MODUL MATEMATIKA 2

(IND 124)

MODUL SESI 13

PENERAPAN INTEGRAL LIPAT DUA

DISUSUN OLEH

SEPTIAN RAHMAT ADNAN, S.Si.,M.Si

UNIVERSITAS ESA UNGGUL

2020

Pokok Bahasan : PENERAPAN INTEGRAL LIPAT DUA
Sub Pokok Bahasan :

- Penerapan Integral Lipat Dua
- Luas Permukaan

Tujuan Instruksional Umum :
Agar mahasiswa dapat memahami dan menyelesaikan soal dan aplikasi yang berkaitan dengan penerapan integral lipat dua dan luas permukaan

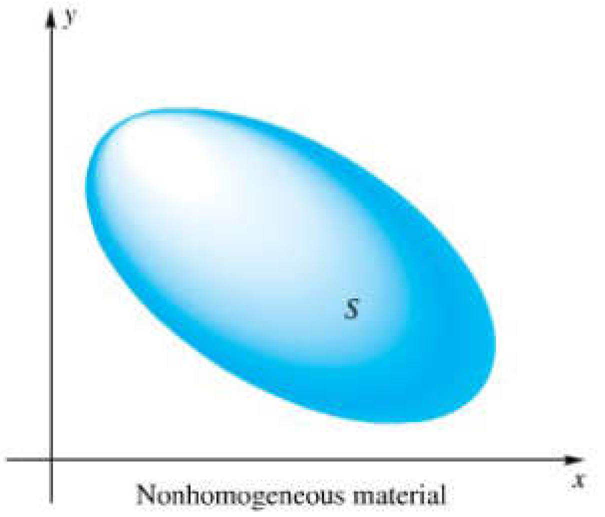
Tujuan Instruksional Khusus :
Agar mahasiswa mampu menjelaskan dan dapat menyelesaikan masalah yang terkait dengan :

- Penerapan Integral Lipat Dua
- Luas Permukaan

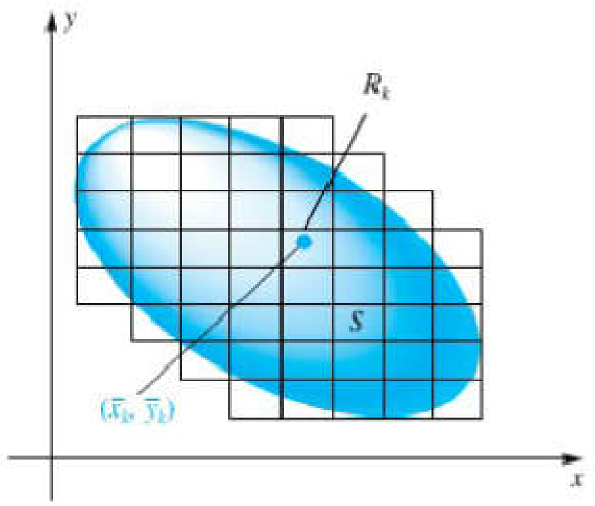
A. PENERAPAN INTEGRAL LIPAT DUA

Penerapan yang paling jelas dari integral lipat dua adalan perhitungan volume benda padat. Penggunaan integral lipat dua ini sudah banyak diilustrasikan, jadi sekarang kita beralih pada penerapan-penerapan lainnya (massa, pusat massa dan jari-jari perputaran).

Tinjaulah sebuah lembaran tipis yang sedemikian tipisnya sehingga kita dapat memandangnya sebagai obyek berdimensi dua. Pada subbab sebelumnya kita menyebut lembaran ini lamina, tetapi pada sebbab itu kita hanya menganggap lamina tersebut memiliki kerapatan yang konstan. Disini, kita akan mempelajari lamina-lamina dengan berbagai kerapatan, yaitu lamina yang terbuat dari material takhomogen.



