MODUL MATEMATIKA 2

(IND 124)

MODUL SESI 14

INTEGRAL LIPAT TIGA

DISUSUN OLEH

SEPTIAN RAHMAT ADNAN, S.Si.,M.Si

UNIVERSITAS ESA UNGGUL

2020

Pokok Bahasan : INTEGRAL LIPAT TIGA
Sub Pokok Bahasan :

- Integral Lipat tiga koordinat cartesius
- Integral lipat tiga koordinat silinder dan koordinat bola

Tujuan Instruksional Umum :
Agar mahasiswa dapat memahami dan menyelesaikan soal dan aplikasi yang berkaitan dengan Integral Lipat tiga koordinat cartesius dan Integral lipat tiga koordinat silinder dan koordinat bola

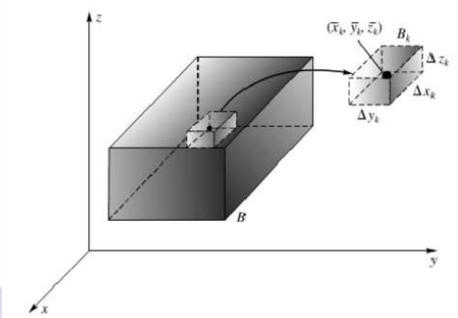
Tujuan Instruksional Khusus :
Agar mahasiswa mampu menjelaskan dan dapat menyelesaikan masalah yang terkait dengan :

- Integral Lipat dua atas daerah bukan persegi panjang
- Integral lipat dua dalam koordinat kutub

A. INTEGRAL LIPAT TIGA KOORDINAT CARTESIUS

Konsep yang diwujudkan dalam integral tunggal dan integral lipat dua dapat diperluas dengan cara yang alamiah menjadi integral lipat tiga atau bahkan integral lipat – n

Tinjaulah sebuah fungsi f tiga peubah yang didefinisikan atas sebuah daerah B yang berbentuk kotak dengan sisi-sisi sejajar bidang koordinat. Kita tidak dapat lagi menggambar grafik f tetapi kita dapat menggambar bangun B (gambar 1). Bentuklah sebuah partisi P dari B dengan melewatkan bidang-bidang melalui B sejajar dengan bidang koordinat, sehingga memotong B menjadi kotak-kotak yang lebih kecil B_1, B_2, ...,B_n sebuah kotak khusus B_k ditunjukan pada gambar 1.



Gambar 1

Pada B_k ambillah sebuah titik contoh

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

dan perhatikan jumlah Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \Delta V_k$$

dimana

$$\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$$

adalah volumen Bk. Misalkan norla partisi [P] adalah panjang diagonal terpanjang dari seluruh kotak bagian. Maka kita dapat mendefinisikan integral lipat tiga dengan

$$\iiint_R f(x, y, z)\,dV = \lim_{P \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \Delta V_k$$

asalkan limit ini ada.

Pertanyaan mengenai jenis fungsi seperti apa yang dapat diintegralkan akan muncul di sini, seperti tang dilakukan pada integral tunggal dan integral lipat dua. Jawabannya adalah bahwa cukup fungsi f yang kontinu di B. Sebenarnya kita dapat membenarkan fungsi-sungsi tak kontinu, misalnya pada sebuah bilangan berhingga dari permukaan mulus. Kita tidak perlu membuktikannya, tetapi kita dapat menegaskan bahwa hal ini benar.

Seperti yang anda harapkan, integral lipat tiga mempunyai sifat-sifat standar yaitu kelinearan, penjumlahan pada himpunan-himpunan yang saling tumpang tindih hanya pada batas permukaan dan perbandingan sifat. Akhirnya, integral lipat tiga dapat ditulis sebagai integral berulang lipat tiga seperti diilustrasikan berikut ini

Contoh 1
Hitunglah

$$\iiint_B x^2 yz\,dV$$

dimana B adalah kotak

$$B = \{(x, y, z) : 1 \le x \le 2, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 2\}$$

