MODUL MATEMATIKA 2

(IND 124)

MODUL SESI 11

INTEGRAL DALAM RUANG BERDIMENSI - n

DISUSUN OLEH

SEPTIAN RAHMAT ADNAN, S.Si.,M.Si

UNIVERSITAS ESA UNGGUL

2020

Pokok Bahasan : INTEGRAL DALAM RUANG BERDIMENSI - n
Sub Pokok Bahasan :

- Integral Lipat dua atas persegi panjang
- Integral berulang

Tujuan Instruksional Umum :
Agar mahasiswa dapat memahami dan menyelesaikan soal dan aplikasi yang berkaitan dengan integral lipat dua atas persegi panjang dan integral berulang

Tujuan Instruksional Khusus :
Agar mahasiswa mampu menjelaskan dan dapat menyelesaikan masalah yang terkait dengan :

- Integral Lipat dua atas persegi panjang
- Integral berulang

Universitas Esa Unggul

A. Integral Lipat Dua Atas Persegi Panjang

Pendiferensialan dan penintegrlana merupakan proses utama dalam kalkulus. Kita telah mempelajari pendiferrnsialan dalam ruang berdimensi n, saat ini kita akan mempelajari pengintegralan sebelah dalam ruang berdimensi n. Hubungan erat antara penintegralan dan pendiferensialan dinyatakan dengan jelas dalam Teorema dasar kalkulus, teorema-teorema ini mengandung prinsi-psinsip teoritis untuk menghitung integral tunggal. Disini kita menyederhanakan pengintegralan berlipat menjadi pengintegralan tunggal berurutan di mana, sekali lagi. Teorema Dasar kalkulus kedua memainkan peranan yang penting. Kemampuan pengintegralan yang telah anda pelajari pada kuliah sebelumnya akan diuji.

Integral Riemann untuk fungsi suatu peubah telah di definisikan pada subbab sebelumnya yang perlu diulangi, ingat kembali bahwa kita membentuk partisi P dari selang [a,b] menjadi subselang dengan panjang

$$\Delta x_k, k = 1, 2, 3, \ldots.., n$$

mengambil sebuah titik contoh $\bar{x}_k$ dari subselang ke-k dan kemudian menuliskan

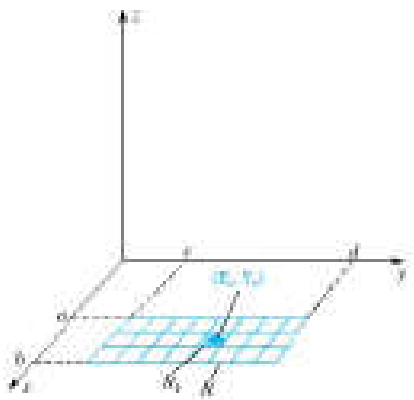
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|p|\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\Delta x_k$$

kita lanjutkan dengan cara yang serupa untuk mendefinisikan integral untuk fungsi dua peubah.

Misalkan R adalah sebuah persegi panjang dengan sisi-sisi sejajar dengan sumbu-sumbu koordinat, yaitu misalkan:

$$R = \{(x, y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

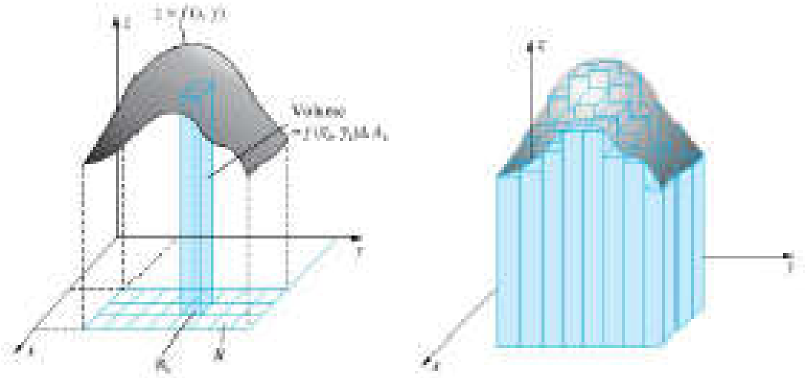
Bentuklah sebuah partisi P dan R dalam pengertian membentuk garis – garis yang sejajar dengan sumbu x dan sumbu y seperti pada gambar di bawah ini.



