UNIVERSITAS ESA UNGGUL**

**JAKARTA**

**2018**

# DETERMINAN MATRIKS

Determinan dari matriks A sering dituliskan dengan notasi |A| atau det(A). Determinan berbeda dengan matriks dalam tiga hal yaitu:

1. Determinan unsur-unsurnya diapait dengan garis tegak, sedangkan matriks unsur-unsurnya diapit dengan tanda kurung.
2. Determinan selalu berbentuk bujur sangkar (jumlah baris = jumlah kolom atau m=n), sedangkan matriks tidak harus sama.
3. Determinan mempunyai nilai numerik, sedangkan matriks tidak.

Nilai numerik dari suatu determinan dapat dilakukan dengan cara mengalikan unsur-unsur diagonalnya.

## MATRIKS ordo 2x2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Determinan dari matriks ordo 2x2 adalah

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

det(A)=|A| = ad – cd

Atau ada juga yang menuliskannya dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Sehingga nilai determinan dari matriks A adalah:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

det(A)=|A| = $a_{11}.a_{22} – a_{12}.a_{21}$

Contoh:

1. Matriks B = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$
   Determinan matriks B = |B| = 2.5 – 4.3 = -2

2. Matriks C = $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$
   Determinan matriks C = |C|   = (-3.6) – (-1.5) = -18 + 5 = - 13

3. Matriks A = [ $\begin{matrix} 8 & 5 \\ -2 & 1 \end{matrix}$]

   ⎢A⎥ = (8)(1) – (5) (-2) = 8 +10 = 18

4. Contoh :

   $A$ = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, maka det (A) = |$A$| = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ = 1.4 – 2.3 = 4 – 6 = -2

5. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

   |A| = 3.8 – 5.4 = 24 – 20 = 4

**SOAL:**

Hitunglah determinan matriks di bawah ini:

1. A = $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$
   |A| = ………………….
2. B = $\begin{bmatrix} -8 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

   |B| = ……………………
3. C = $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$

   |C| = ……………………..
4. D = $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}$

   |D| = ……………………..

5. E = $\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -5 & -15 \end{bmatrix}$

   |E| = ……………………………….

6. F = $\begin{bmatrix} 15 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

   |F| = …………………………..

7. G = $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

   |G| = …………………………..

8. H = $\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$

   |H| = …………………………

9. I = $\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

   |I| = …………………………

10. J = $\begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 15 & -15 \end{bmatrix}$

   |J| = …………………………..

***Selamat Mengerjakan!***

## MATRIKS ordo 3x3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Terdapat 2 macam cara perhitungan determinan matriks ordo 3x3:

1. Metode Sarrus
2. Metode Minor dan Kofaktor

# Cara 1. Metode Sarrus

Jika kita memiliki matriks berdimensi 3x3 seperti di bawah ini,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Maka jika kita mnggunakan metode SARRUS, caranya adalah tambahkan dua kolom pertama matriks pada sisi kanan matriks. Perhitungan nilai determinan dapat diilustrasikan seperti matriks di bawah ini.

$$\begin{array}{ccccc} (+) & (+) & (+) & (-) & (-) \quad (-) \end{array}$$

$$|A| = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$= a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31}$

Contoh :

1. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

   Tentukan nilai determinan matriks $A$.

Jawab:

$$\det A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

= [(–3 × 1 × (–1)) + (4 × 3 × 1) + (2 × 2 × 0)] – [(1 × 1 × 2) + (0 × 3 × (–3)) + (–1 × 2 × 4)]

= (3 + 12 + 0) – (2 + 0 – 8)

= 21

Nilai determinan matriks *A* adalah 21.

**2.** Determinan matriks ordo 3x3 dengan menggunakan metode sarrus

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-8} & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{7} \end{bmatrix}$$

Determinan dari matriks B adalah:

$$\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-8} & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{7} \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-8} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} \end{matrix}$$

Sehingga

|B| = ((3)(-8)(7) + (5)(4)(4) + (-2)(2)(3)) – ((4)(-8)(-2) + (3)(4)(3) + (7)(2)(5))

= {(-168) + (80) + (-12)} – ((64) + (36) + (70))

= (-100) – (170)

= -270

**3.** Diketahui matriks

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{bmatrix}$$

Tentukan nilai determinan matriks *C*.