Solusi

$$\iiint_B x^2 yz\,dV = \int_0^2 \int_0^1 \int_1^2 x^2 yz\,dx\,dy\,dz$$

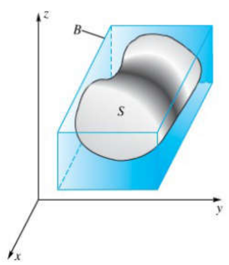
$$= \int_0^2 \int_0^1 \left[\frac{1}{3} x^3 yz \right]_1^2 dy\,dz = \int_0^2 \int_0^1 \frac{7}{3} yz\,dy\,dz$$

$$= \frac{7}{3} \int_0^2 \left[\frac{1}{2} y^2 z \right]_0^1 dz = \frac{7}{3} \int_0^2 \frac{1}{2} z\,dz$$

$$= \frac{7}{6} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^2 = \frac{7}{3}$$

Terdapat enam kemungkinan urutan pengintegralan. Masing-masing akan menghasilkan jawaban 7/3

DAERAH UMUM
Tinjaulah sebuah himpunan S yang tertutup dan terbatas pada ruang berdimensi tiga dan dilingkupi oleh sebuah kotak B seperti ditujukan pada gambar 2.

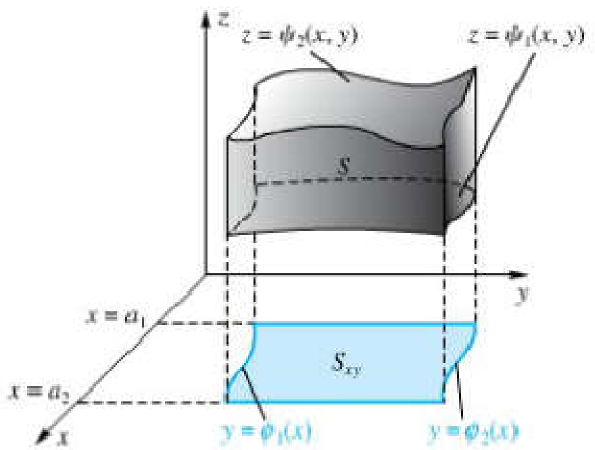


Misalkan f (x,y,z) didefinisikan di S dan f diberi nilai nol di luar S. Maka kita dapat mendefinisikan

$$\iiint\limits_{S} f\left(x,y,z\right)dV = \iiint\limits_{B} f\left(x,y,z\right)dV$$

Integral di ruas kanan telah didefinisikan pada bagian pendahuluan di atas, tetapi tidak berarti bahwa integral ini mudah untuk dihitung. Kenyataanya, jika himpunan S relatif rumit, kita tidak mungkin untuk melakukan perhitungan.

Misalkan S adalah sebuah himpunan sederhana –z dan misalkan Sxy adalah proyeksinya pada bidang xy seperti ditunjukan pada gambar 3.



Maka :

$$\iiint\limits_{S} f(x,y,z)dV = \iint\limits_{S_{xy}} \left[\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dA$$

Jika disamping itu Sxy himpunan sederhana y, maka kita dapat menulis ulang integral lipat dua sebelah luar sebagai sebuah integral berulang.

$$\iiint\limits_{S} f(x,y,z)dV = \int\limits_{a}^{a_2} \int\limits_{\phi_1}^{\phi_2} \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f\left(x,y,z\right)dzdydx$$

Urutan pengintegralan lainnya juga memungkinkan bergantung pada bentuk S tetapi dalam setiap kasus kita seharusnya menjadikan batas-batas pada integral sebelah dalam sebagai fungsi dua peubah, integral tengah sebagai fungsi satu peubah dan integral sebelah luar adalah konstanta.

Kita akan melihat beberapa contoh. Contoh pertama cukup memberikan ilustrasi tentang perhitungan atas integral berulang lipat tiga