Gambar 1



Gambar 2

Andaikan sebuah lamina menutupi sebuah daerah S pada bidang xy, dan misalkan kerapatan (massa persatuan luas) di (x,y) disimbolkan dengan d(x,y). Daerah S dipartisi menjadi persegi panjang persegi panjang kecil R_1, R_2, ……R_n seperti ditunjukan pada gambar di bawah ini. Ambillah sebuah titik $\left(\overline{x}_k, \overline{y}_k\right)$ pada R_k. Maka massa R_k secara hampiran adalah $\delta\left(\overline{x}_k, \overline{y}_k\right) A\left(R_k\right)$ dan massa total lamina tersebut secara hampiran adalah

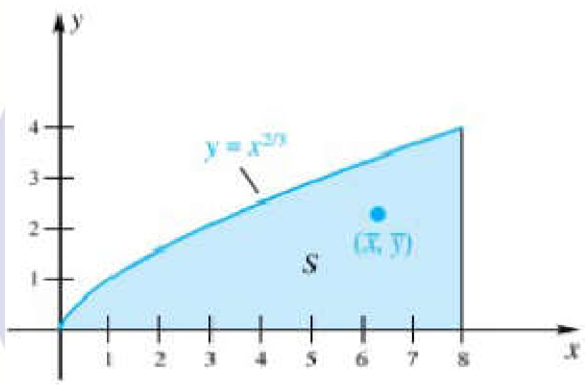
$$m = \sum_{k=1}^{n} \delta\left(\overline{x}_k, \overline{y}_k\right) A\left(R_k\right)$$

Massa sebenarnya, m diperoleh dengan mengambil limit rumus di atas sebagai norma partisi mendekati nol, yang tentu saja merupakan sebuah integral lipat dua

$$m = \iint_S \delta\left(\overline{x}_k, \overline{y}_k\right) dA$$

Contoh 1

Sebuah lamina dengan kerapatan $\delta(x, y)$ dibatasi oleh sumbu x, garis x = 8 dan kurva y = $x^{2/3}$ Tentukan massa totalnya



Gambar 3

$$m = \iint_S xy\,dA = \int_0^8 \int_0^{x^{2/3}} xy\,dy\,dx$$

$$= \int_0^8 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_0^{x^{2/3}} dx = \frac{1}{2}\int_0^8 x^{7/3} dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{10}x^{10/3}\right]_0^8 = \frac{768}{5} = 153,6$$

Pusat Massa

Anda disarankan untuk meninjau kembali konsep mengenai pusat massa pada subbab sebelumnya. Pada subbab tersebut kita telah mempelajari bahwa jika $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots$ berturut-turut adalah kumpulan titik-titik massa yang masing-masing terletak di $(x_1,y_1),\ldots.(x_n,y_n)$ maka momen total terhadap sumbu y dan sumbu x dapat dinyatakan dengan

$$M_y = \sum_{k=1}^{n} x_k m_k$$

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} y_k m_k$$

Lebih lanjut, koordinat $(\bar{x},\bar{y})$ dari pusat massa (titik keseimbangan) adalah

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k m_k}{m}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k m_k}{m}$$

Sekarang perhatikan sebuah lamina dengan kerapatan berupa peubah $\delta(x,y)$ yang melingkupi daerah S pada bidang xy, seperti pada gambar 1. Buatlah partisi seperti pada gambar 2 dan asumsikan sebagai sebuah hampiran bahwa suatu massa dari setiap R_k terpusat di $(\bar{x}_k,\bar{y}_k)$ k= 1, 2, …, n. Akhirnya gunakan limitnya sebagai aturan pembagian partisi yang mendekati nol. Cara ini akan menghasilkan suatu rumus

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint_S x\delta(x,y)\,dA}{\iint_S \delta(x,y)\,dA}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_S y\delta(x,y)\,dA}{\iint_S \delta(x,y)\,dA}$$

Contoh 2
Tentuka pusat massa dari lamina pada contoh 1

Solusi
Pada contoh 1 kita telah melihat bahwa massa m dari lamina ini adalah momen M, dan momen M yang mengacu pada sumbu y dan sumbu x adalah

$$M_y = \iint_S x\delta(x,y)\,dA = \int_0^8 \int_0^{x^{2/3}} x^2 y\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^8 x^{10/3}dx = \frac{12288}{13} = 945,23$$

$$M_x = \iint_S y\delta(x,y)\,dA = \int_0^8 \int_0^{x^{2/3}} xy^2\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^8 x^3 dx = \frac{1024}{3} = 341,33$$