Jawab:

Determinan dari matriks B adalah:

$$\boldsymbol{C} = \left|\begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{matrix}$$

Sehingga |C| = 1.5.9 + 2.6.7 + 3.4.8 – 3.5.7 – 1.6.8 – 2.4.9

= 45 + 84 +96 – 105 – 48 – 72

= 0

4. Contoh soal :

B = $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Penyelesaian :

Dengan cara sarrus $|\mathrm{B}|$ ordo 3 dapat

$|\mathrm{B}|$ = $\left|\begin{matrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \\ -2 & 0 \end{matrix}$

= (-1)(5)(1) + (2)(-1)(-2) + (3)(4)(0) – (3)(5)(-2) – (-1)(-1)(0) – (2)(4)(1)

= -5 + 4 + 0 + 30 – 0 – 8

= 21

5. A = $\begin{bmatrix} -4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & -4 & 8 \end{bmatrix}$

Det (A) = |A| = (-4) (3) (8) + (5) (-4) (5) + (2) (2) (-4) – (2) (3) (5) + (-4) (4) (-4) + (5) (2) (8)

= (-96) + (-100) + (-16) – (30) + (96) + (80)

= - 212 + 206

= -6

6. Carilah determinan matriks berikut:

A = $\begin{bmatrix} 7 & 3 & -5 \\ 4 & 6 & -8 \\ -5 & 9 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} 7 & 3 \\ 4 & 6 \\ -5 & 9 \end{matrix}$

|A| = (7) (6) (8) + (3) (-5) (-8) + (-5) (4) (9) – ((-5) (6) (-5) + (7) (-8) (-9) + (3) (4) (8))

= (336) + (-120) + (-180) – ((150) + (-504) + (96)

= 36 – (-258)

= 294

7. Matriks 3x3 dengan metode Sarrus

A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{matrix}$

= ((1X4X3)+(3x6x1)+(5x2x2)) – ((5x4x1)+(1x6x2)+(2x2x3))

= (12+18+20) – (20+12+12)

= 6

8. Tentukan determinan dari matriks : $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

Jawab:

|A |= $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -4 \end{matrix}$

|A| = $0 \times (-1) \times 1 + 2 \times (-2) \times 4 + 1 \times 3 \times (-4)$

$-4 \times (-1) \times 1 - (-4) \times (-2) \times 0 - 1 \times 3 \times 2$

$= 0 + (-16) + (-12) - (-4) - 0 - 6$

$= -30$

# Cara 2. Metode Minor dan Kofaktor

Metode sarrus yang telah kita pelajari hanya berlaku untuk matriks yang berdimensi tiga atau berordo 3x3, metode sarrus tidak dapat digunakan untuk matriks yang dimensinya lebih tinggi.

Seorang ilmuwan bernama Laplace berhasil mengembangkan suatu cara penyelesaian yang berlaku umum untuk determinan berdimensi yang lebih tinggi, yaitu dengan menggunakan MINOR dan KOFAKTOR dari determinan yang bersangkutan.

Ternyata dengan menutup baris-baris dan kolom-kolom tertentu, determinan suati matriks akan terdiri atas beberapa determinan bagian (sub determinan). Determinan-determinan bagian ini dinamakan minor. Suatu minor secara umum dilambangkan dengan notasi $M_{ij}$

1. **Penentuan Determinan Berbasis Baris Matriks**

   Menghitung determinan suatu matriks menggunakan salah satu baris matriks.

   Jika diketahui suatu matriks A berukuran n×n:

   $$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}$$

   Maka determinan matriks A :

   det (A) = $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \,.\, (-1)^{i+j} M_{ij}$, dimana $M_{ij}$ adalah minor.

