PROBABILITAS

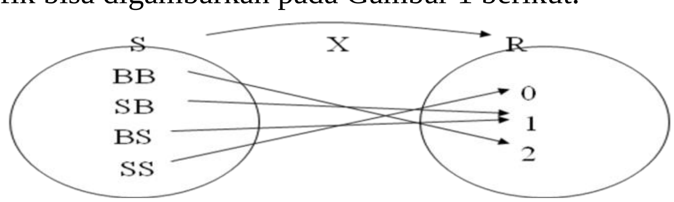
Tujuan: Memahami probabilitas, asas perhitungan probabilitas, kombinasi dan permuatasi

A. Pedahuluan

Probabiltas sangat dibutuhkan, karena kebenaran dari suatu kesimpulan yang dibuat dari analisis data sebetulnya tidak dapat dipastikan benar secara absolut, disebabkan data berdasarkan dari sampel. Distribusi Probabilitas adalah suatu distribusi yang mengambarkan peluang dari sekumnpulan variat sebagai pengganti frekuensinya. Probabilitas kumulatif adalah probalitas dari suatu variabel acak yang mempunyai nilai sama atau kurang dari suatu nilai tertentu. Fungsi distribusi peluang pada umumnya dibedakan atas distribusi peluang diskrit dan distribusi peluang kontinu. Kunci aplikasi probabilitas dalam statistik adalah memperkirakan terjadinya peluang/probabilitas yang dihubungkan dengan terjadinya peristiwa tersebut dalam beberapa keadaan. Jika kita mengetahui keseluruhan probabilitas dari kemungkinan outcome yang terjadi, seluruh probabilitas kejadian tersebut akan membentuk suatu distribusi probabilitas.

Variabel random diskrit merupakan suatu variabel random yang hanya dapat memiliki harga-harga yang berbeda yang berhingga banyaknya (sama banyaknya dengan bilangan bulat). Variabel random kontinu merupakan suatu variabel random yang dapat memiliki harga dalam suatu interval (tak berhingga banyaknya). Distribusi Peluang merupakan model matematik yang menghubungkan semua nilai variabel random dengan peluang terjadinya nilai tersebut dalam ruang sampel. Distribusi peluang dapat direpresentasikan dalam bentuk fungsi, tabel, atau grafik. Distribusi peluang dapat dianggap sebagai frekuensi relatif jangka panjang. Variabel random X adalah fungsi dari S ruang sampel ke bilangan real R, ditulis : $X : S \rightarrow R$. Misalnya untuk menjawab persoalan pilihan dua kali terhadap pilihan Benar(B) atau Salah (S), ditulis ruang sampel S = {SS, SB, BS, BB}. Jika X merupakan Variabel Random banyaknya jawaban benar, maka X = {0,1,2}

Secara grafik bisa digambarkan pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1 Variabel random X adalah fungsi dari S ruang sampel ke bilangan real R

B. Ditribusi probabilitas diskrit

a. Variabel diskrit

Pada variable diskrit setiap harga variabel terdapat nilai peluangnya, serta peluang diskrit terbentuk bilamana jumlah semua peluang sama dengan satu. Ini dikatakan wajar karena setiap

peristiwa pasti memiliki nilai penjumlahan peluang sama dengan satu dari setiap kejadian yang mungkin terjadi.
Variabel diskrit merupakan variable yang nilainya dapat diperoleh dengan cara membilang ataupun menghitung. Variable dari sampel yang diambil dari populasi ini bertujuan untuk mempermudah pemahaman teori sampel dan pembahasan hipotesis pada pengujian selanjutnya.

Variabel diskrit X menentukan distribusi peluang apabila untuk nilai X= $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ terdapat peluang $p(x_i) = P(X=x_i)$ ditulis

Distribusi Peluang Diskret
Fungsi $f(x)$ disebut sebagai fungsi peluang dari variabel random diskret X, jika untuk setiap harga x yang mungkin :

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_x f(x) = 1$

Peluang untuk nilai x tertentu:

$$P(X = x) = f(x)$$

Distribusi kumulatif $F(x)$

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t)$$

Distribusi Peluang Diskret
Distribusi peluang X dalam bentuk tabel:

Harga X	$P(X = x) = f(x)$
x_1	P_1
x_2	P_2
$\ldots$	$\ldots$
x_k	P_k

Contoh 1
Distribusi banyaknya sisi muka yang muncul dalam pelemparan mata uang logam tiga kali.

Harga X	$P(X = x) = f(x)$
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8
	$\sum P(x) = 1$

Ekspektasi sebuah variable acak ditentukan oleh beberapa criteria, yaitu kita dapat menentukan sebuah variable acak jika ada ekspektasinya. Rumus untuk mencari ekspektasi atau nilai harap dari variable acak adalah sebagai berikut ;

Harga harapan, Variansi dan sifat-sifatnya

Harga Harapan (Ekspektasi, *Expected Value*)

$$\mathrm{E}(X) = \begin{cases} \sum_x x f(x) & \text{bila } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx & \text{bila } X \text{ kontinu} \end{cases}$$

$\mathrm{E}(X)$ sering ditulis sebagai μ_X atau μ

Variansi (*Variance*)

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X-\mu)^2 \\ &= \mathrm{E}(X^2) - \mu^2 \end{aligned}$$

Contoh 2.

