MODUL TATAP MUKA 1
ESA143 - MATEMATIKA

Materi 1

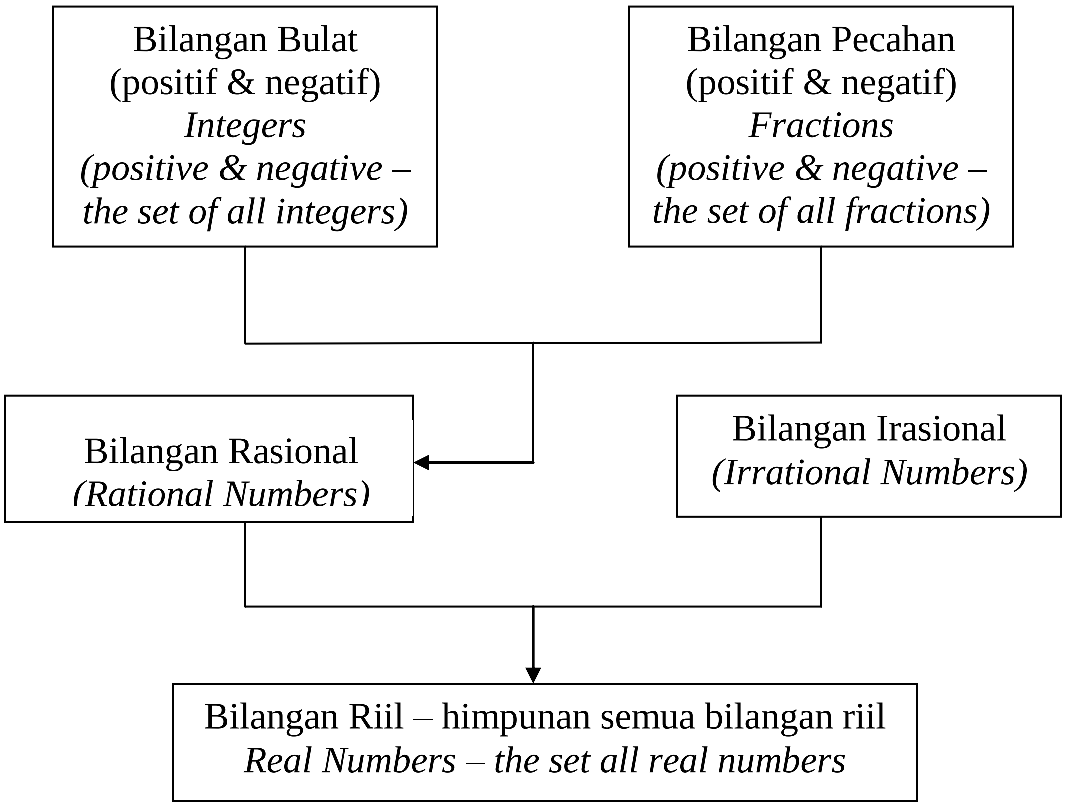
ELEMEN MATEMATIK

Disusun Oleh

TEAM DOSEN

Universitas
Esa Unggul

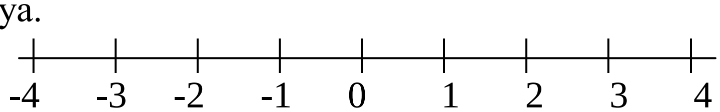
<u>Bahan 2.1</u>
SISTEM BILANGAN RIIL DAN GARIS
(THE REAL NUMBER SYSTEM AND A LINE)



Contoh :

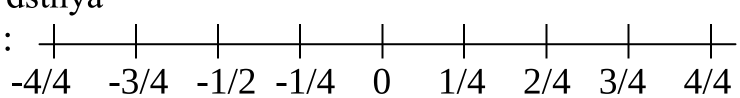
1. Bilangan bulat (the set of all integers)

- ☑ 1, 2, 3, … dstnya.
- ☑ 0, -1, -2, -3, … dstnya.
- ☑ Pada garis (a line) :



2. Bilangan pecahan (the set of all fractions) -- yaitu rasio dari dua bilangan bulat

- ☑ 1/2 atau 0,5, 2/3 atau 0,6667, ¾ atau 0,75, … dstnya.
- ☑ -1/2, -2/3, -3/4, … dstnya
- ☑ Pada garis (a line) :



☑ Di atas penggaris (a ruler), setiap bilangan pecahan berada diantara dua bilangan bulat.