Pembuatan partisi ini membagi R menjadi persegi panjang-persegi panjang yang lebih kecil sebanyak n dimana kita menotasikannya dengan R_k, k = 1,2,3,…..,n. Misalkan Δx_k dan Δy_k adalah panjang sisi-sisi R, dan misalkan $\Delta A_1 = \Delta x_k \Delta y_k$ adalah luasnya. Pada R_k ambilah sebuah titik contoh (X_k, Y_k)dan bentuk jumlah Riemann:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\Delta A_k$$

yang berhubungan jika f(x,y) ≥ 0 dengan jumlah volume dari n kotak (gambar berikut ini). Dengan membuat partisi tersebut semakin mengecil sedemikian rupa sehingga seluruh R, juga mengecil akan menuntun kita ke konsep yang kita kehendaki



Kita telah siap untuk sebuah definisi formal. Kita menggunakan notasi yang telah diperkenalkan di atas dengan ketentuan tambahan bahwa partisi P, dilambangkan dengan [P] adalah panjang diagonal terpanjang dari sembarang subpersegi panjang di dalam partisi tersebut.

DEFINISI INTEGRAL LIPAT DUA

Misalkan f adalah fungsi dengan dua peubah yang didefinisikan pada sebuah persegi panjang tertutup R. Jika

$$\lim_{|p|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\Delta A_k$$

ada kita katakan bahwa f dapat diintegralkan di R. Disamping itu

$$\iint_R f(x,y)\,dA$$

disebut integral lipat dua dari f atas R yang dapat dinyatakan dengan

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{|p|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\Delta A_k$$

Definisi integral lipat dua ini mengandung limitketika [P] → 0. Ini bukanlah limit seperti yang diuraikan pada bab limit sehingga kita harus memperjelas arti sesungguhnya. Kita mengatakan bahwa

$$\lim_{|p|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\Delta A_k$$

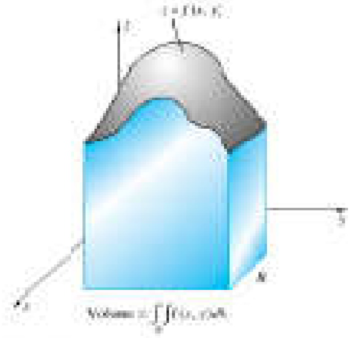
untuk setiap є > 0 terdapat $^{\delta}$ > 0 sedemikian ruoa sehingga setiap partisi P dari persegi panjang R dengan garis-garis sejajar dengan sumbu x dan sumbu y yang memenuhi [P] < $^{\delta}$ dan untuk sembarang pilihan titik contoh $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ didalam persegi panjang ke-k kita akan mempunyai

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\Delta A_k - L \right| < \varepsilon$$

Ingat kembali bahwa jika f(x) ≥ 0 berarti bahwa

$$\int_a^b f(x)dx$$

merepresentasikan luas daerah di bawah kurva y = f(x) di antara a dan b.



Dengan cara yang sama jika f(x,y) ≥ 0 berarti

$$\iint_R f(x,y)dA$$

merepresentasikan volume benda padat di bawah permukaan z = f(x,y) dan di atas persegi panjang R (lihat gambar di bawah ini). Kenyataanya kita menggunakan integral ini sebagai definisi dari volume benda padat yang mempunyai bentuk seperti itu.

TEOREMA A TEOREMA KEINTEGRALAN

Jika f terbatas pada suatu persegi panjang tertutup R dan jika fungsi ini kontinu disitu, kecuali pada sejumlah hingga kurva mulus, maka f dapat diintegralkan pada R. Secara khusus jika f kontinu di seluruh R, maka dapat diintegralkan di sana.