Pengamatan yang dilakukan oleh seorang siswa memperlihatkan banyak kendaraan yang melewati sekolahnya tiap menit mengikuti distribusi peluang adalah sebagai berikut;

Banyak kendaraan	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Peluang	0,01	0,07	0,12	0,21	0,11	0,19	0,24	0,05

Dengan menggunakan rumus

Diperoleh bahwa rata-rata tiap menit terdapat kendaraan yang melalui sekolahnya adalah sebanyak;

(0)(0,01)+(1)(0,07)+(2)(0,12)+(3)(0,21)+(4)(0,11)+(5)(0,19)+(6)(0,24)+(7)(0,05)=
(0)+(0,07)+(0,24)+(0,63)+(0,44)+(0,95)+(1,44)+(0,35)= 4,12

Atau dapat dikatakan bahwa terdapat 412 kendaraan yang lewat didepan sekolahnya setiap 100 menit.

Dua Variabel Random

Ada dua variabel random yang diamati bersamaan dalam suatu eksperimen.

Contoh:

Sebuah mata uang logam dilemparkan tiga kali.

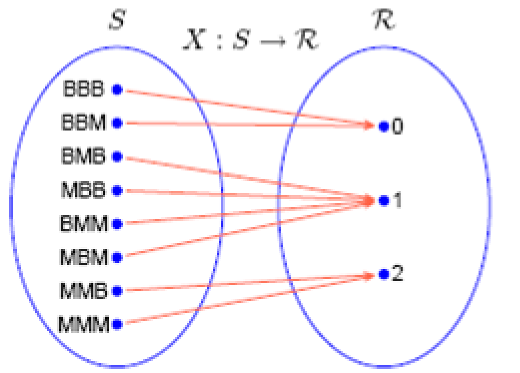
X: banyaknya M muncul dalam dua lemparan pertama

Y : banyaknya M muncul dalam lemparan ketiga

Distribusi peluang untuk dua variabel random disebut sebagai distribusi peluang bersama

Contoh 3
Distribusi peluang variabel random X :

x	$P(X = x)$
0	1/4
1	1/2
2	1/4



X : banyaknya M muncul dalam dua lemparan pertama

Peluang dan Variabel Random

Contoh (dua variabel random)
Distribusi peluang bersama X dan Y, $P(X = x, Y = y)$:

x	y = 0	y = 1	$P(X = x)$
0	{BBB}	{BBM}	1/4
1	{BMB, MBB}	{BMM, MBM}	1/2
2	{MMB}	{MMM}	1/4
$P(Y = y)$	1/2	1/2	1

Contoh (dua variabel random)
Distribusi peluang bersama X dan Y, $P(X = x, Y = y)$:

x	y = 0	y = 1	$P(X = x)$
0	1/8	1/8	1/4
1	2/8	2/8	1/2
2	1/8	1/8	1/4
$P(Y = y)$	1/2	1/2	1

Jika $P(X = x, Y = y) = P(X = x).P(Y = y)$ untuk setiap nilai dari X dan Y maka dua variabel random tersebut dikatakan independen

Contoh 4
Jika dalam keluarga terdapat dua orang anak, apabila peluang kelahiran antara anak wanita dan anak pria adalah sama, maka kemungkinan dari suatu keluarga memiliki dua orang anak adalah:

1. Anak pertama wanita, anak kedua juga wanita (WW)
2. Anak pertama wanita, tetapi anak kedua pria (WP)
3. Anak pertama pria, tetapi anak kedua wanita (PW)

4. Anak pertama pria, anak kedua juga pria (PP)
Dengan perbandingan WW : WP : PW : PP = 1:1:1:1, atau dinyatakan dalam bilangan-bilangan probabilitas 0,25 : 0,25 : 0,25 : 0,25. jumlah seluruh probabilitasnya adalah 1
Jika kombinasi WP dan PW disatukan dan diberikan simbul-simbul masing-masing p_1, p_2, p_3 untuk WW, WP dan PW, serta PP, maka perbandingan probabilitasnya akan menjadi:
WW atau 2W maka P1 = 0,25
WP dan Pw atau 1W1P maka p2 = 0,25 + 0,25
PP atau 2P maka P3 = 0,25

CONTOH 5.
Jika kita melakukan pelemparan sebuah mata uang logam, maka diperoleh probabilitas p (muka G) = p(muka A) = ½, jika dihitung banyaknya muka G yang nampak, maka muka A = 0 G dan muka G – 1 G jika muka G diberi simbul x, maka muka untuk A dan G masing-masing x = 0 dan x = 1. di dapat notasi baru p(x=0) =1/2 dan p(x=1) =1/2
Jika lemparan yang dilakukan dengan menggunakan dua buah mata uang, maka peristiwa yang terjadi adalah: GG, GA, AG, dan AA. Probabilitas dari kejadian tersebut adalah p(GG) = p(GA) = p(AG) = p(AA) = ¼. Dalam bentuk tabel ditulis sebagai berikut:
Tabel Distribusi Probabilitas Gejala Diskrit

X	P (X)
0	¼
1	½
2	1/4
Jumlah	1

Contoh 6
Hasil pengamatan menunjukkan bahwa setiap jam frekuensi siswa yang meminjam buku sebuah perpustakaan mengikuti distribusi probabilitas sebagai berikut.

Banyak siswa	0	1	2	3	4	5	6
Probabilitas	0.02	0,04	0.05	0,08	0,07	0,03	0,01

Berapakah probabilitas dalam satu jam paling sedikit ada 4 siswa yang keperpustakaan?
Berapakah rata-rata siswa yang datang keperpustakaan tiap jam ?