3. Bilangan irasional – yaitu bilangan yang tidak dapat dinyatakan sebagai bilangan pecahan atau rasio dari dua bilangan bulat

☑ Contoh :
✪ $\sqrt{2}$ = 1,41423 -- a nonterminating decimal atau a non repeating
✪ π = 3.14159 -- the ratio of the circumference of any circle to its diameter

☑ Di atas penggaris (a ruler), setiap bilangan irasional berada diantara dua bilangan rasional.

4. Himpunan semua bilangan riil – the set of all real numbers

☑ Semua bilangan bulat (integers), bilangan pecahan (fractions), bilangan rasional (rational numbers), serta bilangan irasional (irrational numbers) merupakan suatu himpunan dari semua bilangan riil (the set of all real numbers).
Himpunan semua bilangan riil (the set of all real numbers) biasanya dengan notasi R dan dinyatakan pada suatu garis lurus atau disebut garis riil (the real line).

☑ Operasi untuk bilangan riil disajikan pada Bahan 2.5. di bawah.

5. Angka imajiner (imaginary numbers) dan angka kompleks (complex numbers)

☑ Angka imajiner (imaginary number) adalah angka yang merupakan akar dari angka negatif (the square roots of negative numbers) – jadi bukan bilangan riil , yaitu :

$$i = \sqrt{-1} = (-1)^{1/2} \quad \text{atau} \quad i^2 = \{\sqrt{-1} = (-1)^{1/2}\}^2 = \{(-1)^{1/2}\}^2 = -1$$

Sehingga misal $\sqrt{-9} = \sqrt{9}\,\sqrt{-1} = 3\sqrt{-1} =$ 3 i

☑ Angka kompleks (complex number) adalah angka terdiri dari bilangan riil dan angka imajiner, misal (8 + i) dan (3 +5i), atau secara umum didefinisikan sebagai (h + vi) dimana h dan v adalah bilangan riil dan v $\neq$ 0.

☑ Set imaginary numbers I disjoint dengan set bilangan riil R, atau $R \cap I = \varnothing$ (pengertian Disjoin pada Bahan 2.5. di bawah).

<u>Bahan 2.2.</u>

PENGERTIAN
VARIABEL (VARIABLES),
KONSTAN (CONSTANTS), KOEFISIEN (COEFFICIENTS),
PARAMETER (PARAMETERS), SERTA GARIS (A LINE)

A. VARIABEL (VARIABLES)

Suatu variabel (a variable) adalah sesuatu yang dapat dinyatakan dengan atau diberi angka (bilangan) atau nilai --- *a variable is something that can take on different values or assume various or different values, or something whose magnitude can change*.
Jenis variabel sebagai berikut :

1. Variabel-variabel pada suatu persamaan fungsi (a functional equation) terdiri dari :

   a. Variabel tergantung (a dependent variable), yaitu suatu variabel yang berada di kiri persamaan fungsi dan ditentukan oleh variabel-variabel yang berada di kanan atau disebut variabel bebas (independent variables).
   b. Variabel bebas (independent variables), yaitu variabel-variabel di kanan persamaan fungsi dan menentukan the dependent variable.

2. Variabel-variable pada suatu model ekonomi (an economic model) terdiri dari:

   a. Variabel internal (endogeneous variables), yaitu variabel dimana nilai atau angkanya ditentukan oleh model itu sendiri --- *whose solution values of variables determined by the model or originating from the model*.
   b. Variabel eksternal (exogeneous variables), yaitu variabel dimana nilai atau angkanya dari luar model, jadi bersifat data --- *which are assumed to be determined by forces external to the model, andf whose magnitudes are accepted as given adat only.*

B. KONSTAN (CONSTANTS), KOEFISIEN (COEFFICIENTS), PARAMETER (PARAMETERS)

1. Konstan (a constant)

   Suatu konstan (a constant) adalah suatu variabel dengan angka atau nilai yang tetap atau pasti (fixed).