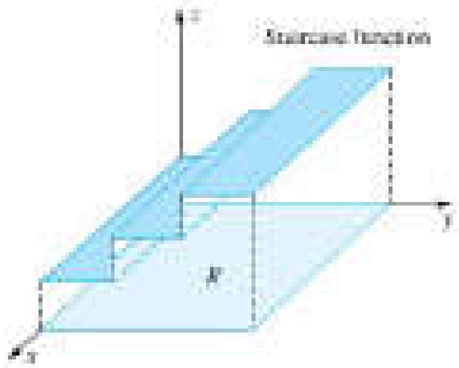
Sebagai konsekuensinya kebanyakan fungsi umumnya dapat diintegralkan pada setiap persegi panjang. Contohnya :

$$f(x,y) = e^{\sin(xy)} - y^3 \cos\left(x^2 y\right)$$

dapat diintegralkan di setiap persegi panjang. Disisi lain

$$g(x,y) = \frac{x^2 y - 2x}{y - x}$$

akan gagal untuk diintegralkan pada sembarang persegi panjnag yang memotong parabola $y = x^2$. Suatu fungsi tangga seperti gambar di bawah ini :



dapat diintegralkan pada R karena diskontinuitas tidak terjadi disepanjang dua ruas garis.

Sifat-sifat Integral Lipat-Dua

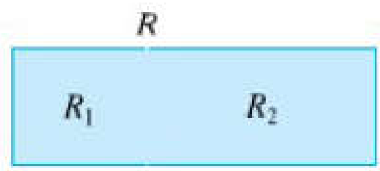
Integral lipat dua mewarisi banyak sifat dari integral tunggal.

1. Integral lipat dua bersifat linier, yaitu:

$$1).\int\int kf(x,y)dA = k\int\int f(x,y)dA$$

$$2).\int\int[f(x,y)+g(x,y)]dA = \int\int f(x,y)dA + \int\int g(x,y)dA$$

2. Integral lipat dua bersifat aditif (penjumlahan) pada persegi panjang (seperti pada gambar)



yang saling tumpang tindih hanya pada sebuah ruas garis

$$\int\int_R f(x,y)dA = \int\int_{R_1} f(x,y)dA + \int\int_{R_2} f(x,y)dA$$

3. Sifat perbandingan berlaku. Jika f(x,y) ≤ g(x,y) untuk seluruh (x,y) di R, maka

$$\int\int_{R_2} f(x,y)dA \le \int\int_{R_2} g(x,y)dA$$

seluruh sifat ini berlaku pada himpunan-himpunan yang lebih umum dibandingkan pada persegi panjag.

PERHITUNGAN PADA INTEGRAL LIPAT DUA

Topik ini akan menjadi perhatian utama pada subbab berikutnya, dimana kita akan mengembangkan suatu alat yang ampuh untuk menghitung integral lipat dua. Meskipun demikian, kita sudah dapat menghitung beberapa integral dan kita dapat menghampiri yang lainnya.

Pertama, perhatikan bahwa jikia f(x,y) = 1 di R maka integral lipat uda merupakan luas dari R dan dari sini akan diperoleh

$$\iint_R k\,dA = k\iint_R dA = kA(R)$$

Contoh 1
Misalkan f adalah fungsi tangga pada gambar di bawah ini, yaitu misalkan

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 1 \\ 2, 0 \le x \le 3, 1 \le y \le 2 \\ 3, 0 \le x \le 3, 2 \le y \le 3 \end{cases}$$

Hitunglah

$$\iint_R f(x,y)\,dA$$

dimana

$$R = \{(x,y) : 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 3\}$$

Solusi
Dari fungsi tersebut dapat dibuat persegi panjang R_1, R_2 dan R_3 sebagai berikut :

$$R_1 = \{(x,y) : 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 1\}$$
$$R_2 = \{(x,y) : 0 \le x \le 3, 1 \le y \le 2\}$$
$$R_3 = \{(x,y) : 0 \le x \le 3, 2 \le y \le 3\}$$

kemudian dengan menggunakan sifat penjumlahan pada integral lipat dua, maka kita meperoleh :