kita dapat menyimpulkan bahwa

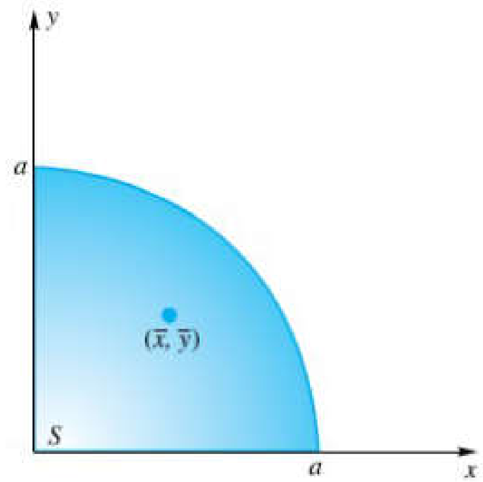
$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = 6\frac{2}{13} = 6,15$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = 2\frac{2}{9} = 2,22$$

perhatikan bahwa $(\bar{x},\bar{y})$ adalah bagian kanan atas dari S tetapi hal ini memang sesuai harapan kita karena sebuah lamina dengan kerapatan $\delta(x,y) = xy$ akan semakin berat ketika jarak dari sumbu x dan sumbu y bertambah besar

Contoh 3

Tentukan pusat massa dari lamina yang berbentuk seperempat lingkaran dengan jari-jari a yang mempunyai kerapatan sebanding dengan jarak dari pusat lingkaran (gambar 4)



Gambar 4

Solusi

Berdasarkan hipotesis $\delta(x,y)=k\sqrt{x^2+y^2}$

di mana k adalah sebuah konstanta. Bentuk S tersebut menyarankan kita untuk menggunakan koordinat kutub.

$$m=\iint_S k\sqrt{x^2+y^2}\,dA=k\int_0^{\pi/2}\int_0^a rrdrd\theta$$

$$=k\int_0^{\pi/2}\frac{a^3}{3}d\theta=\frac{k\pi a^3}{6}$$

Demikian pula,

$$M_y=\iint_S xk\sqrt{x^2+y^2}\,dA=k\int_0^{\pi/2}\int_0^a (r\cos\theta)r^2drd\theta$$

$$=k\int_0^{\pi/2}\frac{a^4}{4}\cos\theta d\theta=\left[\frac{ka^4}{4}\sin\theta\right]_0^{\pi/2}=\frac{ka^4}{4}$$

Kita dapat menyimpulkan bahwa

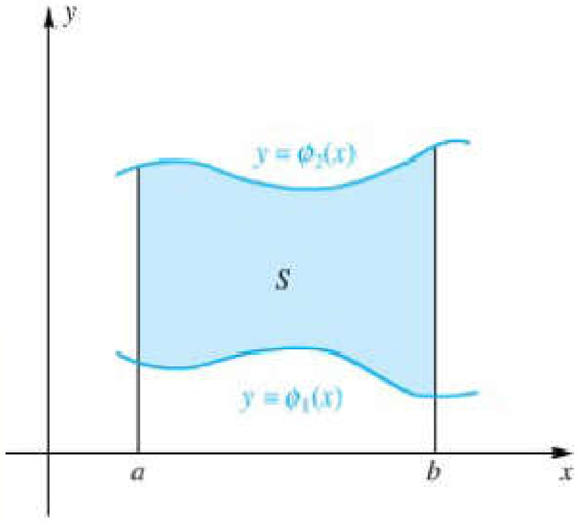
$$\bar{x}=\frac{M_y}{m}=\frac{ka^4/4}{k\pi a^3/6}=\frac{3a}{2\pi}$$

karena sifat simetri dari lamina ini, kita mengenali bahwa ….
sehingga tidak diperlukan perhitungan lebih lanjut

sampai disini seorang pembaca yang kritis tentu akan mengajukan pertanyaan mengenai hal ini. Bagaimana jika lamina homogen, yaitu bagaimana jika $\delta(x,y)=k$ adalah sebuah konstanta ? Apakah rumus-rumus yang diturunkan pada subbab ini yang melibatkan integral lipat dua sesuai dengan rumus-rumus pada subbab yang hanya menggunakan integral tunggal ? Jawabannya adalah ya. Untuk memberikan pembenaran sebagian, marilah kita menghitung My untuk sebuah daerah sederhana y S

$$M_y=\iint xkdA=K\int_a^b\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} xdydx=k\int_a^b x\left[\phi_2(x)-\phi_1(x)\right]dx$$

integral tunggal di ruas paling kanan adalah integral yang telah diberikan pada subbab sebelumnya



