KONSEP PERMUTASI DAN KOMBINASI

A. PENDAHULUAN

Seringkali muncul persoalan tentang cara menghitung berbagai kemungkinan pada saat memilih sampel dari suatu populasi tertentu. Dalam berapa macam cara suatu pemilihan sampel yang diambil dari suatu populasi tertentu dapat dilakukan? Pada dasarnya persoalan ini sama dengan persoalan dalam mencari jumlah cara menyusun atau mengatur suatu himpunan obyek tertentu.

Sering pula terbetik pemikiran – pemikiran tentang:
- Dalam berapa cara 6 orang dapat duduk berjejer dalam suatu deretan sebuah bangku jika yang pria harus duduk paling ujung?
- Berapakah caranya buku yang berbeda dapat diatur dalam sebuah rak menurut tahun penerbitannya?
- Dalam memilih responden untuk penelitian sebanyak 25 orang dan 10 orang harus terdiri dari wanita yang mandiri dalam mencari penghasilan, berapa caranya?

Untuk menjawab permasalahan ini konsep permutasi dan konmbinasi dapat digunakan untuk memecahkannya.

B. PERMUTASI

Permutasi adalah susunan-susunan yang dibentuk dari angota-anggota suatu himpunan dengan mengambil seluruh atau sebagian anggota himpunan dan memberi arti pada urutan anggota dari masing-masing susunan tersebut.

Pada permutasi ututan dari anggota sangat diperhatikan. Contohnya, jika kita mempunyai himpunan {a,b,c}, letak huruf “a” pada susunan pertama berbeda artinya dengan pada susunan kedua. Susunan huruf “ab” berbeda dengan huruf “ba”, sehingga ab ≠ ba; ac ≠ ca; bc ≠ cb
Simbol yang digunakan pada permutasi adalah huruf “P”

Jumlah permutasi dari suatu himpunan yang terdiri dari n obyek yang berbeda secara keseluruhan menjadi n!, dinyatakan sebagai :

$$nPn = n!$$

Contoh: Permutasi dari tiga kelereng A,B,C adalah: ${}_3P_3 = 3! = 3.2.1 = 6$

Bila himpunan terdiri atas n anggota dan diambil sebanyak r, dan r ≤ n, maka banyaknya susunan yang dapat dibuat adalah :

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Contoh:

1. Bila diketahui n = 4 dan r = 2 maka

$${}_4P_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4.3.2.1}{2.1} = 12$$

2. Bila diketahui suatu himpunan {a,b.c} sehingga n = 3. Jika diambil salah satu maka banyaknya susunan yang diperoleh adalah:

$${}_3P_1 = \frac{3!}{(3-1)!} = \frac{3!}{2!} = \frac{3.2.1}{2.1} =3$$

3. Diketahui kata “SELAMPIR”
   a). Berapa banyak gabungan huruf yang dapat dibentuk dari kata “SELAMPIR” bila seluruhnya digunakan ?
   b). Berapa banyak kata yang dapat dibentuk jika huruf s dan huruf e terdapat secara bersama-sama?
   c). Berapa banyak kata yang dapat dibentuk jika huruf s dan huruf e tidak terdapat secara bersama-sama?

JAWAB: Kata “SELAMPIR” terdiri dari 8 huruf, sehingga n = 8

a). Permutasi seluruh huruf adalah

$${}_8P_8 = 8! = 8.7.6.5.4.3.2.1 = 40.320$$

b). Berarti huruf s dan e dianggap sebagai satu huruf sehingga n = 7.
Jadi permutasinya adalah

$${}_7P_7 = 7! = 7.6.5.4.3.2.1 = 5.040$$

c). Jika tidak terdapat bersama-sama, maka permutasinya adalah:

$$n! – 2(7!) = 8! – 2\ (7!) = 40.320 – 2.\ 5.040 = 30.240$$

4. Ada tiga cara yang efektif untuk pengobatan pasien Ca (kanker) yakni bedah (B), radiasi (penyinaran =P), dan kemoterapi (obat=O). Ada berapa carakah dapat diobati seseorang yang menderita Ca kalau kepada masing-masing pasien hanya dua macam terapi yang bisa diberikan.

