**MODUL MATEMATIKA 2**

**(IND 124)**

**MODUL SESI 2**

# TEKNIK INTEGRASI/ANTI TURUNAN


**DISUSUN OLEH**

**SEPTIAN RAHMAT ADNAN, S.Si.,M.Si**

**UNIVERSITAS ESA UNGGUL**



**2020**

**Pokok Bahasan** : TEKNIK INTEGRASI/ANTI TURUNAN
**Sub Pokok Bahasan** :

A. Aturan Dasar Integral
B. Subtitusi Pada Integral Taktentu
C. Integrasi per bagian/parsial

**Tujuan Instruksional Umum :**
Agar mahasiswa dapat memahami dan dapat menyelesaikan persoalan integral dengan fungsi tertentu

**Tujuan Instruksional Khusus :**
Agar mahasiswa mampu menjelaskan dan dapat menyelesaikan masalah yang terkait dengan :

A. Aturan Dasar Integral dengan berbagai macam variasi soal
B. Subtitusi Pada Integral Taktentu dengan berbagai macam variasi soal
C. Integrasi per bagian/parsial dengan berbagai macam variasi soal

# Teknik Integrasi

**Aturan dasar Integral**

Pada bab ini kita akan membahas beberapa kasus integrasi yang meliputi fungsi elementer(fungsi dasar). Salah satu bentuk fungsi elementer adalah fungsi konstan, fungsi aljabar, fungsi logaritma, fungsi eksponensial, fungsi trigonometri, fungsi trigonometri invers dan semua fungsi yang terdapat penjumlahan, pangkat, perkalian, pembagian dan komposisi seperti fungsi di bawah ini :

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$g(x) = (1 + \cos^4 x)^{1/2}$$

$$h(x) = \frac{3^{x^2 - 2x}}{\ln(x^2 + 1)} - \sin\left[\cos\left(\cosh x\right)\right]$$

sebagai fungsi elementer.

Turunan dari fungsi elementer seperti contoh di atas dilakukan dengan menggunakan metode sistematis dengan aturan yang telah dipelajari di bab sebelumnya. dan hasilnya dari hasil diferensiasi/turunan dari fungsi tersebut juga merupakan fungsi elementer. Untuk pada kasus integral merupakan hal berbeda. Pada kasus integral melibatkan beberapa teknik dan juga melibatkan beberapa trik khusus. Serta pada kasus integral tidak selalu menghasilkan fungsi elementer. sebagai contoh fungsi $e^{-x2}$ dan (sin x/x) bukan merupakan fungsi elementer.

Dua prinsip pada teknik integrasi adalah subtitusi dan integrasi parsial atau bagian per bagian. Metode subtitusi akan kita bahas lebih lanjut dibagian berikutnya.

**BENTUK STANDAR**

Keefektivan suatu metode dari subtitusi dan integrasi parsial bergantung pada bentuk integral yang telah diketahui. beberapa bentuk aturan integral yang telah dipelajari pada kuliah sebelumnya adalah sebagai berikut :

**Integral konstan**

$$\int k\,du = ku$$

**Integral eksponensial**

$$\int e^u du = e^u$$

**beberapa bentuk integral lainnya**

$$\int u^r du = \begin{cases} \dfrac{u^{r+1}}{r+1} + C \to r \neq -1 \\ \ln|u| + C \to r \neq 1 \end{cases}$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, a \neq 1, a > 0$$

**Fungsi trigonometri**

$$\int \sin u du = -\cos u + C$$

$$\int \cos u du = \sin u + C$$

$$\int \sec^2 u du = \tan u + C$$

$$\int \csc^2 u du = -\cot u + C$$

$$\int \sec u \tan u du = \sec u + C$$

$$\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$$

$$\int \tan u du = -\ln|\cos u| + C$$

$$\int \cot u du = \ln|\sin u| + C$$

**Fungsi Aljabar**

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C$$

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{|u|}{a}\right)+C = \frac{1}{a}\cos^{-1}\left(\frac{a}{|u|}\right)+C$$