2. Koefisien (a coefficient)

   Suatu koefisien (a coefficient) adalah suatu konstan (angka) di depan suatu variabel, misal 5X dimana X adalah variabel dan 5 adalah koefisien.

3. Parameter (parameters)

   Suatu parameter adalah suatu koefisien tetapi tidak berupa angka tetapi dalam huruf (kecil biasanya), misalnya mX (bukan 5X) dimana X adalah variabel dan m adalah parameter.

C. GARIS MENYATAKAN VARIABEL, KONSTAN, KOEFISIEN DAN PARAMETER

1. Variabel adalah garis

   Seperti dinyatakan pada Bahan 2.1. di atas bahwa di atas suatu garis terdapat bilangan riil.
   Oleh karena itu secara diagram, maka variabel dinyatakan oleh suatu garis (a line) karena setiap garis mengandung bilangan riil atau angka yang menyatakan nilai. Himpunan atau set dari bilangan riil itu diberi notasi R, seperti dinyatakan pada Bahan 2.1 di atas.

2. Pada garis terkandung angka tetap untuk konstan dan koefisien serta parameter

   Karena konstan dan koefisien, serta parameter yang wakili oleh huruf kecil, merupakan bilangan atau angka yang tetap, maka juga termasuk pada suatu garis.

Bahan 2.3

ATURAN UNTUK PANGKAT
(RULES ON EXPONENTS)
SERTA
KETIDAKSAMAAN DAN NILAI ABSOLUT
(INEQUALITIES AND ABSOLUTE VALUES)

A. ATURAN UNTUK PANGKAT (RULES ON EXPONENTS)

Aturan untuk pangkat (rules on exponents) berlaku untuk bilangan dan variabel. Dengan menggunakan variabel x dan y serta bilangan bulat (integers) m dan n, rincian aturan dimaksud berikut ini.

1. $x^n = x \cdot x \ldots x$ – merupakan perkalian dari variabel x sebanyak n, dimana n = bilangan bulat (positive integer)

   dan

   $x^1 = x$

2. $x^0 = 1$ --- dimana $x \neq 0$, berarti 0^0 = tidak ada (undefined)

3. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

4. $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ --- dimana $x \neq 0$

   Apabila m = n, maka $x^{m-n} = x^0 = 1 = \dfrac{x^m}{x^m} = \dfrac{x^n}{x^n}$

5. $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$

6. $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$

7. $(x^m)^n = x^{mn}$

8. $x^m \cdot y^m = (xy)^m$

B. KETIDAKSAMAAN DAN NILAI ABSOLUT (INEQUALITIES AND ABSOLUTE VALUES)

1. Ketidaksamaan (inequalities)

   Dengan menggunakan variabel a dan b untuk bilangan riil, aturan ketidaksamaan sebagai berikut.

   a. Ketidaksamaan bersifat transitif (transitive)

      Apabila $a > b$ dan $b > c$, maka $a > c$, atau
      Apabila $a \geq b$ dan $b \geq c$, maka $a \geq c$
      dimana tanda > dan < merupakan ketidaksamaan yang keras (strict inequalities), sedangkan ≥ dan ≤ untuk ketidaksamaan yang lemah (weal inequalities)

   b. Tambah-kurang

      $a > b$ ⇨(maka) $a \pm k > b \pm k$

   c. Perkalian dan pembagian

      $a > b$ ⇨(maka) untuk bilangan bulat atau bilangan pecahan k :
      $ka > kb$ (apabila k positif) dan $ka < kb$ (apabila k negatif)

   d. Pangkat

      $a > b$ (dimana $b \geq 0$) ⇨ (maka) $a^n > b^n$

2. Nilai absolute (absolute values) dan ketidaksamaan (inequalities)

   a. Nilai absolute (absolute value or numerical value) dari setiap bilangan riil (any real number) n adalah setelah tanda + (positif) atau ─ (negatif) dihilangkan dan dalam tanda | |, yaitu :