Contoh 2
Hitunglah integral berulang berikut

$$\int\limits_{-2}^{5} \int\limits_{0}^{3x} \int\limits_{y}^{x+2} 4dzdydx$$

Solusi

$$\int_{-2}^{5}\int_{0}^{3x}\int_{y}^{x+2} 4dzdydx = \int_{-2}^{5}\int_{0}^{3x}\left(\int_{y}^{x+2} 4dz\right)dydx$$

$$= \int_{-2}^{5}\int_{0}^{3x}[4z]_{y}^{x+2}dydx$$

$$= \int_{-2}^{5}\int_{0}^{3x}(4xy-4y+8)dydx$$

$$= \int_{-2}^{5}\left[4xy-2y^2-8y\right]_{0}^{3x} dx$$

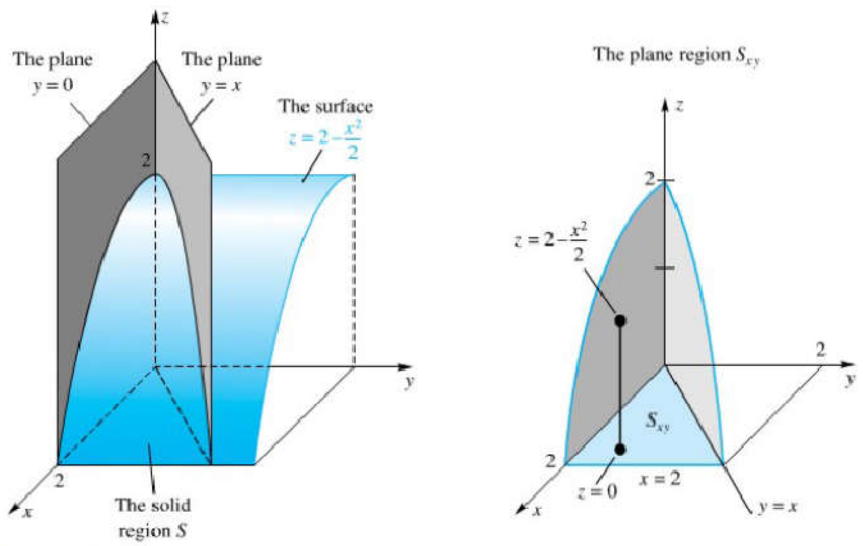
$$= \int_{-2}^{5}\left(-6x^2+24x\right)dx = -14$$

Contoh 3
Hitunglah integral lipat tiga dari f(x,y,z) = 2xyz atas daerah padat S yang dibatasi oleh silinder parabolic $z= 2 - 1/2x^2$ dan bidang z = 0, y = x, y = 0

Solusi
Daerah padat S ditunjukan pada gambar 4 integral lipat tiga

$$\iiint_S 2xyzdV$$

dapat dihitung dengan integral berulang



Pertama-tama perhatikan bahwa S adalah himpunan sederhana –z dan bahwa proyeksi Sxy nya pada bidang xy adalah sederhana –y. Pada pengintegralan pertama, x dan y tetap. Kita mengintegralanya di sepanjang garis vertical dari z = 0 sampai $z = 2 - x^2/2$. Hasilnya kemudian diintegralkan atas himpunan S_{xy}.

$$\iiint_S 2xyz\,dV = \int_0^2 \int_0^x \int_0^{2-x^2/2} 2xyz\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 \int_0^x \left[xyz^2 \right]_0^{2-x^2/2} dy\,dx$$

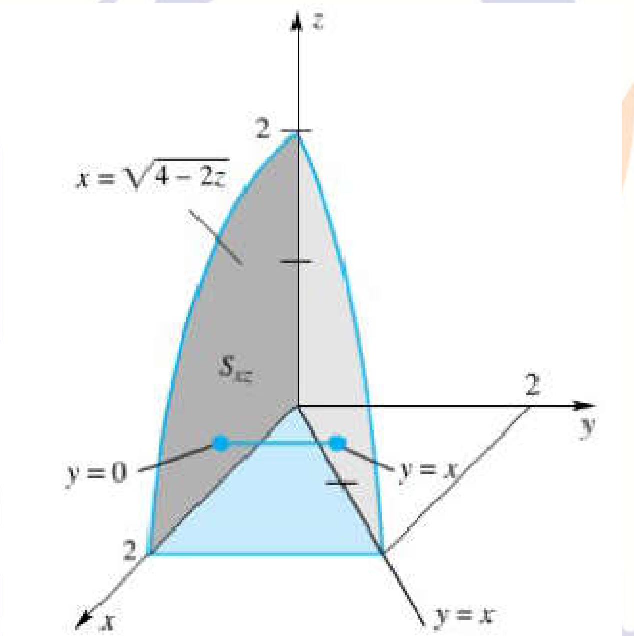
$$= \int_0^2 \int_0^x \left(4xy - 2x^3 y + \frac{1}{4} x^5 y \right) dy\,dx$$

$$= \int_0^2 \left(2x^3 - x^5 + \frac{1}{8} x^7 \right) dx = \frac{4}{3}$$

Masih banyak urutan pengintegralan berbeda yang mungkin untuk contoh 3. Kita ilustrasikan cara lain untuk menyelesaikan soal ini.

