MODUL MATEMATIKA 2

(IND 124)

MODUL SESI 9

OPERASI PADA DERET

DISUSUN OLEH

SEPTIAN RAHMAT ADNAN, S.Si.,M.Si

UNIVERSITAS ESA UNGGUL

2020

Pokok Bahasan : OPERASI PADA DERET

Sub Pokok Bahasan :

- Operasi Pada deret pangkat
- Deret Taylor dan Deret Maclaurin

Tujuan Instruksional Umum :

Agar mahasiswa dapat memahami dan menyelesaikan soal dan aplikasi yang berkaitan dengan operasi pada deret

Tujuan Instruksional Khusus :

Agar mahasiswa mampu menjelaskan dan dapat menyelesaikan masalah yang terkait dengan :

- Operasi Pada deret pangkat
- Deret Taylor dan Deret Maclaurin

A. OPERASI PADA DERET PANGKAT

kita mengetahui dari subbab sebelumnya bahwa himpunan konvergensi dari deret pangkat

$$\sum a_n x^n$$

adalah selang I. Selang ini adalah daerah asal untuk fungsi baru S(X) yaitu jumlah dari deret tersebut. Pertanyaan yang sering muncul berkenaan dengan S(x) adalah apakah kita dapat menentukan sebuah rumus yang sederhana untuk deret tersebut. Kita telah melakukan hal ini untuk sebuah deret, yaitu deret geometric :

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = \frac{a}{1-x}, -1 < x < 1$$

Pada dasarnya kita mempunyai alasan untuk berharap bahwa jumlah dari deret pangkat sembarang akan merupakan salah satu dari fungsi dasar yang telah di bahas sebelumnya pada buku ini, walaupun kita akan mengembangkan sedikit dalam subbab ini dan menelusurinya lebih jauh.

PENDIREFENSIALAN dan PENGINTEGRALAN Suku demi Suku

Bayangkan sebuah deret pangkat sebagai sebuah polynomial dengan suku-suku takterhingga. Deret tersebut berperilaku seperti sebuah polynomial baikpada pengintegralan maupun pada pendiferensialan yaitu operasi-operasinya dapat dilakukan suku demi suku sebagai berikut :

TEOREMA A

Andaikan S(x) adalah jumlah deret pangkat pada selang I, yaitu :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...$$

Jadi Jika x berada dalam I.

$$(i).S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_x\left(a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$(ii).\int_0^t S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n-1}$$

$$= a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \frac{1}{4} a_3 x^4 + ...$$

Teorema ini meliputi beberapa hal, antara lain memastikan bahwa S dapat didiferensialkan dan juga dapat diintegralkan, meunjukan bagaimana suatu turunan danintegral dapat dihitung, dan mengimplikasikan bahwajari-jari konvergensi dari eret hasil pendiferensialan dan deret hasil pengintegralan akan sama dengan deret aslinya.

Contoh 1
Terapkan teorema A pada deret geometric

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+.....,\Rightarrow -1<x<1$$

untuk memperoleh rumus-rumus untuk dua deret yang baru.

Solusi
Dengan mendiferensialkan suku demi suku akan diperoleh

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+.....\Rightarrow -1<x<1$$

dengan mengintegralkan suku demi suku akan diperoleh

$$\int_0^t \frac{1}{1-t}dt=\int_0^x 1dt+\int_0^x tdt+\int_0^x t^2dt+.....$$

dalam hal ini,

$$-\ln(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+.....\Rightarrow -1<x<1$$

jika kita menggantikan x dengan –x pada deret terakhir di atas dan mengalikan kedua ruas dengan -1 maka akan diperoleh

$$\ln(1+x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}.....\Rightarrow -1<x<1$$

Contoh 2
Tentukan representasi deret pangkat untuk

$$\tan^{-1}x$$

Solusi
ingat kembali bahwa

$$\tan^{-1}x=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$$

dari deret geometric untuk 1/(1-x) dimana x digantikan dengan $-t^2$ kita memperoleh

$$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-t^6+.....\Rightarrow -1<t<1$$

Jadi,

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \left(1 - t^2 + t^4 - t^6 + ...\right) dt$$

dalam hal ini

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... \Rightarrow -1 < x < 1$$