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint_{R_2} f(x,y)\,dA$$
$$+\iint_{R_3} f(x,y)\,dA =$$
$$= 1A(R_1) + 2A(R_2) + 3A(R_3)$$
$$= 1.3 + 2.3 + 3.3 = 18$$

Pada perurunan ini, kita juga menggunakan fakta bahwa nilai f pada batas persegi panjnag mempengaruhi nilai integral.

Contoh 1 adalah sebuah pencapaian sederhana, dan sejujurnya kita tidak dapat berbuat lebih banyak lagi tanpa bantuan alat-alat tambahan. Meskipun demikian, kita selalu dapat menghampiri sebuah integral lipat dua dengan menghitung jumlah Riemann. Secara umum, kita dapat mengharapkan hampiran yang lebih baik dengan menggunakan partisi yang lebih kecil.

Contoh 2
Hampirilah

$$\iint_R f(x,y)\,dA$$

di mana

$$f(x,y)=\frac{64-8x+y^2}{16}$$

dan

$$R=\{(x,y):0\le x\le 4,0\le y\le 8\}$$

Solusi

Titik-titik contoh yang diperlukan dan nilai-nilai yang berhubungan pada fungsi tersebut adalah sebagai berikut

$$(\overline{x}_1,\overline{y}_1)=(1,1)\Rightarrow f(\overline{x}_1,\overline{y}_1)=\frac{57}{16}$$

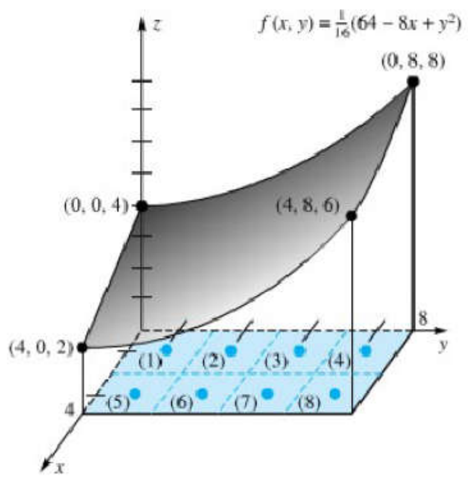
$$(\overline{x}_2,\overline{y}_2)=(1,3)\Rightarrow f(\overline{x}_2,\overline{y}_2)=\frac{65}{16}$$

$$(\overline{x}_3,\overline{y}_3)=(1,5)\Rightarrow f(\overline{x}_3,\overline{y}_3)=\frac{81}{16}$$

$$(\overline{x}_4,\overline{y}_4)=(1,7)\Rightarrow f(\overline{x}_4,\overline{y}_4)=\frac{105}{16}$$

$$(\overline{x}_5,\overline{y}_5)=(3,1)\Rightarrow f(\overline{x}_5,\overline{y}_5)=\frac{105}{16}$$

$$(\overline{x}_6,\overline{y}_6)=(3,3)\Rightarrow f(\overline{x}_6,\overline{y}_6)=\frac{49}{16}$$



Jadi, karena

$$\Delta A_k = 4$$

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \sum_{k=1}^{8} (\overline{x}_k, \overline{y}_k)\Delta A_k$$

$$= 4\sum_{k=1}^{8} f(\overline{x}_k, \overline{y}_k)$$

$$= \frac{4(57+65+81+105+41+49+65+89)}{16} = 138$$

LATIHAN SOAL A
TENTUKAN SOLUSI SOAL-SOAL DI BAWAH INI :

1. $f(x,y) = \begin{cases} 2 & 1 \le x < 3, 0 \le y \le 2 \\ 3 & 3 \le x \le 4, 0 \le y \le 2 \end{cases}$