Contoh 4

Hitunglah integral pada contoh 3 dengan melakukan pengintegralan dengan dx dy dz



Solusi

Perhatikan bahwa benda padat S adalah sederhana –y dan bahwa daerah tersebut diproyeksikan ke himpunan bidang S_{xy} seperti ditunjukan pada gambar 5. Pertama, kita integralkan di sepanjang sebuah garis horizontal dari y=0 sampai y=x, kemudian kita integralkan hasilnya atas S_{xz}

$$\iiint_S 2xyz\,dV = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-2z}} \int_0^x 2xyz\,dy\,dx\,dz$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-2z}} x^3 z\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 \left(\sqrt{4-2z}\right)^4 z\,dz$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 \left(16z - 16z^2 + 4z^3\right) = \frac{4}{3}$$

Massa dan Pusat Massa

Konsep massa dan pusat massa dapat digeneralisasi dengan mudah ke daerah benda padat. Saat ini, proses yang mengarah pada rumus integral yang benar telah dikenal dengan baik dan dapat diringkas dalam sebuah motto, yaitu iris, hampiri, integralkan. Gambar 6 mengilustrasikan keseluruhan gagasan tentang masalah ini.

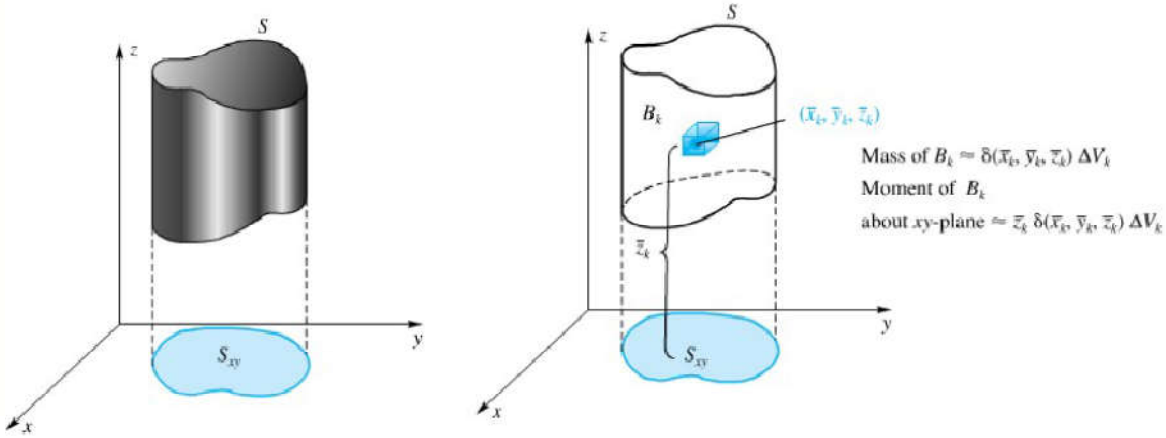
Simbol

$$m = \iiint_S \delta(x, y.z)\,dV$$

$$M_{xy} = \iiint_S z\delta(x, y, z)\,dV$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

melabangkan kerapatan (massa per satuan volume) di x,y,z



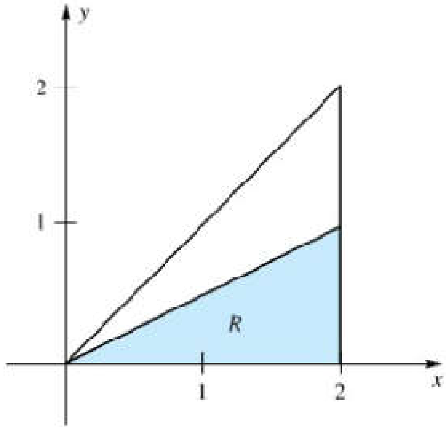
Gambar 6

Rumus-rumus integral yang berhubungan dengan massa m dari benda padat S, momen Mxy dari S terhadap bidang xy dan koordinat z yaitu z dari pusat massa adalah