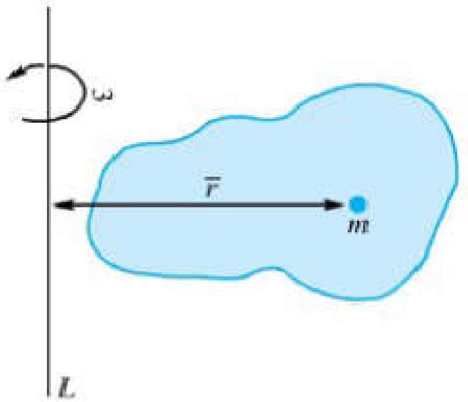
Momen inersia
Dari pelajaran fisika kita mempelajari bahwa energi kinetik dari sebuah partikel dengan massa mdan kecepatan v yang bergrak dalam sebuah garis lurus dirumuskan dengan

$$KE = \frac{1}{2} m v^2$$

Jika suatu partikel tidak bergerak dalam garis lurus tetapi berputar dalam sebuah sumbu dengan kecepatan sudut sebesar w radian per satuan waktu, makakecepatan liniernya adalah v = wr siaman r adalah jari-jari darilintasan perputarannya. Ketika kita mensubtitusikan ini kedalam persamaan tersebut, maka kita akan memperoleh

$$KE = \frac{1}{2}\left(r^2 m\right)\omega^2$$

$$KE = \frac{1}{2} I \omega^2$$



SOAL LATIHAN A

Tentukan massa dan Pusat massa dari lamina yang dibatasi oleh persamaan berikut

1. $x = 0, x = 4, y = 0, y = 3; \delta(x, y) = y + 1$
2. $y = 0, y = \sqrt{4 - x^2}; \delta(x, y) = y$
3. $y = 0, y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi; \delta(x, y) = y$
4. $y = 1/x, y = x, y = 0, x = 2; \delta(x, y) = x$
5. $y = e^{-x}, y = 0, x = 0, x = 1; \delta(x, y) = y^2$
6. $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 1; \delta(x, y) = 2 - x + y$
7. $r = 2 \sin \theta; \delta(r, \theta) = r$
8. $r = 1 + \cos \theta; \delta(r, \theta) = r$
9. $r = 1, r = 2, \theta = 0, \theta = \pi, (0 \leq \theta \leq \pi); \delta(r, \theta) = 1/r$
10. $r = 2 + 2 \cos \theta; \delta(r, \theta) = r$

B. LUAS PERMUKAAN

Kita telah melihat beberapa kasus sebelumnya terkait tentang luas permukaan. Pada subbab ini kita akan mengembangkan sebuah rumus untuk luas sebuah permukaan yang didefinisikan dengan z = f(x,y) atas sebuah daerah spesifik.

Andaikan G adalah permukaan atas sebuah daerah S yang tertutup dan terbatyas pada bidang xy. Asumsikan bahwa f mempunyai turunan-turunan parsial pertama kontinu f_x dan f_y. Kita akan mulai dengan membuat partisi P pada daerah S dengan garis-garis sejajar dengan sumbu x dan sumbu y seperti pada gambar di bawah ini

