S1- MATEMATIKA

Materi 4

- ☑ **LIMIT FUNGSI (LIMITS OF FUNCTIONS)**
- ☑ **KONTINUITAS FUNGSI (FUNCTION CONTINUITY OR CONTINUOUS FUNCTIONS)**

Bahan 4.1.

LIMIT FUNGSI (LIMITS OF FINCTIONS)

A. BARISAN (SEQUENCES) VS. LIMIT FUNGSI (LIMITS OF FUNCTIONS)

Contoh :

Sequence :

$f(n) = 2 + 1/10^n \rightarrow$ 2,1, 2,01, 2,001, 2,0001, …, $2 + 1/10^n$
maka :

Limit dari fungsi $f(x) = x^2$,

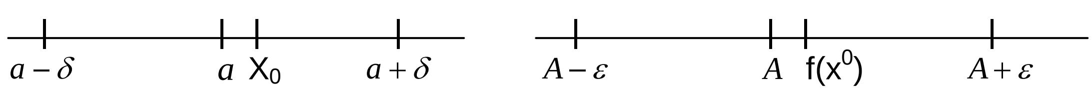
dimana variabel x bergerak diatas sequence itu menuju 2 atau $x \rightarrow 2$,
sehingga $f(x) = x^2$ menuju 4, yaitu :
4,41, 4,0401, 4,004001, …, $\{(2 + 1/10^n)^2 = 4\}$ pada x menjadi 2
untuk $x = 2 + 1/10^n$ dengan $n \rightarrow \infty$

jadi $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$

B. LIMIT FUNGSI (LIMITS OF FUNCTIONS) : DEFINISI & PEMBUKTIANNYA,

2. Definisi

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \rightarrow$ apabila untuk setiap bilangan positif ε sekecil apapun,
maka dapat diperoleh bilangan positif δ (besarnya tergantung ε)
sehingga $|f(x) - A| < \varepsilon$ jika $0 < |x - a| < \delta$, berarti :



Jadi $x \rightarrow a$ (variabel x bergerak menuju dan hanya dekat ke titik atau angka a di atas sequence), maka fungsi f(x) menuju dan hanya dekat ke nilai atau angka A.

2. Pembuktian Definisi Limit Fungsi

Contoh :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{jika } x \neq 2 \\ 0 & \text{jika } x = 2 \end{cases}$$ sehingga jika $x \to 2$, maka $f(x) \to 4$, jadi $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$

Bukti

Pilih $\delta \leq 1$, maka
$0 < |x - a| < \delta$ menjadi $0 < |x - 2| < 1$ yang berarti $1 < x < 3$ untuk $x \neq 2$
Karena $|x^2 - 4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2|\,|x+2| < \delta |x+2| < 5\delta$.
Dengan pilih $\delta = 1$ *atau* $\varepsilon / 5$ atau mana yang terkecil, sehingga
$|f(x) - A| < \varepsilon$ menjadi $|x^2 - 4| < \varepsilon$ jika $0 < |x - 2| < \delta$ (=1), jadi terbukti.

Misal, ingin $|x^2 - 4| < \varepsilon$ (=0,05), jadi $\delta = \varepsilon/5$ = 0,01, jadi jika
$0 < |x - 2| < \delta$ (=0,01), maka $1{,}99 < x < 2{,}01$ ($x \neq 2$), sehingga
$3{,}9601 < x^2 < 4{,}0401$ atau $-0{,}0399 < x^2 - 4 < 0{,}0401$
berarti $|x^2 - 4| < 0{,}05$ dimana ($x^2 \neq 4$)

Misal, ingin $|x^2 - 4| < \varepsilon$ (=6) dan pilih $\delta = 1$, juga terbukti, **coba!**

3. Limit Fungsi Unik

Pada $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, variable x menuju titik atau angka a bisa dari kiri atau $x \to a^-$, atau dari kanan yaitu $x \to a^+$, sehingga

$\lim_{x \to a^-} f(x) = A_1$ (left hand limit) dan $\lim_{x \to a^+} f(x) = A_2$ (right hand limit)