SOLUSI.
Probabilitas dalam satu jam paling sedikit ada 4 siswa yang datang keperpustakaan adalah = 1- 0,26 = 0,74.
Rata-rata siswa yang datang keperpustakan tiap jam
= (0)(0,02)+(1)(0,04)+……..+(6)(0,01)=0,71

Kovariansi
Ukuran numerik untuk variansi bersama dua variabel random

$$\begin{aligned} \mathrm{Kov}(X,Y) &= \mathrm{E}\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] \\ &= \mathrm{E}(XY) - \mu_X\mu_Y \end{aligned}$$

Korelasi
Kovariansi dibagi dengan standar deviasi X dan standar deviasi Y

$$\mathrm{Kor}(X,Y) = \frac{\mathrm{Kov}(X,Y)}{\sigma_X.\sigma_Y}$$

Harga harapan untuk penjumlahan dan pengurangan dua variabel random,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X+Y) &= \mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y) \\ \mathrm{E}(X-Y) &= \mathrm{E}(X)-\mathrm{E}(Y) \end{aligned}$$

Variansi untuk penjumlahan dan pengurangan dua variabel random,

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X+Y) &= \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\mathrm{Kov}(X,Y) \\ \mathrm{Var}(X-Y) &= \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)-2\mathrm{Kov}(X,Y) \end{aligned}$$

1. Distribusi Bernoulli
Eksperimen Eksperimen Bernoulli dengan hanya dua hasil yang mungkin
Contoh
melempar mata uang logam satu kali
Mengamati telur ayam, apakah anak ayam itu jantan atau betina
Mengamati kedelai yang ditanam, tumbuh atau tidak
Reaksi obat pada tikus, positif atau negatif

Sifat-sifat Eksperimen Bernoulli
– tiap usaha (*trial*) menghasilkan satu dari dua hasil yang mungkin, dinamakan sukses (S) dan gagal (G);
– peluang sukses, P(S) = p dan peluang gagal P(G) = 1 − p, atau P(G) = q;
– usaha-usaha tersebut independen

Distribusi Bernoulli

$$P(X = x; p) = p^x (1-p)^{1-x},$$

dengan $x = 0, 1$ (gagal, sukses) dan p adalah peluang mendapatkan hasil sukses.

2. Distribusi Binomial

Distribusi Binomial atau distribusi Bernoulli (ditemukan oleh James Bernoulli) adalah suatu distribusi probabilitas teoritis yang menggunakan variabel random diskrit yang terdiri dari dua kejadian yang berkomplemen, seperti sukses-gagal, ya-tidak, baik-cacat, kepala-ekor dll.

Ciri-ciri distribusi Binomial adalah sbb :
1. Setiap percobaan hanya memiliki dua peristiwa, seperti ya-tidak, sukses-gagal.
2. Probabilitas suatu peristiwa adalah tetap, tidak berubah untuk setiap percobaan.
3. Percobaannya bersifat independen, artinya peristiwa dari suatu percobaan tidak mempengaruhi atau dipengaruhi peristiwa dalam percobaan lainnya.
4. Jumlah atau banyaknya percobaan yang merupakan komponen percobaan binomial harus tertentu.

Rumus Distribusi Binomial

a). Rumus binomial suatu peristiwa

Probabilitas suatu peristiwa dapat dihitung dengan mengalikan kombinasi susunan dengan probabilitas salah satu susunan. Berdasarkan hal tersebut, secara umum rumus dari probabilitas binomial suatu peristiwa dituliskan:

$$P(X = x) = C_x^n . p^x . q^{n-x}$$

Dimana :

$$C_x^n = \frac{n!}{x!(n-x)!} \qquad \text{dan} \qquad q = 1 - p$$

Contoh 7 (Distribusi Binomial)

Suatu uang logam yang baik (seimbang) dilempar 4 kali. X adalah banyaknya muka muncul dalam 4 kali pelemparan tersebut.

Pelemparan dipandang sebagai usaha, dan sukses adalah muka muncul. X merupakan variabel random binomial dengan n = 4 dan p = 1/2 dengan distribusi peluang:

$$P(X = x; 4, \frac{1}{2}) = \binom{4}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x (1 - \frac{1}{2})^{4-x}, \qquad x = 0, 1, 2, 3, 4$$

Peluang muka muncul paling tidak dua kali, $X \geq 2$

$$P(X \geq 2; 4, \frac{1}{2}) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$
$$= \frac{11}{16}$$

b). Probabilitas binomial kumulatif

Probabilitas binomial kumulatif adalah probabilitas dari peristiwa binomial lebih dari satu sukses. Probabilitas binomial kumulatif dapat dihitung dengan menggunakan rumus :

$$PBK = \sum_{x=0}^{n} C_x^n . p^x . q^{n-x}$$
$$= \sum_{x=0}^{n} P(X = x)$$
$$= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + \ldots + P(X=n)$$

Contoh 8:

Sebuah dadu dilemparkan keatas sebanyak 4 kali. Tentukan probabilitas dari peristiwa berikut :

a). Mata dadu 5 muncul 1 kali

b). Mata dadu genap muncul 2 kali

c). Mata dadu 2 atau 6 muncul sebanyak 4 kali.