Penyelesaian:
Untuk pengobatan ini urutan diperlukan karena seseorang yang mendapat terapi bedah dan penyinaran (B,P) akan berbeda dengan yang mendapat penyinaran lebih dahulu baru dibedah (P,B).

$$3\,P\,2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{1} = 6$$

Permutasi keliling adalah suatu permutasi yang dibuat dengan menyusun anggota-anggota suatu himpunan secara melingkar. Dalam permutasi ini yang menjadi persoalan adalah letak kedudukan relatif dari obyek tertentu terhadap obyek yang lainnya.Untuk mencari jumlah permutasi dalam dalam susunan keliling kita harus mengkonstantir kedudukan salah satu obyek secara arbriter dan kemudian menghitung jumlah permutasi obyek yang masih tertinggal seperti bila obyek yang bersangkutan tersusun secara berjajar.

Banyaknya permutasi dari n anggota yang disusun secara melingkar adalah :

$$(n-1)!$$

Contoh: Ada berapa cara duduk dari 8 anggota DPR dalam rapat yang mengelilingi sebuah meja bundar?
Jawab: (n-1)! = (8-1)! = 7! = 5.040 cara

C. KOMBINASI

Kombinasi adalah susunan-susunan yang dibentuk dari angota-anggota suatu himpunan dengan mengambil seluruh atau sebagian dari anggota himpunan tanpa memberi arti pada urutan anggota dari masing-masing susunan tersebut.

Pada kombinasi urutan anggota tidak mempunyai arti atau tidak diperhatikan sehingga jika kita mempunyai himpunan {a,b,c} maka susunan : ab = ba; ac = ca dan bc = cb.
Simbol yang digunakan pada kombinasi adalah huruf "C"

Rumusannya :

Jumlah kombinasi pada r dari n obyek yang berbeda dinyatakan sebagai

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad \text{atau} \quad C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Contohnya:

1. $_4C_3 = \binom{4}{3} = \dfrac{4!}{3!(4-3)!} = \dfrac{4!}{3!1!} = 4$

2. Dari 7 anggota panitia kemerdekaan dipilih dua orang untuk menjadi ketua dan wakilnya, tanpa menentukan siapa yang menjadi ketua atau wakilnya, maka pilihan yang diperolehnya adalah :

$$_7C_2 = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{5.040}{240} = 21 \text{ pilihan}$$

3. Tiga orang pasien digigit ular dan di bawa ke puskesmas. Di puskesmas hanya tersedia 2 dosis antiracun ular. Berapa kemungkinan pasangan yang akan diberikan 2 dosis tersebut (pasiennya A, B, C)?

   Penyelesaian :

   2 orang yang berpasangan di sini, misalnya A dan B sama saja dengan B dan A. Jadi disini urutan tidak ada artinya.
   Maka dalam hal ini pasangan yang terjadi adalah:

$$3C2 = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 1} = 3$$

   Mereka adalah : (AB, AC,BC)

Contoh soal

Dalam suatu kelompok yang terdiri dari 4 laki-laki dan 3 perempuan dipilih 3 orang pengurus yang terdiri dari 2 laki-laki dan 1 perempuan. Hitung kombinasinya!
Jawab :

Dimisalkan, 4 laki-laki = {L1, L2, L3, L4}
3 perempuan = {P1, P2, P3}
2 laki-laki dipilih dari 4 laki-laki = $_4C_2 = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = \dfrac{4!}{2!2!} = 6$
1 perempuan dipilih dari 3 perempuan = $_3C_1 = \dfrac{3!}{1!(3-1)!} = \dfrac{3!}{1!2!} = 3$

Banyaknya pilihan untuk membuat pengurus adalah : 6 x 3 = 18

Perbedaan perhitungan antara permutasi dan kombinasi

Bila dari himpunan {a,b,c} diambil tiga obyek, maka banyaknya permutasi dan kombinasi yang diperoleh adalah:

Permutasi : $_4P_3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 4.3.2.1 = 24$

Kombinasi : $_4C_3 = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!1!} = 4$

Latihan:

1. Berapakah kemungkinan jumlah kombinasi yang dapat dibuat bila ada 4 orang A, B, C, D ingin membuat suatu panitia yang terdiri dari tiga orang saja?