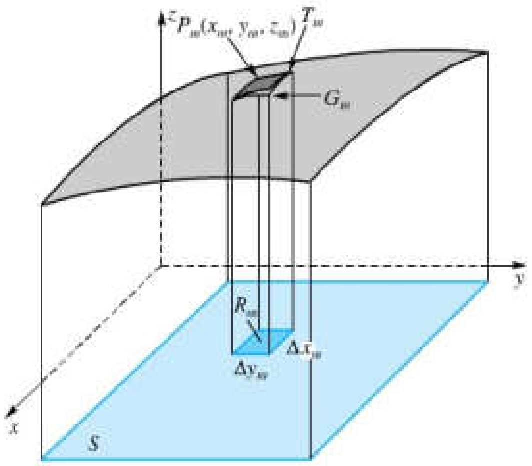


Figure 1

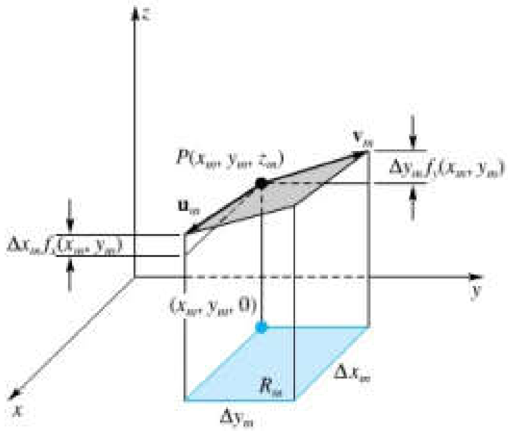


Figure 2

Misalkan R_m, m = 1,2,3,.....,n menyatakan persegi panjang-persegi panjang yang dihasilkan dan terletal sepenuhnya di dalam S. Untuk setiap m, misalkan G_m adalah bagian permukaan yang diproyeksikan ke R_m dan misalnya P_m adalah suatu titik dari G_m yang diproyeksikan ke R_m dan misalkan P_m adalah suatu titik dari G_m yang diproyeksikan ke sudut Rm dengan koordinat x dan koordinat y yang terkecil. Akhirnya misalkan T_m menyetakan suatu jajaran genjang dari bidang singgung di Pm yang diproyeksikan ke R_m, seperti pada gambar di bawah ini dan perincian selanjutnya ditunjukan pada gambar 2.

Selanjutnya kita mencari luas jajaran genjang T_m yang proyeksinya adalah R_m. Misalkan u_m dan v_m menyatakan vektor-vektor yang membentuk sisi-sisi T_m. maka,

$$u_m = \Delta x_m i + f_x(x_m, y_m)\Delta x_m k$$

$$v_m = \Delta y_m i + f_y(x_m, y_m)\Delta y_m k$$

dari subbab sebelumnya kita mengetahui bahwa luas jajaran genjang T_m adalah $|u_m \times v_m|$ dimana

$$u_m \times v_m = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \Delta x_m & 0 & f_x(x_m, y_m)\Delta x_m \\ 0 & \Delta y_m & f_y(x_m, y_m)\Delta y_m \end{vmatrix}$$

$$= (0 - f_x(x_m, y_m)\Delta x_m \Delta y_m)i - (f_y(x_m, y_m)\Delta x_m \Delta y_m - 0)j$$
$$+(\Delta x_m \Delta y_m - 0)k$$
$$= \Delta x_m \Delta y_m \left[-f_x(x_m, y_m)i - f_y(x_m, y_m)j + k \right]$$
$$= A\left(R_m\right)\left[-f_x(x_m, y_m)i - f_y(x_m, y_m)j + k \right]$$

dengan demikian luas T_m adalah

$$A(T_m) = |u_m \times v_m| = A(R_m)\sqrt{[f_x(x_m, y_m)]^2 + \left[f_y(x_m, y_m)\right]^2 + 1}$$

kemudian kita menjumlahkan luas dari bidang-bidang singgung jajaran genjang Tm ini, m = 1,2,3, ..., n dan ambilah limitnya agar kita sampai pada luas permukaan G

$$A(G) = \lim_{|P| \to 0} \sum_{m=1}^{n} A\left(T_m\right)$$
$$= \lim_{|P| \to 0} \sum_{m=1}^{n} \sqrt{[f_x(x_m, y_m)]^2 + \left[f_y(x_m, y_m)\right]^2 + 1}A\left(R_m\right)$$
$$= \iint_S \sqrt{[f_x(x_m, y_m)]^2 + \left[f_y(x_m, y_m)\right]^2 + 1}dA$$

atau singkatnya

$$A\left(G\right) = \iint_S \sqrt{f_x^{\ 2} + f_y^{\ 2} + 1}dA$$

Gambar 1 dibuat seolah-olah daerah S pada bidang xy adalah sebuah persegi panjang, tetapi prakteknya tidak selalu demikian. gambar 3 memperlihatkan apa yang terjadi ketika S bukan merupakan sebuah persegi panjang.