2. $f(x,y) = \begin{cases} -1 & 1 \le x \le 4, 0 \le y < 1 \\ 2 & 1 \le x \le 4, 1 \le y \le 2 \end{cases}$

3. $f(x,y) = \begin{cases} 2 & 1 \le x < 3, 0 \le y < 1 \\ 1 & 1 \le x < 3, 1 \le y \le 2 \\ 3 & 3 \le x \le 4, 0 \le y \le 2 \end{cases}$

4. $f(x,y) = \begin{cases} 2 & 1 \le x \le 4, 0 \le y < 1 \\ 3 & 1 \le x < 3, 1 \le y \le 2 \\ 1 & 3 \le x \le 4, 1 \le y \le 2 \end{cases}$

Universitas
Esa Unggul

B. INTEGRAL BERULANG

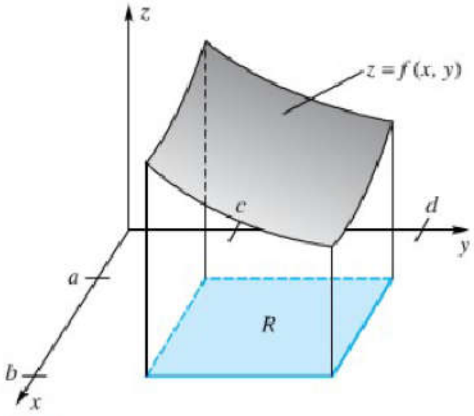
Sekarang kita akan menghadapi persoalan yang sesungguhnya dalam menghitung

$$\iint_R f(x,y)\,dA$$

dimana R adalah persegi panjang

$$R\left\{(x,y); a \le x \le b, c \le y \le d\right\}$$

untuk sementara waktu, andaikan f(x,y) ≥ 0 pada R sehingga kita dapat menginterpretasikan integral lipat dua sebagai Volume V dari benda padat di bawah permukaan pada gambar ini :



$$V = \iint_R f(x, y)\,dA$$

Terdapat cara lain untuk menghitung volume benda padat, setidaknya terlihat benar secara intuisi. Iirslah benda padat tersebut menjadi lempengan-lempengan tipis yang sejajar dengan bidang xz. Kepingan khusus seperti ini ditunjukan pada gambar berikut. Luas muka lempengan ini bergantung pada seberapa jauh lempengan tersebut dari bidang xz, yaitu bergantung pada y. Oleh karena itu kita menyatakan luas ini denganA(y)

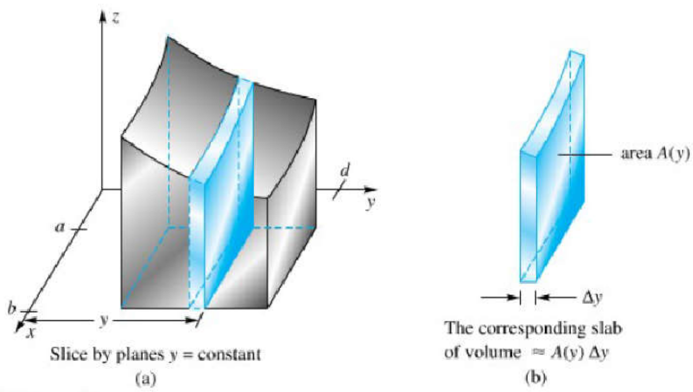
$$\Delta V = A(y)\Delta y$$

dan dengan menggunakan motto lama (iris, hampiri, integralkan), maka kita dapat menuliskan

$$V = \int_c^d A(y)\,dy$$

disisi lain untuk y yang tetap kita dapat menghitung A(y) dengan menggunakan integral tunggal biasa pada kenyataanya

$$A(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$$



Slice by planes y = constant
(a)

The corresponding slab of volume ≈ A(y) Δy
(b)

Jadi kita mempunyai benda padat di mana luas penampang melintangnya adalah A(y). Persoalan untuk menentukan volume suatu daerah di mana penampang melintangnya diketahui, telah dibahas pada subbab sebelumnya. Kita dapat menyimpulkan bahwa :

$$V=\int_c^d A(y)dy=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy$$

Persamaan yang terakhir ini disebut integral berulang (iterated integral)