Maka $\lim_{x \to a} f(x) = A$ (unik atau hanya satu-satunya)

hanya apabila benar2 (if and only if)

$\{\lim_{x \to a^-} f(x) = A_1\} = \{\lim_{x \to a^+} f(x) = A_2\}$

Bukti :

Untuk $\varepsilon > 0$, maka bisa diperoleh $\delta > 0$, sehingga

$|f(x) - A_1| < \varepsilon/2$ jika $0 < |x-a| < \delta$ dan $|f(x) - A_2| < \varepsilon/2$ jika $0 < |x-a| < \delta$

$|A_1 - A_2| = |A_1 - f(x) + f(x) - A_2| < |A_1 - f(x)| + |f(x) - A_2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

Karena ε sangat kecil dan bahkan menjadi 0, maka $A_1=A_2$, jadi terbukti.

4. Infinity

☑ Infinite limits

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ (infinite) :

apabila untuk bilangan positif M (apapun besarnya), terdapat bilangan positif δ sehingga $|f(x)| > M$ jika $0 < |x-a| < \delta$.

Juga, $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ (infinite) :

apabila untuk bilangan positif M (apapun besarnya), terdapat bilangan positif δ sehingga $|f(x)| < -M$ jika $0 < |x-a| < \delta$.

Juga berlaku untuk notasi dengan $x \to a^+$ dan $x \to a^-$.

☑ $x \to \infty$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$ → apabila untuk setiap bilangan positif ε sekecil apapun, maka dapat diperoleh bilangan positif δ (besarnya tergantung ε) sehingga $|f(x) - A| < \varepsilon$ jika $|x|$ > M → bandingkan dengan definisi di atas.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ (infinite) :

apabila untuk bilangan positif M (apapun besarnya), terdapat bilangan positif P sehingga $|f(x)| > M$ jika $|x|$ > P.

5. Teori Limit Fungsi

Dengan $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ dan $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$

1). $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ (konstan) → apabila $f(x) = A$ (konstan)

2). $\lim\limits_{x \to a} k.f(x) = k.A$

3). $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{A}$ → (bilangan riil)

4). $\lim\limits_{x \to a} f(x) \pm g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) =$ A ± B

5). $\lim\limits_{x \to a} f(x) \,.\, g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \,.\, \lim\limits_{x \to a} g(x) =$ A . B

6). $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{A}{B} \quad dan\ B \neq 0$

Contoh

1). $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{1-x} = \infty$

2). $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{1-x^2} = \infty$

3). $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 5) = \infty$

4). $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 - x^2) = -\infty$

5). $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\left(\frac{x}{1-x}\right)}{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)} = 2$ (buktikan dan bandingkan dengan contoh di atas)

6). $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 5) + (2 - x^2) = 7$ (bandingkan dengan contoh di atas)

7). Special limits :

✪ $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$ dan $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 + x)^{1/x} = e$

✪ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

✪ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\ln x} = 1$

6. Soal Latihan

1). $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x - 1} = -8$

2). $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x - 1)^4} = \infty$

3). $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-3|}{x-3}, & x \neq 3 \\ 0 & x = 3 \end{cases}$

a). Cari $\lim\limits_{x \to 3+} f(x)$

b). Cari $\lim\limits_{x \to 3-} f(x)$

c). Cari $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

4). $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 4}{x^2 - x - 12} = \dfrac{1}{7}$

5). $\lim\limits_{x \to 2} \frac{4 - x^3}{3 - \sqrt{x^3 + 5}} = 6$

6). $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + x - 2}{4x^3 - 1} = 0$

Dibawah ini diberikan contoh-contoh soal latihan :

1.Tentukan hasil dari:

$a)\ \lim\limits_{x \to 4} 10 = ...$

$b)\ \lim\limits_{x \to 2} 5 = ...$

Pembahasan

Limit bentuk $\boxed{\lim\limits_{x \to c} k = k}$ diperoleh

$a)\ \lim\limits_{x \to 4} 10 = 10$

$b)\ \lim\limits_{x \to 2} 5 = 5$

2. Carilah nilai :

$a)\ \lim\limits_{x \to 2} 3x = ...$

$b)\ \lim\limits_{x \to 2} 3x^2 + 5 = ...$

Pembahasan

Limit aljabar bentuk

$$\boxed{\lim_{x \to c} x = c}$$

Substitusikan saja nilai x,

$$a)\ \lim_{x\to 2} 3x = 3(2) = 6$$

$$b)\ \lim_{x\to 2} 3x^2 + 5 = 3(2)^2 + 5 = 17$$

Berikutnya dilanjutkan dengan tipe metode turunan yaitu limit x menuju angka tertentu dimana jika disubstitusikan langsung mendapatkan hasil yang tak tentu.

Soal No. 3

Tentukan nilai dari $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$

Pembahasan

Jika angka 2 kita substitusikan ke x, maka akan diperoleh hasil 0/0 (termasuk bentuk tak tentu), sehingga selesaikan dengan metode turunan saja.

Turunkan

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2} \frac{2x - 5}{2x} = \frac{2(2) - 5}{2(2)} = -\frac{1}{4}$$

Turunkan

Soal No. 4

Tentukan nilai dari $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16} = \cdots$

Pembahasan

Masih menggunakan turunan

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16} = \lim_{x\to 4} \frac{x^{\frac{1}{2}} - 2}{x^2 - 16} = \lim_{x\to 4} \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{2x} = \frac{\frac{1}{2}(4)^{-\frac{1}{2}}}{2(4)} = \frac{1/4}{8} = \frac{1}{32}$$

Soal No. 5

Nilai $\lim_{x\to 3} \frac{2 - \sqrt{x + 1}}{x - 3} = \cdots$

A. −1/4
B. −1/2
C. 1
D. 2
E. 4

Pembahasan

Bentuk 0/0 juga, ubah bentuk akarnya ke bentuk pangkat agar lebih mudah diturunkan seperti ini

$$\lim_{x\to 3} \frac{2-\sqrt{x+1}}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{2-(x+1)^{\frac{1}{2}}}{x-3}$$

Turunkan atas - bawah, kemudian masukkan angka 3 nya

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{1} = -\frac{1}{2}(3+1)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(4)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{4}} = -\frac{1}{4}$$

Soal No. 6

Nilai dari $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \ldots$

A. 16
B. 8
C. 4
D. -4
E. -8

Pembahasan
Bentuk 0/0 juga, dengan turunan:

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$$
$$\lim_{x\to 4} \frac{2x}{1} = 2(4) = 8$$

atau dengan cara pemfaktoran:

$$= \lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$$
$$= \lim_{x \to 4} \frac{(x - 4)(x + 4)}{(x - 4)}$$
$$= \lim_{x \to 4} (x + 4) = 4 + 4 = 8$$

<u>Soal No. 7</u>
Nilai

$$\lim_{x \to 4} \frac{3 - \sqrt{x^2 - 7}}{x^2 - 2x - 8} = ...$$

A. − 2/9
B. −1/8
C. −2/3
D. 1
E. 2

<u>Pembahasan</u>

Dengan substitusi langsung akan diperoleh bentuk 0/0.

Cara Pertama
Perkalian dengan sekawan dan pemfaktoran:

$$\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{x^2-7}}{x^2-2x-8}$$
$$= \lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{x^2-7}}{x^2-2x-8} \times \left(\frac{3+\sqrt{x^2-7}}{3+\sqrt{x^2-7}}\right)$$
$$= \lim_{x\to 4} \frac{9-x^2+7}{(x^2-2x-8)(3+\sqrt{x^2-7})}$$
$$= \lim_{x\to 4} \frac{-x^2+16}{(x^2-2x-8)(3+\sqrt{x^2-7})}$$
$$= \lim_{x\to 4} \frac{-(x^2-16)}{(x^2-2x-8)(3+\sqrt{x^2-7})}$$
$$= \lim_{x\to 4} \frac{-(x-4)(x+4)}{(x-4)(x+2)(3+\sqrt{x^2-7})}$$
$$= \lim_{x\to 4} \frac{-(x+4)}{(x+2)(3+\sqrt{x^2-7})}$$
$$= \frac{-(4+4)}{(4+2)\left(3+\sqrt{4^2-7}\right)}$$
$$= \frac{-8}{36} = -\frac{2}{9}$$