**Fungsi hiperbola**

$$\int \sinh u du = \cosh u + C$$

$$\int \cosh u du = \sinh u + C$$

**SUBTITUSI PADA INTEGRAL TAKTENTU**

**Teorema A (SUBTITUSI PADA INTEGRAL TAKTENTU)**

anggaplah suatu fungsi g(x) adalah suatu fungsi yang dapat didiferensiasi dan jika F(x) adalah hasil integral dari fungsi f(x), maka jika u = g(x)

$$\int f(g(x))g^{'}(x)dx = \int f(u)du = F(u)+C = F(g(x))+C$$

**Contoh 1**

Tentukan solusi dari soal di bawah ini :

$$\int \frac{x}{\cos^2(x)^2}dx$$

Solusi :

perhatikan integral pada soal tersebut. kita dapatkan bahwa :

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

dan

$$\int \sec^2 u du$$

dapat kita selesaikan dengan cara kita subtitusi

$$u = x^2 \quad du = 2xdx$$

dari hasil tersebut kita dapatkan :

$$\int \frac{x}{\cos^2(x)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2(x^2)}2xdx = \frac{1}{2}\int \sec^2 u du$$

$$= \frac{1}{2}\tan u + C = \frac{1}{2}\tan(x^2) + C$$

**Contoh 2 :**

Tentukan solusi dari soal di bawah ini :

$$\int \frac{3}{\sqrt{5-9x^2}}dx$$

Maka, Untuk mencari solusi dari soal tersebut berikut langkah yang perlu dilakukan : pertama kita lakukan subtitusi dengan menggunakan aturan integral yang telah kita ketahui yaitu :

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$$

dengan menganggap bahwa u = 3x, maka du = 3 dx. Sehingga hasil tersebut kita gunakan untuk mensubtitusi untuk menyelesaikan integral seperti di bawah ini :

$$\int \frac{3}{\sqrt{5-9x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{5-u^2}}du = \sin^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right) + C = \sin^{-1}\left(\frac{3x}{\sqrt{5}}\right) + C$$

**Contoh 3 :**

Tentukan solusi dari soal di bawah ini :

$$\int \frac{6e^{1/x}}{x^2}dx$$

Maka, Untuk mencari solusi dari soal tersebut berikut langkah yang perlu dilakukan : pertama kita lakukan subtitusi dengan menggunakan aturan integral yang telah kita ketahui yaitu :

$$\int e^u du$$

dengan subtusi u = 1/x maka du = (-1/x$^2$)dx, maka selanjutnya dapat diselesaikan dengan cara berikut :

$$\int \frac{6e^{1/x}}{x^2}dx = -6\int e^{1/x}\left(\frac{-1}{x^2}dx\right) = -6\int e^u du$$

$$= -6e^u + C = -6e^{-1/x} + C$$

**Contoh 4 :**
Tentukan solusi dari soal di bawah ini :

$$\int \frac{e^x}{4+9e^{2x}}dx$$

Maka, Untuk mencari solusi dari soal tersebut berikut langkah yang perlu dilakukan : pertama kita lakukan subtitusi dengan menggunakan aturan integral yang telah kita ketahui yaitu :

$$\int \frac{1}{a^2+u^2}du$$

dengan menggunakan subtitusi u = 3e$^x$, maka du = 3e$^x$ dx, maka :

$$\int \frac{e^x}{4+9e^{2x}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{4+9e^{2x}}(3e^x dx) = \frac{1}{3}\int \frac{1}{4+u^2}du$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C = \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{3e^x}{2}\right) + C$$



**Contoh 5 :**
Tentukan solusi dari soal di bawah ini :

$$\int x\cos x^2 dx$$

Maka, Untuk mencari solusi dari soal tersebut berikut langkah yang perlu dilakukan dengan mensubtitusi u = x$^2$

$$\int x\cos x^2 dx = \frac{1}{2}\int (\cos x^2)(2x dx) = \frac{1}{2}\sin x^2 + C$$

**Contoh 6 :**
Tentukan solusi dari soal di bawah ini :

$$\int \frac{a^{\tan t}}{\cos^2 t} dt$$

Maka, Untuk mencari solusi dari soal tersebut berikut langkah yang perlu dilakukan dengan mensubtitusi u = tan t, maka kita dapat menyelesaikan soal tersebut dengan cara berikut :

$$\int \frac{a^{\tan t}}{\cos^2 t} dt = \int a^{\tan t} (\sec^2 t dt) = \frac{a}{\ln a} + C$$