Ketika kita menyusun persamaan untuk V dengan menggabungkan (1) dan (2), maka kita akan memperoleh hasil yang kita kehendaki.

$$\iint_R f(x,y)dA=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy$$

Apabila kita memulai proses di atas dengan mengiris benda padat tersebut dengan menggunakan bidang-bidang yang sejajar dengan bidang yz, maka kita akan memperoleh sebuah integral berulang lainnya, dengan pengintegralan yang terjadi dalam urutan yang berlawanan

$$\iint_R f(x,y)dA=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx$$

Menghitung Integral Berulang
Mari kita mulai dengan sebuah contoh sederhana

Contoh 1
Hitunglah

$$\int_0^3\left[\int_1^2 (2x+3y)dx\right]dy$$

Solusi
Pada integral sebelam dalam, y berupa konstanta, sehingga

$$\int_1^2 (2x+3y)dx=\left[x^2+3yx\right]_1^2=4+6y-(1+3y)=3+3y$$

konsekuensinya

$$\int_0^3\left[\int_1^2 (2x+3y)dx\right]dy=\int_0^3[3+3y]dy=\left[3y+\frac{3}{2}y^2\right]_0^3$$

$$=9+\frac{27}{2}=\frac{45}{2}$$

Contoh 2
Hitunglah

$$\int_1^2\left[\int_0^1 (2x+3y)dx\right]dy$$

Solusi

Perhatikan bahwa kita cukup membalik susunan pengintegralan dari contoh 1 :
dan kita dapat mengharapkan jawaban yang sama seperti pada contoh 1 tersebut

$$\int_0^3 (2x+3y)dy = \left[2xy + \frac{3}{2}y^2\right]_0^3$$

$$= 6x + \frac{27}{2}$$

Jadi

$$\int_1^2 \left[\int_0^3 (2x+3y)dy\right]dx = \int_1^2 \left[6x + \frac{27}{2}\right]dx = \left[3x^2 + \frac{27}{2}x\right]_1^2$$

$$= 12 + 27 - \left(3 + \frac{27}{2}\right) = \frac{45}{2}$$

Sejak saat ini, kita akan selalu menghilangkan penggunaan tanda kurung di dalam integral berulang

Contoh 3

Hitunglah

$$\int_0^8 \int_0^4 \frac{1}{16}\left[64 - 8x + y^2\right]dxdy$$

Solusi

Perhatikan bahwa integral berulang ini berhubungan dengan integral lipat dua pada contoh 2 dalam subbab sebelumnya di mana kita telah memastikan bahwa jawabannya adalah 138 ½ . Kita akan seringkali mengabaikan pemisahan integral sebalh dalam; sebagai gantinyya, kita akan memproses integral dari dalam keluar.

$$\int_0^8 \int_0^4 \frac{1}{16}\left[64 - 8x + y^2\right]dxdy = \frac{1}{16}\int_0^8 \left[64x - 4x^2 + xy^2\right]_0^4 dy$$

$$= \frac{1}{16}\int_0^8 \left[256 - 64 + 4y^2\right]dy = \int_0^8 \left(12 + \frac{1}{4}y^2\right)dy$$

$$= \left[12y + \frac{y^3}{12}\right]_0^8 = 96 + \frac{512}{12} = 138\frac{2}{3}$$