<table>
<tr><td>$$|n| = \begin{cases} n & jika\ n > 0 \\ -n & jika\ n < 0 \\ 0 & jika\ n = 0 \end{cases}$$</td><td>$$|15| = \begin{cases} 15 & jika\ n > 0 \\ -15 & jika\ n < 0 \\ 0 & jika\ n = 0 \end{cases}$$
$jadi,\ jika\ \ n = -15,\ maka |-15| = -(-15) = 15$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nilai absolute dari n disebut the modulus of n</td></tr>
</table>

b. $|x| < n \Leftrightarrow$ (sama artinya dengan) $-n < x < n$ dimana $n > 0$
atau dengan the weakinequalities
$|x| \leq n \Leftrightarrow$ (sama artinya dengan) $-n \leq x \leq n$ dimana $n > 0$

Contoh : $|x| < 10$, maka jika $x > 0$, berarti
$x < 10$ dan $-x < 10$ atau $x > -10$, sehingga
menjadi $-10 < x < 10$
atau dengan tanda $\leq$

c. $|m| + |n| \geq |m + n|$ -- tambah
$|m| - |n| \leq |m - n|$ -- kurang

Contoh : $|m| + |n| \geq |m + n|$
m = 5 dan n = 3, maka $|5| + |3| = |5 + 3| = 8$ -- tanda =
m = 5 dan n = -3, maka $|5| + |3| = 8 = |5 + -3| = 2$ -- tanda >
Contoh : $|m| - |n| \leq |m - n|$
m = 5 dan n = 3, maka $|5| - |3| = |5 - 3| = 2$ -- tanda =
m = 5 dan n = -3, maka $|5| - |3| = 2$ tapi $|5 - -3| = 8$ -- tanda <

d. $|m| . |n| = |m . n|$ -- perkalian
dengan m = 5 dan n = 3, maka $|5| . 3| = |5 . 3| = 15$
dengan m = 5 dan n = -3, maka $|5| . |3| = 15 = |5 . -3| = |-15| =$
$-(-15) = 15$

e. $\frac{|m|}{|n|} = \left|\frac{m}{n}\right|$

3. Soal
c. Cari x dari $(3x - 3) > (x + 1)$ -- jawaban $x > 2$
d. Cari interval x dari $-3 \leq 1 - x \leq 3$ – jawaban
$-2 \leq x \leq 4$ atau set $\{x| -3 \leq 1 - x \leq 3\}$
atau the closed interval $\{-2, 4\}$

Bahan 2.4

PENGERTIAN
PERSAMAAN FUNGSI (FUNCTIONAL EQUATIONS), PERSAMAAN KESAMAAN (IDENTIY EQUATIONS)

A. PERSAMAAN FUNGSI (FUNCTIONAL EQUATIONS)

Suatu persamaan fungsi (a functional equations) menyatakan suatu hubungan fungsi, dimana variabel di sisi kiri atau disebut variabel tergantung (dependent variable) ditentukan oleh variabel-variable di sisi kanan atau disebut variabel bebas atau variabel penentu atau independen (independent variables).
Jadi suatu functional equation menyatakan perilaku dimana atas dasar suatu cara atau metode (f) dependent variable ditentukan oleh independent variables.
Karena itu functional equations juga disebut sebagai behavioral functions.

Misal dengan dua independent variables X dan Y serta dependent variable Z, maka a functional (behavioral) function ditulis :

$$Z = f(X, Y) \text{ --- dengan bentuk fungsi, misalnya } Z = aX + bY$$

B. PERSAMAAN KESAMAAN (IDENTITY EQUATIONS)

Suatu persamaan kesamaan (an identity equation atau hanya disebut an identity) menyatakan suatu kesamaan (an identity) antara variabel (atau angka) di sisi kiri dengan penjumlahan atau pengurangan dari variabel-varaibel (atau angka) di sisi kanan.
Misal :
- dalam variabel : $L/R = P - B$ atau $D = S$
  dimana L/R = laba atau rugi, P = Hasil penjualan, B = Biaya
  D = demand (permintaan), S = supply (penawaran)
- dalam angka : $150 = 70 + 80$

Identities di atas dapat merupakan suatu persamaan kondisi (a conditional equation) seperti $D = S$, atau suatu persamaan definisi (a definitional equation) seperti $L/R = P - B$.