Contoh 3

Tentukan rumus untuk jumlah dari deret berikut

$$S(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

Solusi

Kita telah melihat sebenarnya pada contoh 3 bahwa deret ini konvergen untuk semua nilai x. Dengan mendiferensialkanya suku demi suku kita akan memperoleh

$$S'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

dalam hal ini

$$S'(x) = S(x)$$

untuk semua x. disamping itu S(0) = 1. Persamaan diferensial ini mempunyai solusi untuk S(x) = e^x, Jadi :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

Contoh 4

Tentukan representasikan deret pangkat untuk

$$e^{-x^2}$$

Solusi

Kita cukup mensubtitusikan $-x^2$ ke x di dalam deret x^2 tersebut.

$$e^x$$

Operasi Aljabar
Deret pangkat konvergen dapat dijumlahkan dan dikurangkan suku demi suku. Di dalam hal ini, deret tersebut bersifat seperti polynomial. Deret pangkat konvergen juga dapat dikali dan dibagi dengan cara seperti pada perkalian dan pembagian “panjang” dari polynomial-polinomial.

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + ...$$

Contoh 5
Kalikan danbagilah deret pangkat untuk ln (1 + x) dengan deret pangkat untuk e^x

Solusi
Kita mengacu pada contoh 1 dan 3untuk deret yang dikehendaki tersebut. kunci dari perkalian ini adalah pertama-tama menentukan suku konstanta, kemuadian suku x, suku x^2 dan seterusnya. Kita menyusun ulang pekerjaan ini sebagai berikut :

$$0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$

$$0 + (0+1)x + (0+1-\frac{1}{2})x^2 + (0+\frac{1}{2!}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3})x^3$$
$$+\left(0+\frac{1}{3!}-\frac{1}{2!2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)x^4 + ...$$
$$= 0 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 0.x^4 + ...$$

pertanyaan sesungguhnya yang berhubungan dengan contoh 5 adalah apakah kedua deret yang telah kita peroleh masing-masing konvergen menuju $[\ln(1+x)]e^x$ dan $[\ln (1+x)]/e^x$. Teorema berikut ini yang dinyatakan tanpa bukti akan menjawab pertantaan berikut.

TEOREMA B
Misalkan

$$f(x) = \sum a_n x^n$$

dan

$$g(x) = \sum b_n x^n$$

dengan kedua deret ini konvergen palin tidak untuk [x] < r. Jika operasi penjumlahan pengurangan dan perkalian dilakukan pada deret-deret tersebut doalh-olah deret-deret ini adalah polynomial., maka deret yang dihasilkan akan konvergen untuk [x] < r dan masing-masing merepresentasikan

$$f(x) + g(x)$$

dan

$$f(x) - g(x), f(x).g(x)$$

$b_0 \neq 0$ maka hasilnya akan berlaku untuk pembagian, tetapi kita dapat menjamin validitasnya hanya untuk nilai [x] yang relative kecil.

Contoh 6
Tentukan deret pangkat untuk

$$e^{\tan^{-1} x}$$

melalui suku-suku berderajat 4

Solusi
karena

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \ldots..$$

$$e^{\tan^{-1} x} = 1 + \tan^{-1} x + \frac{\left(\tan^{-1} x\right)^2}{2!} + \frac{\left(\tan^{-1} x\right)^3}{3!} + \frac{\left(\tan^{-1} x\right)^4}{4!} + \ldots..$$

kemudian subtitusikan

$$\tan^{-1} x$$

pada deret ini dari contoh 2 dangabungkan suku-suku yang sejenis.

SOAL LATIHAN
TENTUKAN REPRESENTASI DERET PANGKAT UNTUK F(X) DAN TENTUKAN JARI-JARI KONVERGENSINYA

1. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$

2. $f(x) = \dfrac{1}{(1 + x)^2}$ *Hint:* Differentiate Problem 1.