Jawab

a). Karena dadu memiliki 6 sisi, yaitu 1, 2, 3, 4, 5, 6, sehingga setiap sisi memiliki probabilitas 1/6. Jadi, probabilitas untuk mata 1 adalah 1/6, sehigga :

p=1/6; q=5/6; n=4; x=1 (muncul 1 kali)

$P(X=1) = C^1{}_4.p^1.q^3$

= 4(1/6)1(5/6)3

= 0,386

b). Mata dadu genap ada 3, yaitu 2,4, dan 6, sehingga :

p = 3/6 = 1/2; q = 1/2; n = 4; x = 2

$P(X=2) = C^2{}_4.p^2.q^2$

$= 6(1/2)^2(1/2)^2$

= 0,375

c). Muncul mata dadu 2 atau 6 sebanyak 4 kali, sehngga :

p = 2/6; q = 2/3; n = 4; x = 4

$P(X=4) = C^4{}_4.p^4.q^0$

$= 1(2/6)^4(2/3)^0$

= 0,0123

3. Distribusi Poisson

Distibusi Poisson merupakan distribusi probabilitas untuk variabel diskrit acak yang mempunyai nilai 0,1, 2, 3 dst. Distribusi Poisson adalah distribusi nilai-nilai bagi suatu variabel random X (X diskrit), yaitu banyaknya hasil percobaan yang terjadi dalam suatu interval waktu tertentu atau disuatu daerah tertentu. fungsi distribusi probabilitas diskrit yang sangat penting dalam beberapa aplikasi praktis. Poisson memperhatikan bahwa distribusi binomial sangat bermanfaat dan dapat menjelaskan dengan sangat memuaskan terhadap probabilitas Binomial $b(X \mid n.p)$ untuk X= 1,2,3 …n. Namun demikian, untuk suatu kejadian dimana n sangat besar (lebih besar dari 50) sedangkan probabilitas sukses (p) sangat kecil seperti 0,1 atau kurang, maka nilai binomialnya sangat sulit dicari. Suatu bentuk dari distribusi ini adalah rumus pendekatan peluang Poisson untuk peluang Binomial yang dapat digunakan untuk pendekatan probabilitas Binomial dalam situasi tertentu.

Ciri-ciri ditribusi Poisson.
Percobaan Poisson memiliki ciri-ciri berikut bahwa hasil percobaan pada suatu selang waktu dan tempat tidak tergantung dari hasil percobaan di selang waktu dan tempat yang lain yang terpisah, Peluang terjadinya suatu hasil percobaan sebanding dengan panjang selang waktu dan luas tempat percobaan terjadi. Hal ini berlaku hanya untuk selang waktu yang singkat dan luas daerah yang sempit Peluang bahwa lebih dari satu hasil percobaan akan terjadi pada satu selang waktu dan luasan tempat yang sama diabaikan

Penggunaan Distribusi Poisson
Distribusi poisson banyak digunakan dalam hal:
a). menghitung Probabilitas terjadinya peristiwa menurut satuan waktu, ruang atau isi, luas, panjang tertentu, seperti:

- ✓ Menghitung probabilitas dari kemungkinan kesalahan pemasukan data atau kemungkinan cek ditolak oleh bank.
- ✓ Jumlah pelanggan yang harus antri pada pelayanan rumah sakit, restaurant cepat saji atau antrian yang panjang bila ke ancol.
- ✓ Banyaknya bintang dalam suatu area acak di ruangangkasa atau banyaknya bakteri dalam 1 tetes atau 1 liter air.
- ✓ Jumlah salah cetak dalam suatu halaman ketik. Banyaknya penggunaan telepon per menit atau banyaknya mobil yang lewat selama 5 menit di suatu ruas jalan.
- ✓ Distribusi bakteri di permukaan beberapa rumput liar di ladang. Semua contoh ini merupakan beberapa hal yang menggambarkan tentang suatu distribusi Poisson.

b). Menghitung distribusi binomial apabila nilai n besar ($n \geq 30$) dan p kecil ($p<0,1$).
Jika kita menghitung sejumlah benda acak dalam suatu daerah tertentu T, maka proses penghitungan ini dilakukan sebagai berikut :

- ✓ jumlah rata-rata benda di daerah S T adalah sebanding terhadap ukuran S, yaitu ECount(S)= λ S. Di sini melambangkan ukuran S, yaitu panjang, luas, volume, dan lain lain. Parameter $\lambda > 0$ menggambarkankan intensitas proses.
- ✓ menghitung di daerah terpisah adalah bebas.
- ✓ kesempatan untuk mengamati lebih dari satu benda di dalam suatu daerah kecil adalah sangat kecil

Rumus Distribusi Poisson

Rumus Poisson dapat digunakan untuk menghitung probabilitas dari jumlah kedatangan, misalnya : probabilitas jumlah kedatangan nasabah pada suatu bank pada jam kantor. Distribusi Poisson ini digunakan untuk menghitung probabilitas menurut satuan waktu.

Rumus Probabilitas Poisson Suatu Peristiwa

Probabilitas suatu peristiwa yang berdistribusi Poisson dirumuskan:

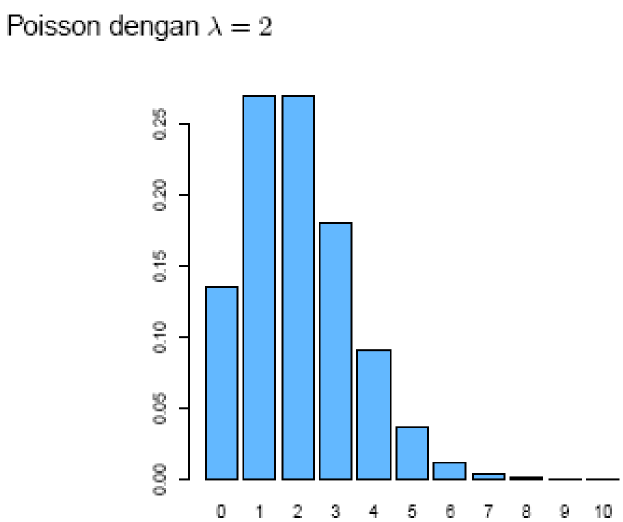
$$P(X) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} ; x = 0,1,2,...$$