<u>Bahan 2.5</u>

HIMPUNAN (SETS)

A. PENGERTIAN DAN NOTASI SERTA JENIS HIMPUNAN (SETS)

1. Pengertian himpunan (set)

   Suatu himpunan (a set) adalah kumpulan dari obyek yang berbeda (distinct objects), dimana :
   - ☑ Obyek dari suatu set disebut elemen set (elements of the set).
   - ☑ Jenis obyek dapat berupa angka (numbers), perorangan (persons), jenis makanan (food items), atau lainnya.
   - ☑ Contoh set :
     Set dari semua mahasiswa di suatu kelas.
     Juga, set dari 3 angka bulat (three integers) 2, 3 dan 4.

2. Notasi set

   Terdapat dua cara penulisan suatu set (misal untuk set dari 3 angka bulat (integers) yaitu {2, 3, 4} :
   a. Dengan hitungan obyek (by enumeration), maka set S dari 3 obyek bilangan bulat (integers) ditulis :
   $$S = \{2, 3, 4\}$$
   b. Dengan deskripsi obyek (by description), maka set I dari semua bilangan bulat positif (sulit ditulis by enumeration) :
   Contoh 1 :
   $I = \{x \mid x \text{ bilangan bulat positif})$
   dibaca : I adalah set dari semua bilangan x, dimana x adalah setiap bilangan bulat (a positive integer).
   Contoh 2 :
   $J = \{x \mid 2 < x < 5\}$
   dibaca : J adalah set dari semua bilangan riil (all real numbers) lebih besar dari 2 tapi kurang dari 5)
   Contoh 3 :
   $x \in R$ -- menyatakan bahwa variabel x adalah sejumlah bilangan riil dan **variabel x dinyatakan sebagai suatu garis (a line)**.

c. Elemen set dinyatakan dengan symbol $\in$ (epsilon – huruf Yunani (the Greek), serta untuk bukan elemen dengan symbol $\notin$ (dibaca bukan elemen)**.** Misal :
   - ✪ Pada set S di atas : $2 \in S$ dan $3 \in S$; tapi $8 \notin S$ dan $9 \notin S$
   - ✪ Pada set I di atas : $8 \in I$; $9 \in I$, tapi $2 \notin I$ dan $3 \notin I$

3. Jenis set

a. Set terbatas (a finite set), yaitu set yang mempunyai elemen dengan jumlah dapat dihitung (countable atau denumerable), jadi bersifat terbatas jumlah elemennya, sehingga disebut a finite set.
   Contoh set S di atas : $S = \{2, 3, 4\}$.
   Set tidak terbatas (an infinite set), yaitu set yang mempunyai elemen dengan jumlah yang banyak sekali tetapi masih dapat dihitung (countable atau denumerable), atau bahkan jumlah yang tak terhingga (infinite atau noncountable atau nondenumerable).
   Contoh :
   - ✪ Set I di atas : $I = \{x \mid x \text{ bilangan bulat positif}\}$
     merupakan a countable infinite set
   - ✪ Set J di atas : $J = \{x \mid 2 < x < 5\}$ bilangan bulat positif}
     merupakan a noncountable infinite set, karena bilangan diantara 2 dan 5 adalah semua bilangan riil, yaitu integers, fractions, rational numbers, irrational numbers.
   - ✪ $x \in R$ -- yang merupakan suatu garis (a line) adalah an infinite set

B. HUBUNGAN ANTARA HIMPUNAN-HIMPUNAN (RELATIONSHIPS BETWEEN SETS)

Terdapat 4 (empat) bentuk hubungan antara himpunan (sets), seperti di bawah ini.