3. $f(x) = \dfrac{1}{(1 - x)^3}$

4. $f(x) = \dfrac{x}{(1 + x)^2}$

5. $f(x) = \dfrac{1}{2 - 3x} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{3}{2}x}$

6. $f(x) = \dfrac{1}{3 + 2x}$

7. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 - x^4}$

8. $f(x) = \dfrac{x^3}{2 - x^3}$

9. $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1 + t)\, dt$

10. $f(x) = \displaystyle\int_0^x \tan^{-1} t\, dt$

B. DERET TAYLOR DAN DERET MACLAURIN

Pertanyaan besar yang masih mengambang adalah : jika diketahui sebuah fungsi f(misalnya sinx atau ln (cos2x)), dapatkah kita merepresentasikanfungsi tersebut sebagai deret pangkat dalam x atau lebih umumny dalam x-a ? lebih tepatnya dapatkah kita menentukan bilangan-bilangan

$$c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots..$$

sedemikian rupa sehingga

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots..$$

pada suatu selang di sekitar a ?

andaikan representasi ini ada. Maka, menurut teorema dalam mendiferensialkan deret

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \ldots..$$

$$f''(x) = 2!c_2 + 3!c_3(x-a) + 4.3c_4(x-a)^2 + \ldots..$$

$$f'''(x) = 3!c_3 + 4!c_4(x-a) + 5.4.3c_5(x-a)^2 + \ldots..$$

dst

ketika kita mensubtitusikan x = a dan menyelesaikan nilai c_n, kita mendapatkan

$$c_0 = f(x)$$

$$c_1 = f'(a)$$

$$c_2 = \frac{f''(a)}{2!}$$

$$c_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$$

dan secara lebih umum lagi

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Agar perhitungan ini berlaku untuk n = 0 kita mendefinisikan

$$f^{(0)}(a)$$

agar membut f (a) dan 0! benar-benar menjadi 1. Jadi koefisien cn diteentukan oleh fungsi f. Halini juga menunjukan bahwa fungsi f tersebut tidak dapat direpresentasikan oleh dua deret pangkat adalam x – a yang berbeda.

TEOREMA A TEOREMA KEUNIKAN

Andaikan f memenuhi

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + ...$$

untuk seluruh x pada selang di sekitar a, maka

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Jadi sebuah fungsi tidak dapat direpresentasikan oleh lebih dari satu deret pangkat x- a. Representasi deret pangkat dari sebuah fungsi dalam x-a disebut deret Taylot. Jika a = 0 maka deret yang bersesuaian disebut dengan deret Maclaurin.

Konvergensi Deret Taylor

Ternyata pertanyaan mengambang masih ersisa. Jika diketahui sebuah fungsi f dapatkah kita merepresentasikannya didalam sebuah deret pangkat dalam x-a. Dua teorema berikut ini memberikan jawabannya

TEOREMA B RUMUS TAYLOR DENGAN SUKU SISA (TAYLOR'S FORMULA WITH REMAINDER)

Misalkan f adalah fungsi dimana turunan ke (n+1) nya f(n+1) (x) ada untuk setiap x pada selang terbuka I yang mengandung a. Jadi untuk setiap x di dalam I

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ...$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

dimana sisanya (atau kesalahannya) Rn(x) dinyatakan dengan rumus

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

dan c adalah titik diantara x dan a

Bukti

Kita akan membuktikan teorema tersebut untuk kasus di mana n = 4 untuk sembarang nilai n akan mengikuti cara yang sama dan akan diberikan dalam soal latihan. Terlebih dahulu didefinisikan fungsi R4(4) di I dengan

$$R_4(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f''(a)}{2!}\left(x-a\right)^2$$

$$-\frac{f'''(a)}{3!}\left(x-a\right)^3 - \frac{f^{(4)}(a)}{4!}\left(x-a\right)^4$$

kemudian anggap x dan a sebagai konstanta dan didefinisikan fungsi baru g di I dengan

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)(x-t)^2}{2!}$$

$$-\frac{f'''(t)(x-t)^3}{3!} - \frac{f^{(4)}(t)(x-t)^4}{4!} - R_4\frac{(x-t)^5}{(x-a)^5}$$

Jelaslah bahwa g(x) = 0 (x dianggap tetap) dan

$$g(a) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}$$

$$-\frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} - \frac{f^{(4)}(a)(x-a)^4}{4!} - R_4\frac{(x-a)^5}{(x-a)^5}$$

$$= R_4\left(x\right) - R\left(x\right) = 0$$

karena a dan adalah titik-titik di I dengan sifat bahwa g(a) = g(x) = 0, maka kita dapat menerapkan Teorema Rata-rata untuk turunan. Dengan demikian terdapat sebuah bilangan real c di antara a dan x sedemikian rupa sehingga g'(c) = 0. Untuk mendapatkan turunan g, kita harus menerapkan anturan perkalian dengan berulang kali.