Cara Kedua

dengan turunan:

$$\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{x^2-7}}{x^2-2x-8}$$
$$= \lim_{x\to 4} \frac{3-(x^2-7)^{1/2}}{x^2-2x-8}$$
$$= \lim_{x\to 4} \frac{-\frac{1}{2}(2x)(x^2-7)^{-1/2}}{2x-2}$$
$$= \frac{-\frac{1}{2}(2\cdot 4)(4^2-7)^{-1/2}}{2\cdot 4-2}$$
$$= \frac{-\frac{4}{\sqrt{9}}}{6} = -\frac{4/3}{6} = -\frac{4}{18} = -\frac{2}{9}$$

Bahan 4.2.

KONTINUITAS FUNGSI
(FUNCTION CONTINUITY OR CONTINUOUS FUNCTIONS)

1. Tiga syarat untuk fungsi kontinyu (continuous functions)

Fungsi f(x) dinyatakan kontinyu pada titik atau angka $x = x_0$, apabila 3 syarat dipenuhi :

1). f(x) pada $x = x_0$, atau $f(x_0)$, diperoleh (defined).

2). $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = angka\,(diperoleh)$

3). $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

☑ Fungsi dinyatakan continuous pada suatu interval (open or closed), apabila continuous di setiap titik pada suatu interval.

✪ f(x) = x^2 + 1 continuous pada x = 2 karena $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0 = 2) =$ 5 → tiga syarat di atas dipenuhi.

✪ f(x) = $\sqrt{4 - x^2}$ tidak continuous pada x = 3 karena f(x=3) = 5 $\sqrt{-1}$ adalah angka imaginer → tiga syarat di atas tidak dipenuhi.

☑ Jadi, fungsi dinyatakan continuous, apabila fungsi continuous pada setiap titik di atas domain fungsinya :

✪ Maka f(x) = x^2 + 1 (serta semua fungsi polynomial pada x, juga demikian untuk fungsi rasional sepanjang fungsi pada penyebut tidak nol) adalah continuous function.

✪ Hanya di atas an open interval a < x < b pada domain fungsinya, karena : $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ dan $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

Sedangkan dua limit itu tidak diperoleh apabila di atas a closed interval a ≤ x ≤ b.

☑ Kanan dan kiri kontinuitas (right and left hand continuity)

Apabila f(x) terdefinisi (is defined) hanya pada interval $x \geq x_0$, maka f(x) continuous (on the right) pada $x = x_0$, jika :

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ yaitu $f(x_0^+) = f(x_0)$

Apabila f(x) terdefinisi (is defined) hanya pada interval $x \leq x_0$, maka f(x) continuous (on the left) pada $x = x_0$, jika :

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ yaitu $f(x_0^-) = f(x_0)$

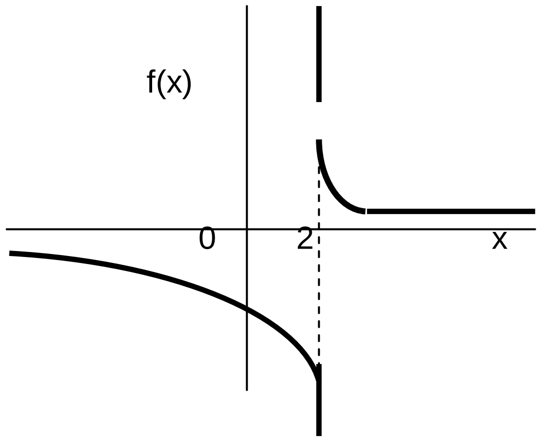
2. Contoh Continuous Functions dan Discontinuous Functions

1). $f(x) = \begin{cases} x^2 & jika\, x \neq 2 \\ 0 & jika\, x = 2 \end{cases}$ sehingga jika x→2, maka f(x) →4, jadi $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

Jadi f(x) **continuous selain** pada x = 2.