Terdapat rumus-rumus yang serupa untuk M_{yz}, M_{xz}, $\bar{x}, \bar{y}$

Contoh 5

Tentukan massa dan pusat massa benda padat S pada contoh 3, asumsikan bahwa kerapatanya sebanding dengan jarak dari alas bidang xy – nya



Solusi
Berdasarkan hipotesis

$$\delta(x, y, z) = kz$$

dimana k adalah konstanta. Jadi

$$m = \iiint_S kz dV = \int_0^2 \int_0^x \int_0^{2-x^2/2} kz dz dy dx$$

$$= k \int_0^2 \int_0^x \frac{1}{2}\left(2 - \frac{x^2}{2}\right)^2 dy dx = k \int_0^2 \int_0^x \left(2 - x^2 + \frac{1}{8}x^4\right) dy dx$$

$$= k \int_0^2 \left(2x - x^3 + \frac{1}{8}x^5\right) dx = k\left[x^2 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{48}\right]_0^2 = \frac{4}{3}k$$

$$M_{xy} = \iiint_S kz^2 dV = \int_0^2 \int_0^x \int_0^{2-x^2/2} kz^2 dz dy dx$$

$$= \frac{k}{3} \int_0^2 \int_0^x \left(2 - \frac{x^2}{2}\right) dy dx$$

$$= \frac{k}{3} \int_0^2 \int_0^x \left(8 - 6x^3 + \frac{3}{2}x^5 - \frac{1}{8}x^6\right) dy dx$$

$$= \frac{k}{3} \int_0^2 \left(8x - 6x^3 + \frac{3}{2}x^4 - \frac{1}{8}x^7\right) dx$$

$$= \frac{k}{3}\left[4x^2 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{4}x^6 - \frac{1}{64}x^8\right]_0^2 = \frac{4}{3}k$$

$$M_{xz} = \iiint_S kyz\,dV = \int_0^2 \int_0^x \int_0^{2-x^2/2} kyz\,dz\,dy\,dx$$

$$= k\int_0^2 \int_0^x \frac{1}{2} y\left(2-\frac{x^2}{2}\right)^2 dy\,dx = k\int_0^2 \frac{1}{4} x^2\left(2-\frac{x}{2}\right) dx$$

$$= k\int_0^2 \left(x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{16}x^6\right) dx = \frac{64}{105}k$$

$$M_{yz} = \iiint_S kxz\,dV = \int_0^2 \int_0^x \int_0^{2-x^2/2} kxz\,dz\,dy\,dx = \frac{128}{105}k$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{4k/3}{4k/3} = 1$$

$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{64k/105}{4k/3} = \frac{16}{35}$$

$$\bar{z} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{128k/105}{4k/3} = \frac{32}{35}$$