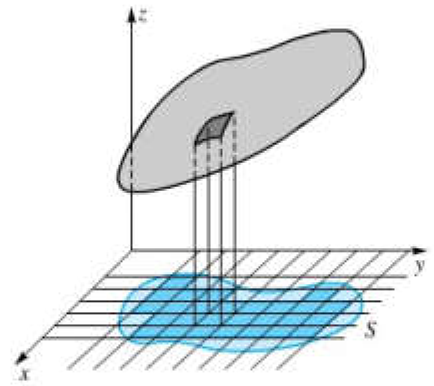


Figure 3

Contoh 1

Jika S adalah daerah persegi panjnag pada bidang xy yang dibatasi oleh garis x = 0, x = 1, y = 0, y = 2, tentukan luas dari bagian permukaan silindris $z = (4-x^2)^{1/2}$ yang diproyeksikan ke S

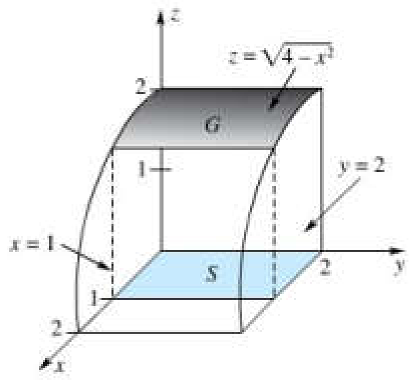


Figure 4

Solusi

misalkan $f(x,y) = \sqrt{4-x^2}$ maka $f_x = -x/\sqrt{4-x^2}, f_y = 0$ dan

$$A(G) = \iint_S \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\,dA = \iint_S \sqrt{\frac{x^2}{4-x^2} + 1}\,dA = \iint_S \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\,dy = 4\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = 4\left[\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}$$

Contoh 2

Tentukan luas permukaan z = x^2 + y^2 di bawah bidang z = 9

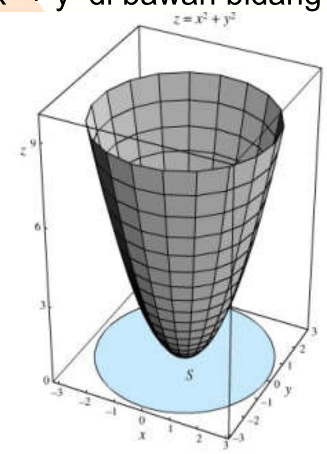


Figure 5

Solusi

Bagian G yang dilansir dari permukaan tersebut diproyeksikan ke daerah melingkar S di dalam lingkaran x^2 + y^2 = 9 seperti ditunjukan pada gambar 5. Misalkan f (x,y) = x_2 + y_2, maka f_x = 2x dan f_y = 2y dan

$$A(G) = \iint_S \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\,dA$$

Bentuk S menyarankan kita untuk menggunakan koordinat kutub

$$A(G)=\int_0^{2\pi}\int_0^{3}\sqrt{4r^2+1}\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}\left(4r^2+1\right)^{3/2}\right]_0^3 d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{12}\left(37^{3/2}-1\right)d\theta=\frac{\pi}{6}\left(37^{3/2}-1\right)=117,32$$

sebuah silinder tegak melingkar dan sebuah setengah bola mempunyai sifat yang luar biasa di mana permukaan-permukaan di antara dua bidang sejajar mempunyai luas yang sama. Contoh berikut memperlihatkan sifat ini untuk setengah bola, yang menunjukan bahwa kedua permukaan pada gambar 6 mempunyai luas yang sama. Langkah-langkah dalam contoh ini dengan mudah dapat diikuti untuk menunjukan bahwa sifat tersebut berlaku untuk sebuah lingkaran.

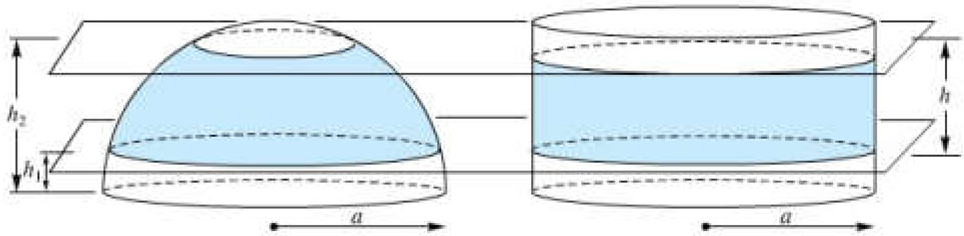


Figure 6

Contoh 3

Tunjukkan bahwa luas permukaan G yang dipotong dari setengah bola $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ oleh suatu bidang $z = h_1$ dan $z = h_2$ ($0 \leq h_1 \leq h_2 \leq a$) adalah

$$A(G)=2\pi a(h_2-h_1)$$

Tunjukan bahwa rumus di atas juga merupakan rumus untuk luas permukaan pada silinder melingkar sebelah kanan $x^2 + y^2 = a^2$ di antara bidang $z = h_1$ dan $z = h$