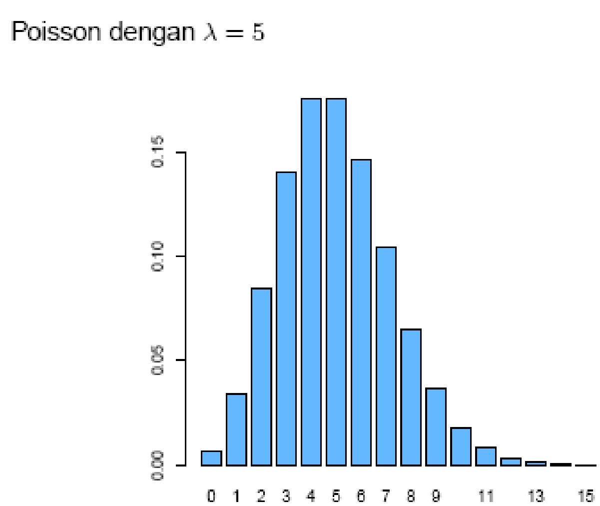
Keterangan: P(x) = Nilai probabilitas distribusi poisson μ =λ= Rata-rata hitung dan jumlah nilai sukses, dimana μ = n.p.

e = Bilangan konstan = 2,71828

X = Jumlah nilai sukses P = Probabilitas sukses suatu kejadian

! = lambang faktorial





Contoh 9

Jumlah emiten di BEJ ada 150 perusahaan. Probabilitas perusahaan memberikan deviden pada tahun 2002 hanya 0,1. apabila BEJ meminta laporan dari emiten sebanyak 5 perusahaan, berapa probabilitas 5 perusahaan tersebut adalah perusahaan yang membagikan deviden?

Jawab:

n = 150, X = 5, dan p = 0,1 (ini merupakan cirri distribusi Poisson, n > 50 dan p kecil yaitu)
$\mu = n \cdot p = 150 \times 0{,}1 = 15$
Jadi probabilitas 5 perusahaan sample membagikan deviden hanya 0,002 atau 0,2%

4. Distribusi Multinomial

Distribusi multinomial merupakan perluasan dari distribusi binomial, jika pada distribusi binomial hanya tertekan pada 2 pilihan atau 2 kemungkinan yang mungkin terjadi dari sebuah peristiwa maka pada distribusi multinomial adalah banyak kemungkinan yang mungkin terjadi dari sebuah peristiwa.

Sebuah eksperimen menghasilkan peristiwa-peristiwa $E_1, E_2, \dots, E_k$
dengan peluang $p_1 = P(E_1)$, $p_2 = P(E_2)$,….., $p_k = P(E_k)$,
dengan $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$.
Terhadap eksperimen ini dilakukan percobaan sebanyak n kali. Sehingga peluang akan terdapat x_1 peristiwa E_1, x_2 peristiwa E_2, ……, x_k peristiwa E_k di antara N, ditentukan oleh distribusi multinom yaitu:

$$f(x;n,p) = (n! /(x1!x2!\cdots xk!))p_1^{x1}p_2^{x2}\cdots p_k^{xk}$$

Dengan $x_1 + x_1 + \dots + x_k = n$ dan $\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_K = 1$,
sedang $0 < p_i < 1$
i = 1, 2, ……,k.
Ekspektasi terjadinya tiap peristiwa $E_1, E_2, \dots, E_k$ dalam peristiwa multinom, berturut-turut adalah:

$Np_1, Np_2, \dots Np_k$

Sedangkan variansnya masing-masing:

$Np_1(1- p_1), Np_2(1- p_2), \dots Np_k(1- p_k)$.

Percobaan multinomial terjadi bila tiap usaha dapat memberikan lebih dari dua hasil yang mungkin. Jadi, pembagian hasil pabrik jadi ringan, berat/masih dapat diterima, demikaian juga percobaan kecelakaan disuatu simpang jalan menurut hari dalam seminggu merupakan percobaan multinomial. Penarikan suatu kartu dari sekotak kartu brige *dengan pengambila* juga merupakan percobaan multinomial bila yang menjadi perhatian keempat warna kartu.

Secara umum, bila suatu usaha dapat menghasilkan “ hasil mungkin , masing-masing dengan peluang , maka **distribusi multinom** akan memberikan peluang bahwa terjadi sebanyak kali, kali, sebanyak kali dalam bebas dengan:

Distribusi peluang gabungan seperti ini akan dinyatakan dengan . Jelaslah bahwa , karena hasil tiap usaha haeuslah salah dari hasil yang mungkin.

<u>Contoh 10</u>

Dua buah dadu dilempar enam kali, berapa peluang muncul bilangan yang hasil penjumlahannya adalah 7 atau 11 sebanyak dua kali, bilangan yang sama muncul sekali dan hasil yang lainnya muncul tiga kali?

Jawab

Banyaknya titik sampel pada pelemparan dua buah dadu adalah 36 titik sampel.

1. Kejadian E1, muncul bilangan yang hasil penjumlahannya adalah 7 atau 11 sebanyak dua kali. Pelungnya adalah 6/36 +2/36 =2/9 . .
2. Kejadian E2, muncul bilangan yang sama sebanyak dua sekali. Peluangnya adalah 6/36 =1/6 . .
3. Kejadian E3, muncul hasil lainnya sebanyak dua sekali. Peluangnya adalah 1−2/9 −1/6 =11/18 .