**Contoh 7 :**

Tentukan solusi dari soal di bawah ini :

$$\int_2^5 t\sqrt{t^2 - 5dt}$$

Maka, Untuk mencari solusi dari soal tersebut berikut langkah yang perlu dilakukan dengan mensubtitusi u = $t^2$-4, maka du = 2t dan perhatikan bahwa t = 2 saat u = 0 dan saat t = 5, u = 21, maka kita dapat menyelesaikan soal tersebut dengan cara berikut :

$$\int_2^5 t\sqrt{t^2 - 5dt} = \frac{1}{2}\int_2^5 (t^2 - 4)^{1/2}(2tdt)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{21} u^{1/2} du = \left[\frac{1}{3}u^{3/2}\right]_0^{21} = \frac{1}{3}(21)^{3/2} \approx 32,08$$

**Contoh 8 :**

Tentukan solusi dari soal di bawah ini :

$$\int_1^3 x^3\sqrt{x^4 + 11dx}$$

Maka, Untuk mencari solusi dari soal tersebut berikut langkah yang perlu dilakukan dengan mensubtitusi u = $x^4$+11, maka kita dapat menyelesaikan soal tersebut dengan cara berikut :

$$\int_1^3 x^3\sqrt{x^4+11}\,dx = \frac{1}{4}\int_1^3 (x^4+11)^{1/2}(4x^3dx)$$

$$= \left[\frac{1}{6}\left(x^4+11\right)^{3/2}\right]_1^3 = \frac{1}{6}\left[92^{3/2}-12^{3/2}\right] \approx 140{,}144$$

**LATIHAN SOAL**
**Tentukan solusi dari integral di bawah ini :**

$$1.\int (x-2)^5\, dx$$

$$2.\int \sqrt{3x}dx$$

$$3.\int_0^2 x(x^2+1)^5\, dx$$

$$4.\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$5.\int \frac{dx}{x^2+4} dx$$

$$6.\int \frac{e^x}{2+e^x} dx$$

$$7.\int \frac{x}{x^2+4} dx$$

$$8.\int \frac{2t^2}{2t^2+1} dx$$

$$9.\int 6z\sqrt{4+z^2}\, dz$$

$$10.\int \frac{5}{\sqrt{2t+1}} dt$$

**Sub Bab 2. Integrasi per bagian/parsial**

Jika kita sedang mencoba menyelesaikan suatu problem integral dan tidak berhasil mendapatkan solusi integral tersebut, maka salah satu pilihan cara lain untuk menyelesaikan problem tersebut adalah dengan menggunakan subtitusi ganda atau biasa dikenal dengan integral per bagian/parsial. Metode ini berdasarkan pada suatu persamaan untuk diferensiasi dari suatu persamaan yang terdiri dari dua fungsi.

Misalkan u = u(x) dan v = v(x), maka :

$$d\left[u(x)v(x)\right] = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$$

atau

$$u(x)v'(x) = d[u(x)v(x) - v(x)u'(x)]$$

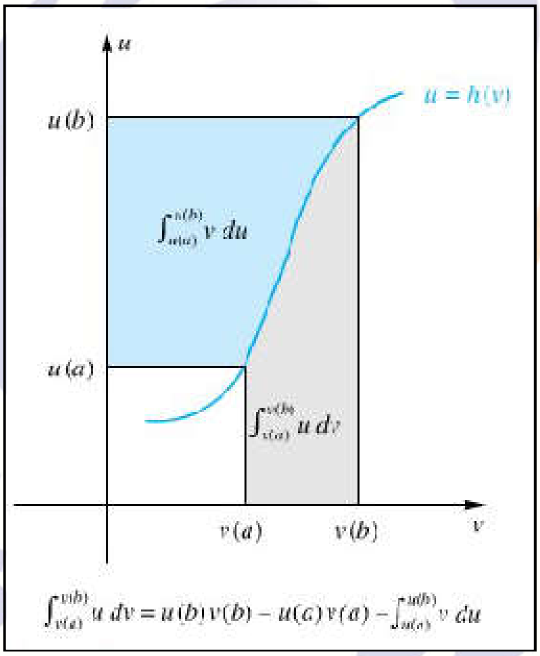
dengan mengintegralkan kedua ruas, maka kita dapatkan :

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

dengan dv = v'(x) dx dan du = u'(x) dx

Dari hasil pembahasan di atas didapatkan formula secara umum untuk menyelesaikan integral per bagian atau integral tak tentu adalah :

$$\int udv = uv - \int vdu$$



Gambar 1. Kurva hasil integral per bagian/parsial

**Contoh 1 :**

Tentukan solusi dari soal di bawah ini :

$$\int x\cos xdx$$

Maka, Untuk mencari solusi dari soal tersebut berikut langkah yang perlu dilakukan yaitu pertama dengan menulis x cosx x sebagai u dv. salah satu cara yang dimungkinkan adalah mensubtitusi u = x dam dv = cos x dx.