   $M_{11}$ = adalah minor dari unsur $a_{11}$, diperoleh dengan jalan menutup baris ke-1 dan kolom ke-1 dari determinan |A|

   $M_{12}$ = adalah minor dari unsur $a_{12}$, diperoleh dengan jalan menutup baris ke-1 dan kolom ke-2 dari determinan |A|

   $M_{13}$ = adalah minor dari unsur $a_{13}$, diperoleh dengan jalan menutup baris ke-1 dan kolom ke-3 dari determinan |A|

Penulisan determinan dalam bentuk minor seperti di atas dapat diubah ke dalam penulisan dalam bentuk kofaktor. Kofaktor dari determinan |A| untuk minor tertentu Mij dilambangkan dengan notasi Kij.

Sehingga:

det (A) = |A| = $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, . \, K_{ij}$

i = indeks baris
j = indek kolom

atau

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Det (A)} = |\text{A}| = = a_{i1}K_{i1} + \ a_{i2}K_{i2} + a_{i3}K_3 + \cdots + \ a_{ij}K_{ij} \\ \text{i} = \text{salah satu baris matriks} \end{array}}$$

***contoh:***

1) Tentukan determinan matriks berikut menggunakan minor dan kofaktor pada baris ke-1

A = $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

Jawab:

|A| = $(1)(-1)^{1+1}M_{11} + (5)(-1)^{1+2}M_{12} + (0)(-1)^{1+3}M_{13}$

= $(1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + (5)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} +$
$(0)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$

= (1 )(1)(0-2) + (5)( - 1)(0-0) + (0)(1)(-4 - 0)

= -2 + 0 + 0

= -2

3. Jika A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Jawab :

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

= 2 . $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ – (-1) . $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ + 3. $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$

= 2 ( 1 – (-2)) + (-2 – (-1) + 3(4 – (-1))

= 2(3) + (-1) + 3(5)

= 6 – 1 + 15

= 20

## 4. Penentuan Determinan Berbasis Kolom Matriks

Menghitung determinan suatu matriks menggunakan salah satu kolom matriks.

Jika diketahui suatu matriks A berukuran n×n:

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}$$

Maka determinan matriks A :

det (A) = $\sum_{i=1}^{n} a_{il} \,.\, (-1)^{i+l} M_{il}$

det (A) = $\sum_{i=1}^{n} a_{il} \,.\, K_{il}$

i = indek kolom

atau

det (A) = $a_{1l}K_{1l} + a_{2l}K_{2l} + a_{3l}K_{3l} + \cdots + a_{il}K_{il}$

l = salah satu baris matriks

***contoh:***

a) Tentukan determinan matriks berikut menggunakan minor dan kofaktor pada kolom ke-1

A = $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

Jawab:

Det A = $(1)(-1)^{1+1}M_{11} + (2)(-1)^{2+1}M_{21} + (0)(-1)^{3+1}M_{31}$

$=(1)(-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + (2)(-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} +$
$(0)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$

= (1 )(1)(0-2) + (2)( - 1)(0-0) + (0)(1)(-5 - 0)
= -2 + 0 + 0
= -2

**LATIHAN SOAL:**

**Carilah determinan matriks di bawah ini dengan menggunakan metode sarrus dan metode minor dan kofaktor!**

1. $Z = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

   Jawab:

   a. Metode Sarrus:

   $$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{matrix}$$

   Maka | Z | = ………………………………..

   b. Metode Minor dan Kofaktor:

   Ambilsalah satu baris atau kolom yang akan dihitung nilai minor dan kofaktornya!
   Misal ambil baris 1, maka:

   ……………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………

2. Matrix $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Jawab:

a. Metode Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 5 & -1 \end{matrix}$$

Maka | B | = ……………………………….

b. Metode Minor dan Kofaktor:

Ambilsalah satu baris atau kolom yang akan dihitung nilai minor dan kofaktornya!

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

3. Q = $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

Jawab :

a. Metode Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 5 & -1 \end{matrix}$$

Maka | B | = ……………………………….

4. Metode Minor dan Kofaktor:

Ambilsalah satu baris atau kolom yang akan dihitung nilai minor dan kofaktornya!

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………