LATIHAN SOAL A
Hitunglah integral-integral berulang berikut

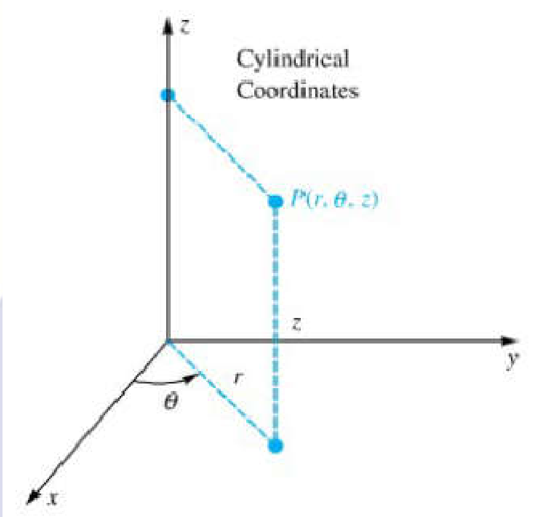
1. $\int_{-3}^{7}\int_{0}^{2x}\int_{y}^{x-1} dz\,dy\,dx$
2. $\int_{0}^{2}\int_{-1}^{4}\int_{0}^{3y+x} dz\,dy\,dx$
3. $\int_{1}^{4}\int_{z-1}^{2z}\int_{0}^{y+2z} dx\,dy\,dz$
4. $\int_{0}^{5}\int_{-2}^{4}\int_{1}^{2} 6xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$
5. $\int_{4}^{24}\int_{0}^{24-x}\int_{0}^{24-x-y} \frac{y+z}{x}\,dz\,dy\,dx$
6. $\int_{0}^{5}\int_{0}^{3}\int_{z^2}^{9} xyz\,dx\,dz\,dy$
7. $\int_{0}^{2}\int_{1}^{z}\int_{0}^{\sqrt{x/z}} 2xyz\,dy\,dx\,dz$
8. $\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{z}\int_{0}^{y} \sin(x+y+z)\,dx\,dy\,dz$
9. $\int_{-2}^{4}\int_{x-1}^{x+1}\int_{0}^{\sqrt{2y/x}} 3xyz\,dz\,dy\,dx$
10. $\int_{0}^{\pi/2}\int_{\sin 2z}^{0}\int_{0}^{2yz} \sin\left(\frac{x}{y}\right) dx\,dy\,dz$

B. INTEGRAL LIPAT TIGA (KOORDINAT SILINDER DAN KOORDINAT BOLA)

Ketika sebuah daerah benda padat S dalam ruang berdimensi tiga mempunyai sebuah sumbu simetri, maka perhitungan integral lipat tiga atas S seringkali dipermudah dengan menggunakan koordinat silinder. Demikian pula, Jika S simetris terhdapat sebuah titik, maka koordinat bola lebih dapat membantu. Koordinat bola telah diperkenalkan pada subbab sebelumnya, suatu topik yang dapat anda baca kembali sebelum kita melanjutkan ke topik berikutnya.

KOORDINAT SILINDER

gambar 1 mengingatkan kita tentang koordinat silinder dan menyajikan simbol-simbol yang akan digunakan.



Gambar 1

Koordinat silinder dan koordinat Cartesius saling dihubungkan oleh persamaan-persamaan

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

sebagai hasilnya, fungsi f (x,y,z) ditransformasikan menjadi

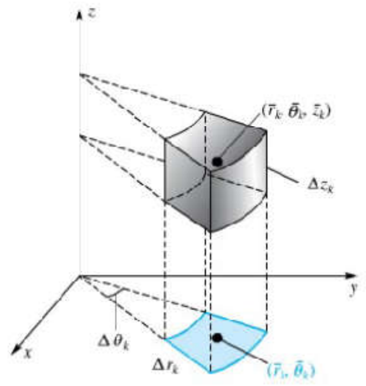
$$f(x,y,z) = f\left(r\cos\theta, r\sin\theta, z\right) = F(r,\theta,z)$$

ketika dituliskan dalam koordinat silinder

Sekarang misalkan kita bermaksud untuk menghitung

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dV$$

dimana S adalah daerah benda padat. Tijaulah pembagian partisi S dengan menggunakan kisi silinder, dimana elemen volume yang khas mempunyai bentuk seperti yang ditunjukan pada gambar 2.



Karena bagian ini mempunyai volume

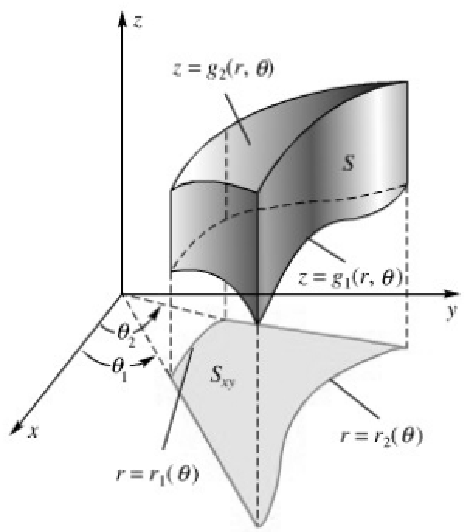
$$\Delta V_k = \overline{r_k} \Delta r_k \Delta \theta_k \Delta z_k$$

maka jumlah yang menghampiri integral akan berbentuk

$$\sum_{k=1}^{n} F(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{z}) \overline{r_k} \Delta z_k \Delta r_k \Delta \theta_k$$