$$g'(t) = 0 - f'(t) - [f'(t)(-1) + (x-t)f''(t)]$$

$$-\frac{1}{2!}[f''(t)2(x-t)(-1) + (x-t)^2 f'''(t)]$$

$$-\frac{1}{3!}[f'''(t)3(x-t)(-1) + (x-t)^3 f^{(4)}(t)]$$

$$-\frac{1}{4!}[f^{(4)}(t)4(x-t)(-1)+(x-t)^4 f^{(5)}(t)]$$

$$-R_4(x)\frac{5(x-t)^4(-1)}{(x-a)^5}$$

$$=-\frac{1}{4}(x-t)^4 f^{(5)}(t)+5R_5(x)\frac{(x-t)^4}{(x-a)^5}$$

Jadi berdasaarkan teorema nilai rata-rata untuk turunan, terdapat suatu nilai c dan x dan a sedemikian rupa sehingga,

$$0=g'(c)=-\frac{1}{4!}(x-c)^4 f^{(5)}(c)+5R_4(x)\frac{(x-c)^4}{(x-a)^5}$$

ini akan menuntun kita pada

$$\frac{1}{4!}(x-c)^4 f^{(5)}(c)=5R_4(x)\frac{(x-c)^4}{(x-a)^5}$$

$$R_4(x)=\frac{f^{(5)}(c)}{5!}(x-a)^5$$

Teorema ini menjelaskan kepada kita bahwa kesalahan tersebut bisa terjadi ketika kita menghampiri (membuat hampiran untuk) sebuah fungsi dengan suku-suku yang terhingga banyaknya dari deret Taylornya.

Akhirnya sekarang kita sampai pada pertanyaan mengenai apakah suatu fungsi f dapat di representasikan oleh sebuah deret pangkat dalam x – a

TEOREMA C TEOREMA TAYLOR

Misalkan f fungsi yang memiliki turunan-turunan ke berapapun pada suatu selnag (a – r, a + r). Deret Taylor

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+.....$$

merepresentasikan fungsi f pada selang (a – r, a + r) jika dan hanya jika

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$$

di mana R_n (x) adalah suku sisa dalam rumus Taylor

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

dan c adalah titik pada (a – r, a + r).
Contoh 1.

Tentukan deret Maclaurin untuk sin x dan buktikan bahwa deret tersebut merepresentasikan sin x untuk seluruh x

Solusi

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f(0) = 0$$
$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = 0$$
$$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1$$
$$f^{(4)}(x) = \sin x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 1$$

Jadi

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

dan hasil ini berlaku untuk semua x, asalkan kita dapat menunjukan bahwa

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$$

selanjutnya,

$$\left| f^{(n+1)}(x) \right| = \left| \cos x \right|$$

atau

$$\left| f^{(n+1)}(x) \right| = \left| \sin x \right|$$

sehingga

$$\left| R_n(x) \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

tetapi

$$\lim_{n\to\infty} x^n / n! = 0$$

untuk semua x karena $x^n/n!$ adalah suku ke-n dari sebuah deret konvergen. Sebagai konsekuensinya kita melihat bahwa

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

Contoh 2

Tentukan deret maclaurin untuk cos x dan tunjukan bahwa deret tersebut merepresentasikan cos x untuk semua x

Solusi

kita dapat melakukan perhitungan seperti pada contoh 1. Meskipun demikian akan lebih mudah untuk mendapatkan hasil dengan mendiferensialkan deret tersebut seperti contoh sebelumnya. Kita akan memperoleh

$$\cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$$

Contoh 3

Tentukan deret Maclaurin untuk

$$f(x) = \cosh x$$

dengan dua cara yang berbeda, dan tunjukan bahwa deret tersebut merepresentasikan Cosh x untuk semua x

Solusi

Metode I. Metode Langsung

$$f(x) = \cosh x \Rightarrow f(0) = 1$$
$$f'(x) = \sinh x \Rightarrow f'(0) = 0$$
$$f''(x) = \cosh x \Rightarrow f''(0) = 1$$
$$f'''(x) = \sinh x \Rightarrow f'''(0) = 0$$

Jadi

$$\cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$$

asalkan kita dapat menunjukan bahwa

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

untuk semua x

Sekarang misalkan B adalah sembarang bilangan dan andaikan [x] ≤ B, Maka :

$$|\cosh x| = \left|\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right| \le \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} \le \frac{e^B}{2} + \frac{e^B}{2} = e^B$$

dengan alasan yang sama

$$|\sinh x| \le e^B$$

karena $f^{(n+1)}(x)$ bisa cosh x atau sinh x, maka kita dapat menyimpulkan bahwa

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \le \frac{e^B |x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

persamaan terakhir cenderung mendekati nol ketika n → ∞ seperti pada contoh 1.