Maka du = dx dan

$$v = \int \cos xdx = \sin x$$

dari subtitusi tersebut, maka kita dapatkan

$$u = x \qquad dv = \cos x \, dx$$

$$du = dx \qquad v = \sin x$$

maka persamaan untuk integral dari soal tersebut adalah

$$u = x \qquad dv = \cos x \, dx$$

$$du = dx \qquad v = \sin x$$

dan solusi akhir yang didapatkan adalah

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\cos x \, dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin x}_{v} - \int \underbrace{\sin x}_{v} \underbrace{dx}_{du}$$

dengan solusi akhir adalah = x sinx + cos x + C

**Contoh 2 :**
Tentukan solusi dari soal di bawah ini :

$$\int_{1}^{2} \ln x dx$$

Maka, Untuk mencari solusi dari soal tersebut berikut langkah yang perlu dilakukan yaitu pertama dengan menulis u = ln dan dv = dx atau dapat dituliskan sebagai berikut :

$$u = \ln x$$

$$du = \left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$dv = dx$$

$$v = x$$

dari hasil tersebut maka dapat dituliskan

$$\int_1^2 \ln x dx = [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 x \frac{1}{x} dx$$

$$= 2\ln 2 - \int_1^2 dx = 2\ln 2 - 1 \approx 0,386$$

**Contoh 3 :**
Tentukan solusi dari soal di bawah ini :

$$\int \arcsin x dx$$

Maka, Untuk mencari solusi dari soal tersebut berikut langkah yang perlu dilakukan yaitu pertama dengan menulis u = arcsin x dan dv = dx, v = x serta

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

dari subtitusi tersebut maka

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \left(1-x^2\right)^{-1/2} (-2x dx)$$

$$= x \arcsin x + \frac{1}{2} .2 \left(1-x^2\right)^{1/2} + C$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

**Contoh 4 :**
Tentukan solusi dari soal di bawah ini :

$$\int_1^2 t^6 \ln t dt$$

Maka, Untuk mencari solusi dari soal tersebut berikut langkah yang perlu dilakukan yaitu pertama dengan mensubtitusi

$$u = \ln t$$

$$du = \frac{1}{t}dt$$

$$dv = t^6 dt$$

$$v = \frac{1}{7}t^7$$

dari subtitusi tersebut maka

$$\int_1^2 t^6 \ln t dt = \left[\frac{1}{7}t^7 \ln t\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{7}t^7\left(\frac{1}{t}dt\right)$$

$$= \frac{1}{7}(128\ln 2 - \ln 1) - \frac{1}{7}\int_1^2 t^6 dt$$

$$= \frac{128}{7}\ln 2 - \frac{1}{49}\left[t^7\right]_1^2 = \frac{128}{7}\ln 2 - \frac{127}{49} \approx 10,083$$

**Contoh 5 :**
Tentukan solusi dari soal di bawah ini :

$$\int x^2 \sin x dx$$

Maka, Untuk mencari solusi dari soal tersebut berikut langkah yang perlu dilakukan yaitu pertama dengan mensubtitusi

$$u = x^2 \qquad dv = \sin x\, dx$$

$$du = 2x\, dx \qquad v = -\cos x$$

dari subtitusi tersebut maka

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx$$

sehingga didapatkan hasil akhir sebagai berikut :

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x + C)$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + K$$

**LATIHAN SOAL**
**Jawablah Soal-soal di bawah ini dengan tepat !**

1. $\int xe^{x}dx$

2. $\int te^{5t+\pi}dt$

3. $\int xe^{3x}dt$

4. $(t+7)e^{2t+3}dt$

5. $\int x\cos xdx$

6. $\int x\sin 2xdx$

7. $\int (t-3)\cos(t-3)dt$

8. $\int (x-\pi)\sin xdx$

9. $\int t\sqrt{t+1}dt$

10. $\int t\sqrt[3]{2t+7}dt$

**DAFTAR PUSTAKA**


- **Varberg, Purcell, Rigdon, ,KALKULUS, edisi kesembilan , Erlangga, Jakarta, 2011**
- **Murray R.Spieqel,CALCULUS LANJUT, edisi kedua, Erlangga, Jakarta, 2008.**