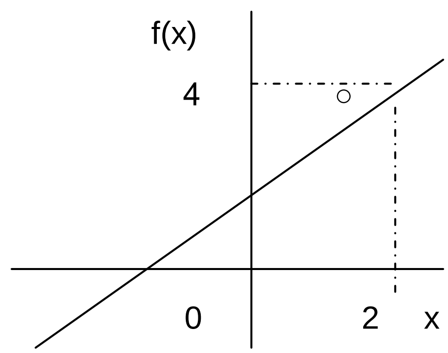
Tapi f(x) = x^2 untuk semua x, maka $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$, jadi **continuous pada semua** titik termasuk x =2.

2). f(x) = $\frac{1}{x-2}$



discontinuous pada x = 2
karena f(2) dan $\lim_{x\to 2} f(x)$
tidak diperoleh (exists).
Bahkan berupa
infinite discontinuous.

3). f(x) = $\frac{x^2-4}{x-2}$



discontinuous pada x =2
karena terdapat lubang (a hole)
sehingga f(2) tidak diperoleh
(defined) yaitu 0/0, walaupun

$\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ (defined).

Discontinuity dimaksud dapat dihilangkan (removable) dengan meredefinisi fungsi menjadi :

f(x) = $\frac{x^2-4}{x-2}$; x ≠ 2

Catatan grafik atau kurva f(x) = $\frac{x^2-4}{x-2}$ dan g(x) = x + 2 sama,
Kecuali pada fungsi rasional itu terdapat lubang (a hole).

SOAL-SOAL DAN PEMBAHASAN KONTINUITAS

A. KONTINUITAS		
No.	**Soal**	**Jawab**
1.	Tentukan apakah fungsi berikut kontinu pada x = 1 $f(x) = \begin{cases} 3x - 5, & \text{if } x \neq 1 \\ 2, & \text{if } x = 1 \end{cases}$	$x \neq berarti \begin{cases} x < 1 \\ x > 1 \end{cases}$ $x < 1 \rightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} 3x - 5 = 3(1) - 5 = -2$ $x > 1 \rightarrow \lim\limits_{x \to 1^+} 3x - 5 = 3(1) - 5 = -2$ $x = 1 \rightarrow f(1) = 2$ $\lim\limits_{x \to 1^-} 3x - 5 = -2 = \lim\limits_{X \to 1^+} 3X - 5 \neq f(1) = 2$ Jadi fungsi $f(x)$ tidak kontinu (diskontinu) di $x = 1$
2.	Tentukan apakah fungsi berikut adalah kontinu pada x = -2 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{if } x \leq -2 \\ x^3 - 6x, & \text{if } x > -2 \end{cases}$	$x \leq berarti \begin{cases} x = -2 \\ x < -2 \end{cases}$ $x = -2 \rightarrow f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) = 0$ $x < -2 \rightarrow \lim\limits_{x \to -2^-} x^2 + 2x = (-2)^2 + 2(-2) = 0$ $x > -2 \rightarrow \lim\limits_{x \to -2^+} x^3 - 6x = (-2)^3 - 6(-2) = -8 + 12 = 4$ $f(-2) = \lim\limits_{x \to -2^-} x^2 + 2x \neq \lim\limits_{x \to -2^+} x^3 - 6x$ Jadi fungsi $f(x)$ tidak kontinu (diskontinu) di x = -2
3.	Tentukan apakah fungsi berikut adalah kontinu pada x = 0 $f(x) = \begin{cases} \frac{x-6}{x-3}, & if\ x < 0 \\ 2, & if\ x = 0 \\ \sqrt{4 + x^2}, & if\ x > 0 \end{cases}$	$x < 0 \rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x-6}{x-3} = 2$ $x = 0 \rightarrow f(0) = 2$ $x > 0 \rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{4 + x^2} = 2$ $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x-6}{x-3} = f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{4 + x^2} = 2$ Jadi fungsi $f(x)$ kontinu pada $x = 0$

2