Metode 2. Kita menggunakan fakta bahwa

$$\cosh x = \left(e^{x} + e^{x}\right)/2$$

dari contoh 3

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + ...$$

hasil yang diperoleh pada metode 1 sesuai dengan metode 2, dengan cara menambahkan kedua deret terakhir ini dan membaginya dengan 2

Contoh 4
Tentuka deret Maclaurin untuk Sinh x dan tunjukkan bahwa deret tersebut merepresentasikan Sinh x atau semua x

Solusi
Kita dapat menyelesaikan kedua pertanyaan tersebut dengan cara memdiferensialkan deret tersebut utnuk cosh x (contoh 3) suku demi suku

$$\sinh x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + ...$$

Deret Binomial
Kita telah mengenal Rumus Binomial untuk bilangan bulat positif p

$$(1+x)^n = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + ... + \binom{p}{p}x^n$$

di mana

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p(p-1)(p-2)......(p-k+1)}{k!}$$

Perhatikan bahwa jika kita mendefinisikan ulang

$$\binom{p}{k}$$

mejadi

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)(p-2)......(p-k+1)}{k!}$$

maka

$$\binom{p}{k}$$

masuk akal untuk sembarang bilangan real p, asalkan k adalah bilangan bulat positif.

TEOREMA D DERET BINOMIAL

Untuk sembarang bilangan real p dan untuk [x] < 1

$$(1+x)^p = 1+\binom{p}{1}x+\binom{p}{2}x^2+\binom{p}{3}x^3.....$$

Pembuktian sebagian
Misalkan f(x) = (1 + x)^n, maka

$$f(x)=(1+x)^p \Rightarrow f(0)=1$$

$$f'(x)=p(1+x)^{p-1} \Rightarrow f'(0)=p$$

$$f''(x)=p(p-1)(1+x)^{p-2} \Rightarrow f''(0)=p(p-1)$$

$$f'''(x)=p(p-1)(p-2)(1+x)^{p-3} \Rightarrow f'''(0)=p(p-1)(p-2)$$

Jadi deret Maclaurin untuk (1+x)^n adalah seperti yang ditunjukan pada teorema tersebut untuk menunjukan bahwa deret tersebut merepresentasikan (1+x)^{n,} kita harus menunjukan bahwa

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$$

Contoh 5
Representasikan

$$(1-x)^{-2}$$

dalam deret Maclaurin untuk -1 < x < 1

Solusi
Berdasarakan Teorema D

$$(1-x)^{-2} = 1+(-2)+\frac{(-2)(-3)}{2!}x^2+\frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}x^3+......$$

$$=1-2x+3x^2-4x^3$$

Jadi

$$(1-x)^{-2} = 1+2x+3x^2+4x^3+.....$$

Secara alamiah hasil ini sesuai dengan hasil yang diperoleh dengan cara yang berbeda pada contoh 1

DERET MACLAURIN YANG PENTING

1. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$ $\qquad -1 < x < 1$

2. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ $\qquad -1 < x \le 1$

3. $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \cdots$ $\qquad -1 \le x \le 1$

4. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$

5. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$

6. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$

7. $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$

8. $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$

9. $(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \binom{p}{4}x^4 + \cdots$ $\qquad -1 < x < 1$

LATIHAN SOAL B
TENTUKAN SUKU-SUKUNYA SAMPAI X^5 DIDALAM DERET MACLAURIN UNTUK F(X)

1. $f(x) = \tan x$
2. $f(x) = \tanh x$
3. $f(x) = e^x \sin x$
4. $f(x) = e^{-x} \cos x$
5. $f(x) = (\cos x)\ln(1+x)$
6. $f(x) = (\sin x)\sqrt{1+x}$

DAFTAR PUSTAKA

- **Varberg, Purcell, Rigdon, ,KALKULUS, edisi kesembilan , Erlangga, Jakarta, 2011**
- **Murray R.Spieqel,CALCULUS LANJUT, edisi kedua, Erlangga, Jakarta, 2008.**