1. Subset antar dua sets

Untuk set $S = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, maka :

☑ Subset (dengan notasi $\subset$, atau disebut *in contained in*) dari set S, berarti elemen (x) dari setiap subset merupakan elemen dari set S, $x \in$ subset merupakan $x \in S$, meliputi :
   - ✪ setiap elemen S, misal $R \subset S$ dimana set $R = \{5\}$

- ✪ setiap pasangan 2 (pairs) misal dengan set T = {3,7} sehingga $T \subset S$
- ✪ setiap pasangan 3 (triple) dengan set M = {1, 3, 5} sehingga $M \subset S$
- ✪ setiap pasangan 4 (quadruples) dengan set N = {1, 3, 5, 7} sehingga $N \subset S$
- ✪ serta set S itu sendiri
- ✪ *Null set* atau *empty set* (dengan notasi ϕ atau {}) adalah subset S (setiap set yang lain) terkecil (the smallest possible subset of S or any set).

  Null set ϕ sebagai subset S (serta set lainnya), karena seandainya bukan, maka ϕ harus mempunyai paling tidak satu elemen x yang bukan elemen dari set S (x $\notin$ S) atau dari set lainnya. Tetapi, karena definisi mengatakan null set ϕ tidak mempunyai elemen, maka tidak bisa dikatakan ϕ bukan subset ($\not\subset$) dari set S atau $\phi \not\subset$ S. Karena itu null set ϕ merupakan subset dari set S atau $\phi \subset$ S.

  Catatan : Penting sekali membedakan null set atau empty set ϕ atau {} dengan set {0} dimana ada elemen nol (0).
- ✪ Total subset dari setiap set adalah 2^n dimana n = jumlah elemen dari setiap set.

  Untuk set S di atas yaitu S = {1, 3, 5, 7, 9} yang mempunyai elemen sebanyak 5 atau n = 5, maka total subset dari set S adalah 2^5 = 32 sebset.

- ☑ $S \supset T$, berarti set S termasuk (includes, dengan notasi $\supset$) set T.
- ☑ $S \supset Q$ dan $Q \subset S$, hanya apabila S = Q
- ☑ A proper subset of S, yaitu setiap subset yang tidak memiliki semua elemen set S, atau y $\in$ subset tapi y $\notin$ S.

1. Dua sets yang sama

   A = B, berarti set A = set B, apabila mempunyai elemen yang sama walaupun dengan order pada masing-masing set berbeda.

   Contoh : A = {2, 7, a, f} dan B = {2, a, 7, f}

2. Disjoint sets

   Disjoint sets apabila dua set masing-masing mempunyai elemen yang berbeda.

Misal, elemen dari set A yaitu semua bilangan bulat (all integers) positif, sama sekali bukan elemen set B yaitu set dari semua integer negatif.
Jadi set A dan set B bersifat *mutually exclusive* atau disjoint sets.

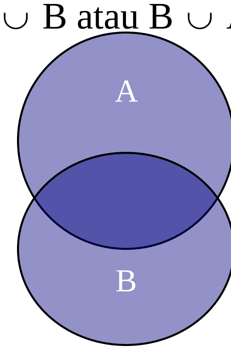
3. Dua set tidak sama dan bukan disjoint

Dua set A dan B tidak sama dan bukan disjoint (neither equal nor disjoint), apabila dua set A dan B memiliki sejumlah elemen yang sama (some elements in common) tetapi sisanya tidak sama (some elements peculiar to each).

C. JENIS DAN ATURAN OPERASI HIMPUNAN (TYPE AN LAWS OF OPERATIONS ON SETS)

1. Jenis operasi himpunan (type of operations on sets)

☑ Union ($\cup$) $\quad$ $A \cup B$ atau $B \cup A$

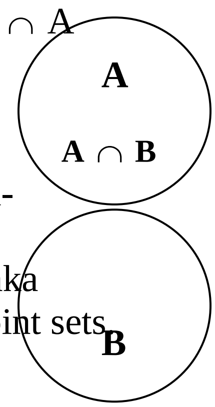


$A \cup B$ -- merupakan suatu set hasil gabungan atau kombinasi atau tambah (+) set A dan set B. Pada diagram di sebelah kanan, tidak saja menggambarkan $A \cup B$ tetapi juga $B \cup A$

Contoh :

✪ A = {3, 5, 7} dan B = {2, 3, 4, 8),
maka $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 7, 8\}$