   Jawaban:

   n = jumlah semua orang = 4
   r = jumlah yang menjadi panitia = 3

   Oleh karena tidak ada persyaratan khusus untuk menjdi panitia atau semua orang mempunyai peluang yang sama untuk menjadi panitia maka digunakan kombinasi yaitu:

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = C_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!\,3!} = \frac{4\ x\ 3\ x\ 2\ x\ 1}{1\ x\ 3\ x\ 2\ x\ 1} = 4$$

   Jadi ada 4 kemungkinan panitia yang dapat dibentuk dan terdiri dari orang-orang ABC, ABD, ACD, BCD, karena dalam kombinasi ABC = BCA dan seterusnya.

2. Merupakan contoh penggunaan kombinasi dalam penghitungan probabilitas.

   Dalam suatu kotak terdapat 5 bola merah, 3 bola putih dan 2 bola hitam, diambil satu persatu sebanyak 3 kali dan tanpa pengembalian.

   Hitunglah:

   a. Probabilitas dalam 3 kali pengambilan tersebut akan terdapat 1 bola merah, 1 bola putih dan 1 bola hitam.
   b. Terdapat 3 bola merah
   c. Terdapat 2 bola putih dan 1 hitam
   d. Pengambilan: I harus merah
      II harus putih

III harus hitam

Jawaban:

a) Untuk mengetahui probabilitasnya kita lihat dulu:

1. Merah = 5 bola → kombinasi merah = C_1^5
2. Putih = 3 bola → kombinasi putih = C_1^3
3. Hitam = 2 bola → kombinasi hitam = C_1^2

Karena ada 10 bola dan diambil sebanyak 3, maka kombinasi totalnya C_3^{10}

Oleh karena itu probabilitasnya:

$$P = \frac{C_1^5 C_1^3 C_1^2}{C_3^{10}} = \frac{180}{720} = \frac{1}{4}$$

Dan distribusi 3 bola tersebut adalah:

Kombinasi / Pengambilan	1	2	3	4	5	6
I	merah	merah	hitam	hitam	putih	putih
II	putih	hitam	putih	merah	hitam	merah
III	hitam	putih	merah	putih	merah	hitam

Dengan probabilitas masing-masing kombinasi = 1/6 x 1/4 = 1/24

b). Terdapat 3 bola merah, berarti pengambilan kesatu merah, pengambilan kedua merah dan pengambilan ke tiga juga merah sehingga tidak ada kombinasi yang harus dibentuk. Oleh karena itu probabilitasnya adalah:

$$P = \frac{C_3^5}{C_3^{10}} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

c). Terdapat 2 bola putih dan 1 bola hitam

$$P = \frac{C_2^3 C_1^2}{C^{10}3} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

Distribusi kombinasinya adalah:

Kombinasi / Pengambilan	1	2	3
I	Putih	putih	Hitam
II	Putih	Hitam	Putih
III	hitam	Putih	putih

d) Pengambilan ke satu merah berarti probabilitanya= 5/10
Karena sudah diambil 1 bola maka sisanya tinggal 9 bola, oleh karena itu probabilita pengambilan ke dua putih = 3/9. Sekarang sisa bola yang ada adalah 8, sehingga probabilita pengambilan bola ketiga hitam = 2/8, maka probabilitas total :

5/10 x 3/9 x 2/8 = 1/24

Atau, jika lihat pada tabel distribusi kombinasi a), kondisi ini terdapat pada kombinasi ke satu dengan probabilitas sebesar 1/24

3. Berapa banyak cara yang dapat diperoleh seandainya ada 10 orang yang ingin menonton, namun bangku kosong yang tersedia hanya ada 4 buah?
Jawaban:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 10\ x\ 9\ x\ 8\ x\ 7 = 5040\ cara$$

4. Dari 10 orang perawat yang akan dikirim ke daerah kejadian gempa bumi akan dipilih 4 orang menjadi ketua, wakil ketua, sekretaris, dan bendahara. Berapa cara organisasi tersebut dapat terjadi?

Jawaban :

$$10\ P\ 4 = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{10!}{(10-4)!}$$

$$= \frac{10!}{6!}$$

$$= 10 \times 9 \times 8 \times 7$$

= 5040 cara

Sumber :

1. *https://zainurman.files.wordpress.com/.../statistika-ekonomi-peluan...*

2. Sabri. L., Hastono, S.P. (2013). Statistik Kesehatan. Jakarta: Rajawali Press.