Diketahui juga n=6 dimana x_1=2, x_2=1, dan x3=3, maka persoalan tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan rumus Distribusi Multinomial.
$f(x;n,p) =(6!/(2!1!3!))(2/9)^2 (1/6)^1 (11/18)^3 =0,1127$

5. Distribusi Hipergeometrik

Eksperimen hipergeometrik: dalam populasi berukuran N sebanyak k dinamakasukses sedangkan sisanya N − k dinamakan gagal, sampel berukuran n diambil dari N benda, Cara pengambilan sampel tanpa pengembalian.

Misalkan ada sebuah populasi berukuran N diantaranya terdapat D buah termasuk kategori tertentu. Dari populasi ini sebuah sampel acak diambil berukuran n. pertanyaan yang timbul ialah: berapa peluang dalam sampel itu terdapat x buah termasuk kategori tertentu itu? Jawabannya ditentukan oleh distribusi hipergeometrik di bawah ini:

Distribusi Hipergeometrik

Distribusi peluang:

$$P(X = x; N, n, k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, \min(n, k)$$

Mean dan Variansi

$\mathrm{E}(X) = n\frac{k}{N}$; $\qquad \mathrm{Var}(X) = n\frac{k}{n}\frac{N-k}{N}\frac{N-n}{N-1}$

Contoh 11 (Distribusi Hipergeometrik)

Suatu kotak berisi 40 suku cadang dengan 3 rusak. Sampel berukuran 5 diambil sekaligus dari kotak. Pengambilan sampel ini adalah suatu eksperimen hipergeometrik dengan X adalah banyaknya suku cadangrusak, N = 40, n = 5 dan k = 3 dengan distribusi peluang:

$$P(X = x; 40, 5, 3) = \frac{\binom{3}{x}\binom{37}{5-x}}{\binom{40}{5}}, \qquad x = 0, 1, 2, 3$$

Peluang ditemukan satu suku cadang rusak dalam pengambilan sampel tersebut

$$P(X = 1; 40, 5, 3) = \frac{\binom{3}{1}\binom{37}{4}}{\binom{40}{5}} = 0,3011$$

Peluang ditemukan paling tidak satu suku cadang rusak dalam pengambilan sampel tersebut

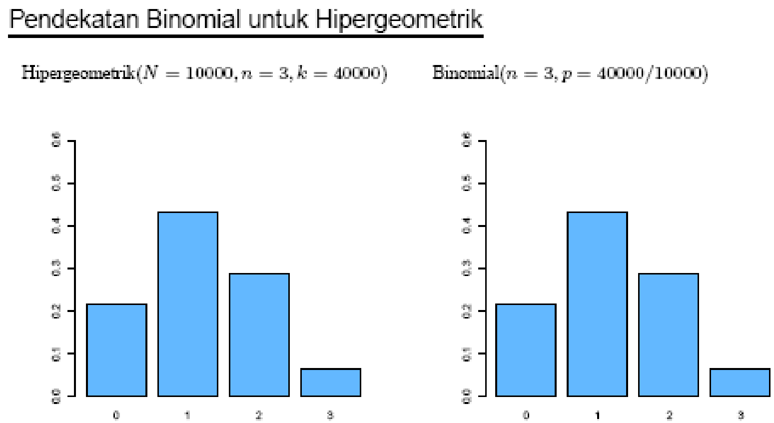
$$\begin{aligned} P(X \geq 1; 40, 5, 3) &= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= 0,301 + 0,0354 + 0,0010 \\ &= 0,3376 \end{aligned}$$

Pendekatan Binomial untuk Hipergeometrik

$X \sim \mathrm{Hipergeometrik}(N, n, k)$

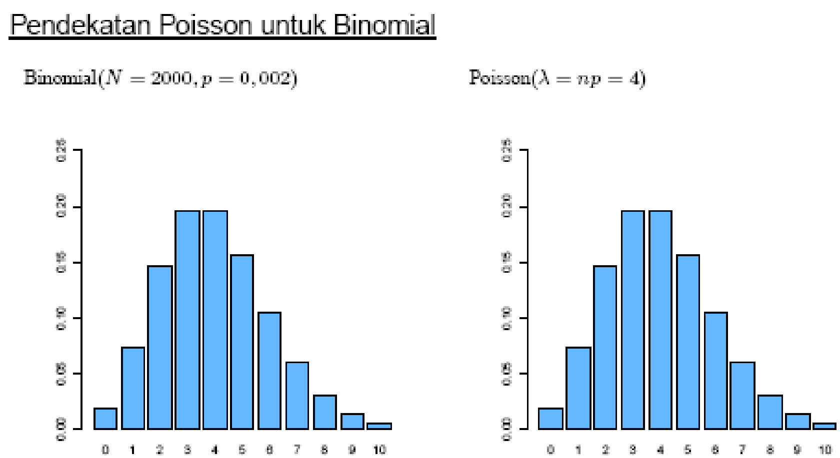
Bila n cukup kecil $(n/N < 5\%)$

$$\mathrm{Hipergeometrik}(N, n, k) \to \mathrm{Binomial}(N, p), \text{ dengan } p = \frac{k}{N}$$



Pendekatan Poisson untuk Binomial :

- X ~ Binomial(n, p)
- Bila n besar dan n kecil,
  - Binomial(n, p) → Poisson(λ), dengan λ = np



B. Distribusi Probabilitas Kontinu

Distribusi Normal

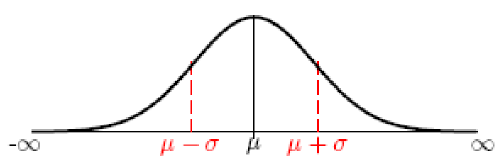
Distribusi Normal dengan mean E(X) = μ dan variansi Var(X) = σ^2 (ditulis N(μ, σ^2))

mempunyai fungsi peluang, $$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty < x < \infty$$

dengan $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma^2 > 0$, ¼ = 3, 141593 . . . Dan e = 2, 718282 . . .