Menghitung Volume

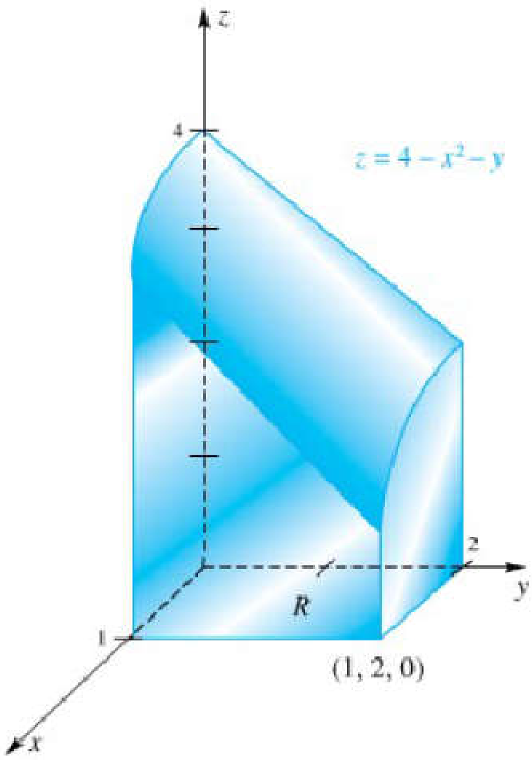
Sekarang kita dapat menghitung volume dari berbagai bentuk benda padat

Contoh 4

Tentukan volume V suatu benda padat di bawah permukaan z = 4-x^2-y dan di atas persegi panjang

$$R\left\{(x,y); 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\right\}$$

seperti pada gambar di bawah ini



Solusi

Marilah kita menaksir volume ini dengan asumsi bahwa benda padat tersebut mempunyai konstanta ketinggian 2,5, yang menghasilkan volume (2,5)(2) = 5. Jika perhitungan berikut tidak menghasilkan jawaban yang tidak mendekati 5, maka kita ketahui bahwa kita telah melakukan sebuah kesalahan.

$$V = \iint_R \left(4 - x^2 - y\right) dA = \int_0^2 \int_0^1 \left(4 - x^2 - y\right) dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \left[4x - \frac{x^3}{3} + yx\right]_0^1 dy = \int_0^2 \left[4 - \frac{1}{3} - y\right] dy$$

$$= \left[4y - \frac{1}{3}y - \frac{1}{2}y^2\right]_0^2 = 8 - \frac{2}{3} - 2 = \frac{16}{3}$$

LATIHAN SOAL B

Hitunglah Setiap integral berulang berikut ini :

1. $\int_0^2 \int_0^3 (9 - x)\, dy\, dx$

2. $\int_{-2}^2 \int_0^1 (9 - x^2)\, dy\, dx$

3. $\int_0^2 \int_1^3 x^2 y\, dy\, dx$

4. $\int_{-1}^4 \int_1^2 (x + y^2)\, dy\, dx$

5. $\int_1^2 \int_0^3 (xy + y^2)\, dx\, dy$

6. $\int_{-1}^1 \int_1^2 (x^2 + y^2)\, dx\, dy$

7. $\int_0^{\pi} \int_0^1 x \sin y\, dx\, dy$

8. $\int_0^{\ln 3} \int_0^{\ln 2} e^{x+y}\, dy\, dx$

9. $\int_0^{\pi/2} \int_0^1 x \sin xy\, dy\, dx$

10. $\int_0^1 \int_0^1 xe^{xy}\, dy\, dx$

11. $\int_0^3 \int_0^1 2x\sqrt{x^2 + y}\, dx\, dy$

12. $\int_0^1 \int_0^1 \frac{y}{(xy + 1)^2}\, dx\, dy$

13. $\int_0^{\ln 3} \int_0^1 xy\, e^{xy^2}\, dy\, dx$

14. $\int_0^1 \int_0^2 \frac{y}{1 + x^2}\, dy\, dx$

15. $\int_0^{\pi} \int_0^3 y \cos^2 x\, dy\, dx$

16. $\int_{-1}^1 \int_0^1 xe^{x^2}\, dx\, dy$

Universitas
Esa Unggul

DAFTAR PUSTAKA

- **Varberg, Purcell, Rigdon, ,KALKULUS, edisi kesembilan , Erlangga, Jakarta, 2011**
- **Murray R.Spieqel,CALCULUS LANJUT, edisi kedua, Erlangga, Jakarta, 2008.**

Universitas Esa Unggul