Solusi

misalkan $h = h_2 - h_1$. Permukaan dari setengah bola didefinisikan dengan

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

dan daerah S di bawahnya pada bidang xy adalah lingkaran $b \leq x^2 + y^2 \leq c$ dimana $b=\sqrt{a^2-h_2^2}$ dan $c=\sqrt{a^2-h_1^2}$ seperti ditunjukan pada gambar 7.Luas permukaan setengah bola di antara kedua bidang horizontal adalah

$$A(G)=\iint_S\sqrt{\left[\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right]^2+\left[\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right]^2+1}\,dA$$

$$=\iint_S\sqrt{\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}+1}\,dA$$

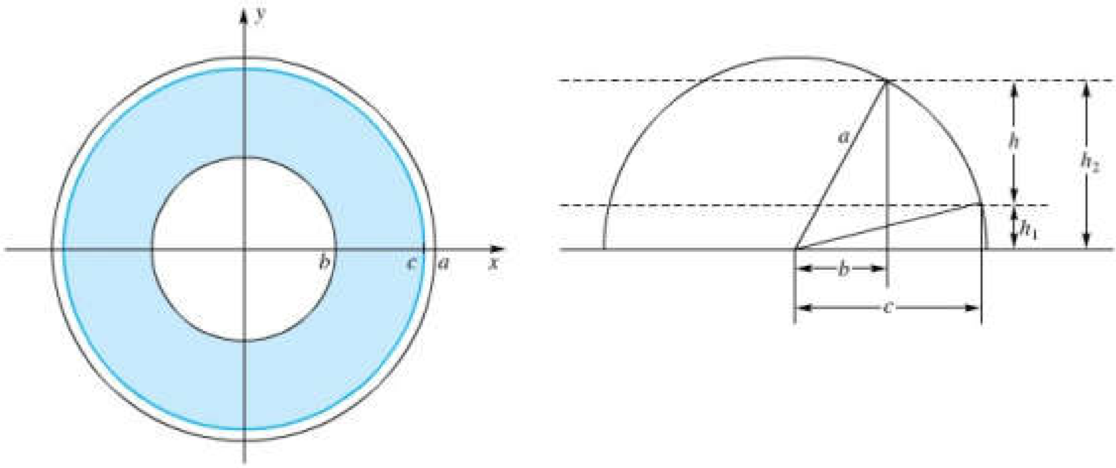
$$=\iint_S\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dA$$

Integral ini paling mudah dikerjakan dengan koordinat kutub

$$A(G)=\int_0^{2\pi}\int_b^c \frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi} a\left[-\sqrt{a^2-c^2}+\sqrt{a^2-b^2}\right]d\theta$$

$$=2\pi a\left[\sqrt{a^2-b^2}-\sqrt{a^2-c^2}\right]=2\pi a\left(h_2-h_1\right)=2\pi ah$$

Karena luas permukaan untuk silinder adalah keliling lingkaran ($2\pi a$) dikalikan dengan tinggi h, maka luas permukaan untuk bagian silinder tersebut di antara dua bidang adalah $2\pi a$ h, yang tentu saja sesuai dengan luas permukaan untuk setengah bola.



SOAL LATIHAN B

Tentukan luas permukaan dan buatlah sketsanya untuk setiap soal

1. The part of the plane $3x + 4y + 6z = 12$ that is above the rectangle in the xy-plane with vertices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, and $(0, 1)$

2. The part of the plane $3x - 2y + 6z = 12$ that is bounded by the planes $x = 0$, $y = 0$, and $3x + 2y = 12$

3. The part of the surface $z = \sqrt{4 - y^2}$ that is directly above the square in the xy-plane with vertices $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, and $(1, 1)$

4. The part of the surface $z = \sqrt{4 - y^2}$ in the first octant that is directly above the circle $x^2 + y^2 = 4$ in the xy-plane

5. The part of the cylinder $x^2 + z^2 = 9$ that is directly over the rectangle in the xy-plane with vertices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 3)$, and $(0, 3)$

DAFTAR PUSTAKA

- **Varberg, Purcell, Rigdon, ,KALKULUS, edisi kesembilan , Erlangga, Jakarta, 2011**
- **Murray R.Spieqel,CALCULUS LANJUT, edisi kedua, Erlangga, Jakarta, 2008.**