Dengan mengambil limitnya sebagai aturab pembagian partisi yang mendekati nol, akan dihasilkan sebuah integral baru dan menyarankan sebuah rumus penting untuk emngubah koordinat Cartesius menjadi koordinat silinder dalam sebuah integral lipat tiga.

Misalkan S sebuah benda padat sederhana Z dan misalkan bahwa proyeksi Sxy nya pada bidang XY sederhana r seperti ditunjukkan pada gambar 3.



Jika f kontinu pada S

$$\iiint_S f(x, y, z) dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \int_{g_1(r,\theta)}^{g_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r dz dr d\theta$$

Fakta kunci yang dapat dicatat adalah bahwa dz,dy,dx dalam koordinat Cartesius berubah menjadi

$$r, dz, dr, d\theta$$

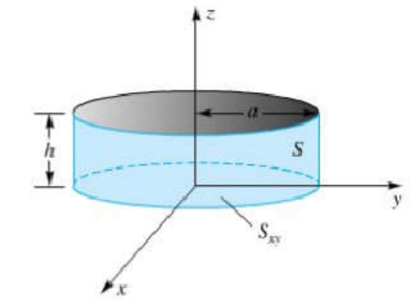
Contoh 1

Tentukan massa dan pusat massa dari silinder padat S, dengan asumsi bahwa kerapatanya sebanding dengan jarak dari alas

Solusi

Dengan S yang diarahkan seperti ditunjukkan pada gambar 4, kita dapat menulis kerapatan fungsi sebagai

$$\delta(x, y, z) = kz$$



gambar 4

dimana k adalah konstanta. Maka

$$m = \iiint_S \delta(x, y, z)dV = k\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^h zrdzdrd\theta$$

$$= k\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{1}{2}h^2 rdrd\theta = \frac{1}{2}kh^2\int_0^{2\pi}\int_0^a rdrd\theta$$

$$= \frac{1}{2}kh^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}a^2 d\theta = \frac{1}{2}kh^2\pi a^2$$

$$M_{xy} = \iiint_S z\delta(x, y, z)dV = k\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^h z^2 rdzdrd\theta$$

$$= k\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{1}{3}h^3 rdrd\theta = \frac{1}{3}kh^3\int_0^{2\pi}\int_0^a rdrd\theta$$

$$= \frac{1}{3}kh^3\pi a^2$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\frac{1}{3}kh^3\pi a^2}{\frac{1}{2}kh^2\pi a^2}\frac{2}{3}h$$

Berdasarkan sifat simetri

$$\bar{x} = \bar{y} = 0$$

Contoh 2

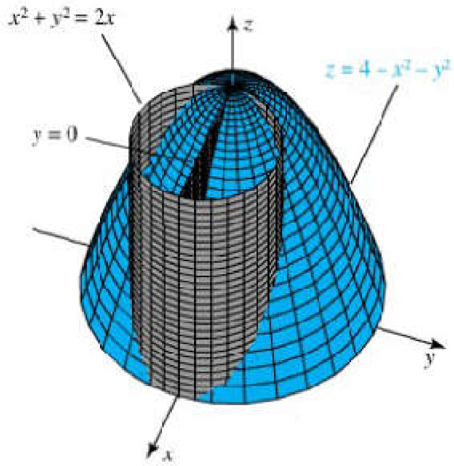
Tentukan volume daerah benda padat S yang dibatasi di bagian atas oleh paraboloid