Distribusi Normal standar: distribusi Normal dengan mean 0 dan variansi 1, ditulis N(0, 1)

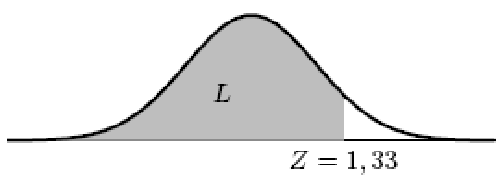
Kurva Normal



Sifat-sifat:

- simetris terhadap sumbu vertikal melalui μ,
- memotong sumbu mendatar (sumbu x) secara asimtotis,
- harga modus (maksimum) terletak pada $x = \mu$,
- mempunyai titik belok pada $x = \mu \pm \sigma$,

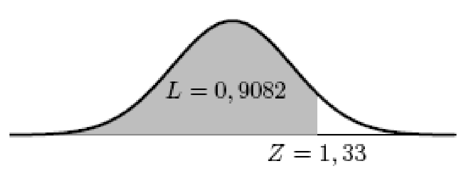
Luasan di bawah Kurva Normal



Contoh 1:
transformasi dari X ke Z,

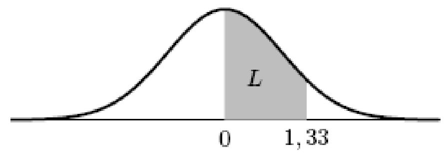
$$\begin{aligned} Z &= \frac{X-\mu}{\sigma} \\ &= \frac{76-60}{12} \\ &= 1,33 \end{aligned}$$

Luasan di bawah Kurva Normal



Contoh 1:

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
...										
0,0										
...										
1,3				0,9082						



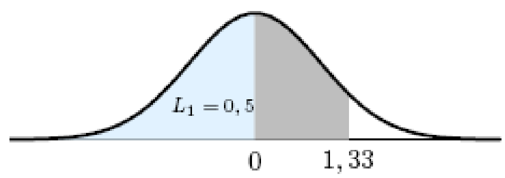
Contoh 2:

transformasi dari $X = 60$ ke Z,

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{60 - 60}{12} = 0$$

transformasi dari $X = 76$ ke Z,

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{76 - 60}{12} = 1,33$$



Contoh 2:

$$L = L_2 - L_1 = 0,9082 - 0,5$$

C. Hukum Probabilitas

Asas perhitungan probabilitas dengan berbagai kondisi yang harus diperhatikan

1. Hukum Pertambahan

Terdapat 2 kondisi yang harus diperhatikan yaitu:

a) Mutually Exclusive (saling meniadakan)

Rumus: P (A U B) = P (A atau B)= P (A) + P (B)

Contoh:

Probabilitas untuk keluar mata 2 atau mata 5 pada pelemparan satu kali sebuah dadu adalah:

P(2 U 5) = P (2) + P (5) = 1/6 + 1/6 = 2/6

b) Non Mutually Exclusive (dapat terjadi bersama)

Peristiwa *Non Mutually Exclusive (Joint)* adalah dua peristiwa atau lebih dapat terjadi bersamasama (tetapi tidak selalu bersama).

Contoh penarikan kartu as dan berlian :

$(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Peristiwa terjadinya A dan B merupakan gabungan antara peristiwa A dan peristiwa B. Akan tetapi karena ada elemen yang sama dalam peristiwa A dan B, gabungan peristiwa A dan B perlu dikurangi peristiwa di mana A dan B memiliki elemen yang sama. Dengan demikian, probabilitas pada keadaan di mana terdapat elemen yang sama antara peristiwa A dan B maka probabilitas A atau B adalah probabilitas A ditambah probabilitas B dan dikurangi probabilitas elemen yang sama dalam peristiwa A dan B.

2. Hukum Perkalian

Terdapat dua kondisi yang harus diperhatikan apakah kedua peristiwa tersebut saling bebas atau bersyarat.

a) Peristiwa Bebas (Independent)

Apakah kejadian atau ketidakjadian suatu peristiwa tidak mempengaruhi peristiwa lain.

Contoh:

Sebuah coin dilambungkan 2 kali maka peluang keluarnya H pada lemparan pertama dan pada lemparan kedua saling bebas.

$P(A \cap B) = P(A \text{ dan } B) = P(A) \times P(B)$

Peristiwa Bebas (Hukum Perkalian)

Contoh

1. Sebuah dadu dilambungkan dua kali, peluang keluarnya mata 5 untuk kedua kalinya adalah : $P(5 \cap 5) = 1/6 \times 1/6 = 1/36$
2. Sebuah dadu dan koin dilambungkan bersama-sama, peluang keluarnya hasil lambungan berupa sisi H pada koin dan sisi 3 pada dadu adalah:

   $P(H) = ½, P(3) = 1/6$

   $P(H \cap 3) = ½ \times 1/6 = 1/12$

b) Peristiwa tidak bebas (Hukum Perkalian)

Peristiwa tidak bebas atau peristiwa bersyarat (*Conditional Probability*) adalah dua peristiwa dikatakan bersyarat apabila kejadian atau ketidakjadian suatu peristiwa akan berpengaruh terhadap peristiwa lainnya.