✪ Set dari semua bilangan rasional (the set of all rational numbers) adalah union ($\cup$) dari set untuk semua bilangan bulat (the set of all integers) dan set dari semua bilangan pecahan (the set of all fractions).
Juga union ($\cup$) dari the set of all rational numbers dengan the set of all irrational numbers menghasilkan set semua bilangan riil (the set of all real numbers) $\quad$ $A \cap B$ atau $B \cap A$



☑ Intersection ($\cap$)

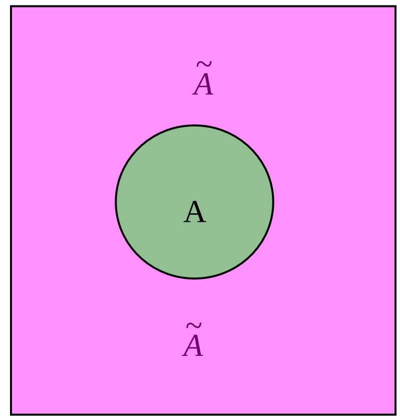
✪ Set hasil perpotongan (intersection) set A dan set B di atas, yaitu $A \cap B = \{3\}$.
Pada diagram di sebelah kanan tidak saja menunjukkan $A \cap B$ tetapi juga $B \cap A$.

✪ Dengan set C = {-3, 6, 10} dan D = {9, 2, 7, 4}, maka $C \cap D = \varnothing$ (null set), karena C dan D adalah Disjoint sets

Catatan : Jadi, perpotongan (intersection -- $\cap$) punya pengertian dan (and) : $A \cap B = \{x \in A \text{ and } x \in B\}$

Namun, gabungan atau kombinasi (union -- $\cup$), punya pengertian atau (or) : $A \cup B = \{x \in A \text{ or } x \in B\}$

☑ Komplemen set (complement set)



$\tilde{A}$ adalah notasi untuk komplemen set A (the complement of set A).

Misal, $U = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{5, 6\}$,

maka $\tilde{A} = \{7, 8, 9\}$, jadi

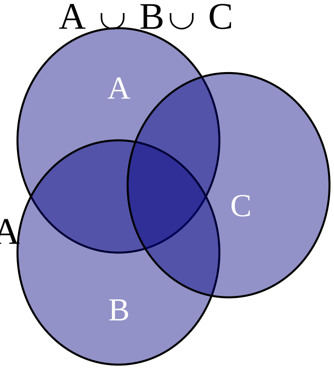
$\tilde{A} = \{x \mid x \in U \text{ dan } x \notin A\} = \{7, 8, 9)$

Set U disebut set universal (universal set)

sedangkan $\tilde{U} = \varnothing$ (null set)

2. Aturan operasi set (laws of set operations)
(atas dasar aturan operasi bilangan riil)

$A \cup B\cup C$



☑ The commutative law (of unions and intersections)

$A \cup B = B \cup A$ dan $A \cap B = B \cap A$

atas dasar : $a + b = b + a$ $\quad$ $a \times b = b \times a$

☑ The associative law (of unions and intersections)

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B)\cup C$

atas dasar : $a + (b + c) = (a + b) + c$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap$

atas dasar : $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

☑ The distributibe law (of unions and intersections)

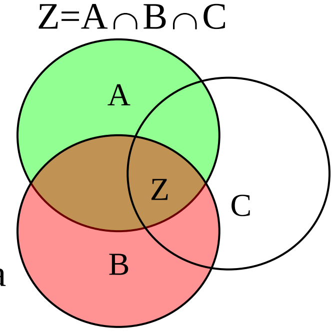
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

atas dasar : $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

Contoh : $A = \{4, 5\}$, $B = \{3, 6, 7\}$, $C = \{2, 3\}$,maka

Z=A$\cap$B$\cap$C



$A \cup (B \cap C) = \{4, 5\} \cup \{3\} = \{3, 4, 5\}$

$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{2, 3, 4, 5\} = \{3, 4, 5\}$

dan

$A \cap (B \cup C) = \{4, 5\} \cap \{2, 3, 6, 7\} = \varnothing$ (null set)

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$