$$z = 4 - x^2 - y^2$$

dibagian bawah oleh z = 0 dan disamping oleh y = 0 dan silinder

$$x^2 + y^2 = 2x$$

seperti yang ditunjukkan pada gambar 5



Gambar 5

Solusi

Dalam koordinat silinder, paraboloid tersebut adalah

$$z = 4 - r^2$$

dan silinder tersebut adalah

$$r = 2\cos\theta$$

Jadi

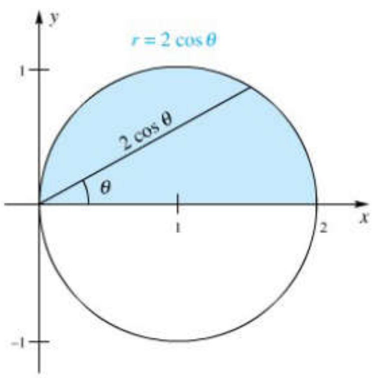
$$V = \iiint_S 1\,dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{4-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r\left(4 - r^2\right)dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\left[2r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(8\cos^2\theta - 4\cos^4\theta\right)d\theta = 8\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - 4.\frac{3}{8}.\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{4}$$

Koordinat Bola

Gambar 6 menyegarkan ingatan kita tentang makna koordinat bola yang telah diperkenalkan pada subbab sebelumnya.



Gambar 6

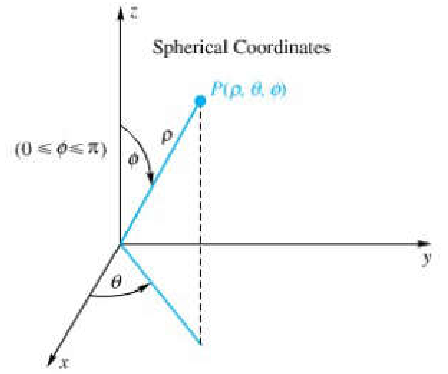
Pada bagian itu kita telah mempelajari bahwa persamaan-persamaan

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta$$

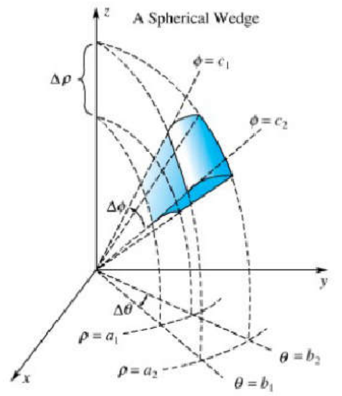
$$y = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \phi$$

menghubungkan koordinat bola dengan koordinat Cartesius. Gambar 7 memperlihatkan elemen volume di dalam koordinat bola.



Gambar 7



Gambar 8

Meskipun kita mengabaikan rinciannya, tetapi dapat dilihat bahwa volume dari baji yang diarsir adalah

$$\Delta V = \bar{\rho}^2 \sin \bar{\phi} \Delta\rho \Delta\theta \Delta\phi$$

dimana

$$\bar{\rho}, \bar{\theta}, \bar{\phi}$$

adalah sebuah titik yang dipilih secara tepat didalam baji

Pembentukan partisi dari sebuah benda padat S dengan menggunakan sebuah ksisi bola, membentuk jumlah yang tepat dan mengambil suatu limit yang akan menghasilkan sebuah integral berulang dimana dx dy dz digantikan oleh

$$\Delta V = \rho^2 \sin \phi \Delta\rho \Delta\theta \Delta\phi$$

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dV = \iiint_S f\left(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi\right) \rho^2 \sin \phi \Delta\rho \Delta\theta \Delta\phi$$

LATIHAN SOAL B

Gunakan Koordinat Silinder Untuk Menentukan Jawaban Pada Setiap Soal

1. $\int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{12} r \, dz \, dr \, d\theta$ **2.** $\int_0^{2\pi} \int_1^3 \int_0^{12} r \, dz \, dr \, d\theta$

3. $\int_0^{\pi/4} \int_0^3 \int_0^{9-r^2} zr \, dz \, dr \, d\theta$ **4.** $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin\theta} \int_0^{2} r \, dz \, dr \, d\theta$

5. $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$

6. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{a} \rho^2 \cos^2\phi \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$

DAFTAR PUSTAKA

- **Varberg, Purcell, Rigdon, ,KALKULUS, edisi kesembilan , Erlangga, Jakarta, 2011**
- **Murray R.Spieqel,CALCULUS LANJUT, edisi kedua, Erlangga, Jakarta, 2008.**