Contoh:

Dua buah kartu ditarik dari set kartu bridge dan tarikan kedua tanpa memasukkan kembali kartu pertama, maka probabilitas kartu kedua sudah tergantung pada kartu pertama yang ditarik. Simbol untuk peristiwa bersyarat adalah P (B│A) -> probabilitas B pada kondisi A

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B \mid A)$

Contoh soal:

Dua kartu ditarik dari satu set kartu bridge, peluang untuk yang tertarik keduanya kartu as adalah sebagai berikut:

Peluang as I adalah 4/52 -> P (as I) = 4/52

Peluang as II dengan syarat as I sudah tertarik adalah 3/51

P (as II │as I) = 3/51

P (as I ∩ as II) = P (as I) x P (as II│ as I)

= 4/52 x 3/51 = 12/2652 =1/221

D. Permutasi

Permutasi adalah susunan unsur-unsur yang berbeda dalam urutan tertentu. Pada permutasi urutan diperhatikan sehingga $AB \neq BA$.

Permutasi k unsur dari n unsur $k \leq n$ adalah semua urutan yang berbeda yang mungkin dari k unsur yang diambil dari n unsur yang berbeda. Banyak permutasi k unsur dari n unsur ditulis $_nP_k$, P_n^k atau $P(n,k)$. Nilai dari $P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Permutasi siklis (melingkar) dari n unsur adalah (n-1) !

Cara cepat mengerjakan soal permutasi

dengan penulisan nPk, hitung 10P4

kita langsung tulis 4 angka dari 10 mundur, yaitu 10.9.8.7

jadi 10P4 = 10x9x8x7 berapa itu? hitung sendiri

Contoh permutasi siklis :

Suatu keluarga yang terdiri atas 6 orang duduk mengelilingi sebuah meja makan yang berbentuk lingkaran. Berapa banyak cara agar mereka dapat duduk mengelilingi meja makan dengan cara yang berbeda?

Jawab :
Banyaknya cara agar 6 orang dapat duduk mengelilingi meja makan dengan urutan yang berbeda sama dengan banyak permutasi siklis (melingkar) 6 unsur yaitu :

$$(n-1)\ ! \quad = (6-1)!$$
$$= 5\ !$$
$$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

E**. Kombinasi**
Kombinasi adalah susunan unsur-unsur dengan tidak memperhatikan urutannya. Pada kombinasi AB = BA. Dari suatu himpunan dengan n unsur dapat disusun himpunan bagiannya dengan untuk $k \leq n$. Setiap himpunan bagian dengan k unsur dari himpunan dengan unsur n disebut kombinasi k unsur dari n yang dilambangkan dengan ,

${}_nC_k$, C_k^n, atau $C\ (n,k)$ dengan rumus :

$$C\ (n,k) = \frac{n!}{(n-k)\ !\, k!}$$

Contoh :
Diketahui himpunan $A = \{x | x \leq 5, x \in c\}$.
Tentukan banyak himpunan bagian dari himpunan A yang memiliki 2 unsur!
Jawab :
$$A = \{x | x \leq 5, x \in c\} = \{0,1,2,3,4,5\}$$

n (A) = 6
Banyak himpunan bagian dari A yang memiliki 2 unsur adalah C (6, 2).

$$C\ (6,2) = \frac{6!}{(6-2)\ !2!} = 15$$

Cara cepat mengerjakan soal kombinasi

dengan penulisan nCk, hitung 10C4

kita langsung tulis 4 angka dari 10 mundur lalu dibagi 4!, yaitu 10.9.8.7 dibagi 4.3.2.1
jadi 10C4 = 10x9x8x7 / 4x3x2x1

Soal

1. Seorang pemain *bridge* sedang memegang 12 kartu *bridge* yaitu 5 kartu *spade*, 4 kartu *heart* dan 3 kartu *diamond*. Jika 6 kartu diambil dari tangan pemain *bridge* tersebut secara acak, berapakah peluang terambilnya 3 kartu *spade*, 2 kartu *heart* dan 1 kartu *diamond*?

2. Sebuah kotak berisi 3 barang yang dihasilkan oleh mesin A, 4 oleh mesin B, dan 5 oleh mesin C. Kecuali dikategorikan berdasarkan mesin, identitas lainnya mengenai barang tersebut sama. Sebuah barang diambil secara acak dari kotak itu, identitas mesinnya dilihat, lalu disimpan kembali ke dalam kotak. Tentukan peluang di antara 6 barang yang diambil dengan jalan demikian didapat 1 dari mesin A, 2 dari mesin B, dan 3 dari mesin C.
3. Sebuah dadu dan koin dilambungkan bersama-sama, peluang keluarnya hasil lambungan berupa sisi H pada koin dan sisi 5 pada dadu adalah
4. Distribusi Normal dengan mean $\mu = 60$ dan deviasi standar $\sigma = 12$, $N(60, 12^2)$. Hitunglah luas kurva Normal antara 68 sampai 84.

Referensi:

1. Ronald E. Walpole, Raymond H. Myers, Sharon L. Myers and Keying Ye, *Probabilitiy and Statistics for Engineers and Scientists,* Pearson Prentice Hall, 8th edition, 2007

2. Subhash Sharma, *Applied Multivariate Techniques*, , John wiley and son

3. R Johson and D Wichern, *Applied multivariate statistics*, Prentice Hall.

4. J. Supranto, M.A. ,2001, Statistika Teori dan Aplikasi, Erlangga, Jakarta.

5. Douglas C. Montgomery, George C. Runger, 2003, Applied Statistic and Probability for Engineer, third edition, John Wiley and Son Inc.