# PENDUGAAN INTERVAL (ESTIMASI)

## MODUL PERKULIAHAN 13 (ONLINE 11)

**Disusun oleh:**

**TIM DOSEN**

**Pelaksana Akademik Mata Kuliah Umum (PAMU)**

**Universitas Esa Unggul**

**Jakarta Barat**

**2018**

## PENDUGAAN INTERVAL (ESTIMASI)

Tujuan Instruksional Umum :

1. Mahasiswa mampu memahami apa yang dimaksud dengan pendugaan interval
2. Mahasiswa mampu memahami pendugaan interval untuk sampel besar dan untuk sampel kecil
3. Mahasiswa mampu memahami pendugaan interval untuk rata-rata dan proporsi

Tujuan Instruksional Khusus :

1. Mahasiswa mampu untuk menghitung pendugaan interval data dengan sampel besar
2. Mahasiswa mampu menghitung pendugaan interval untuk data dengan sampel kecil
3. Mahasiswa mampu menghitung pendugaan interval untuk satu rata-rata
4. Mahasiswa mampu menghitung pendugaan interval untuk selisih dua rata-rata
5. Mahasiswa mampu menghitung pendugaan interval untuk proporsi
6. Mahasiswa mampu menghitung pendugaan interval untuk selisih dua proporsi

Ciri-ciri suatu penduga yang baik adalah sebagai berikut.

1. Tidak Bias.
   Suatu penduga dikatakan tidak bias apabila penduga tersebut secara tepat dapat menduga nilai parameternya.
2. Konsistensi
   Suatu penduga dikatakan konsisten apabila besarnya sampel semakin bertambah mendekati tidak berhingga maka penduga tersebut akan semakin berkonsentrasi secara sempurna pada parameter yang diduga.
3. Efisiensi
   Suatu penduga akan dikatakan efisien apabila memiliki varians yang kecil.
4. Sufisiensi
   Suatu penduga dikatakan sufisien apabila penduga itu mempunyai informasi yang lengkap dan cukup tentang parameter yang akan diduga. Dengan kata lain tidak ada ukuran statistik lain sebagai penduga yang lebih baik untuk menduga paramater.

### PENDUGAAN INTERVAL UNTUK RATA-RATA

Untuk membuat pendugaan interval, harus ditentukan terlebih dahulu besarnya tingkat keyakinan, yang diberi simbol $1-\alpha$. Umumnya, tingkat kepervayaan yang digunakan adalah 90%, 95%, dan 99%.

Berdasarkan Dalil Batas Memusat, pernyataan probabilitas dapat dituliskan sebagai berikut.

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X}-\mu < Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

Misalkan $a = \bar{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ adalah batas bawah dan $b = \bar{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ adalah batas atas. Persamaan $P(a<\mu<b) = 1-\alpha$, yang menyatakan bahwa interval $a-b$ memuat rata-rata $\mu$.

Misalnya, batas bawahnya diberikan 2,5 dan batas atasnya 3,5 dengan $1 - \alpha = 90\%$. maka $P(2{,}5 < \mu < 3{,}5) = 90\%$, menunjukkan adanya probabilitas sebesar 90% bahwa pada interval 2,5 dan 3,5 akan memuat nilai rata-rata populasi yang sebenarnya yaitu $\mu$. Kesalahan yang mungkin terjadi, probabilitasnya adalah 10%. Artinya, kemungkinan interval tersebut tidak memuat $\mu$, artinya $\mu$ bisa lebih kecil dari 2,5 atau lebih besar dari 3,5.
Penyusunan interval keyakinan ditentukan oleh bentuk distribusi sampling dan diketahui atau tidaknya standar deviasi populasi $\sigma$.
Ada tiga rumus pendugaan interval rata-rata $\mu$.

Pertama,

$$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Rumus ini berlaku jika sampel besar ($n \geq 30$) dari populasi yang tak terbatas atau dari populasi terbatas, tetapi penarikan sampel dilakukan dengan pengembalian.

Kedua,

$$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} < \mu < \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Rumus ini digunakan kalau populasi terbatas, akan tetapi sampel sebanyak $n$ diambil tanpa pengembalian dari populasi dengan $N$ elemen dan $\sigma$ diketahui.

Ketiga,

$$\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

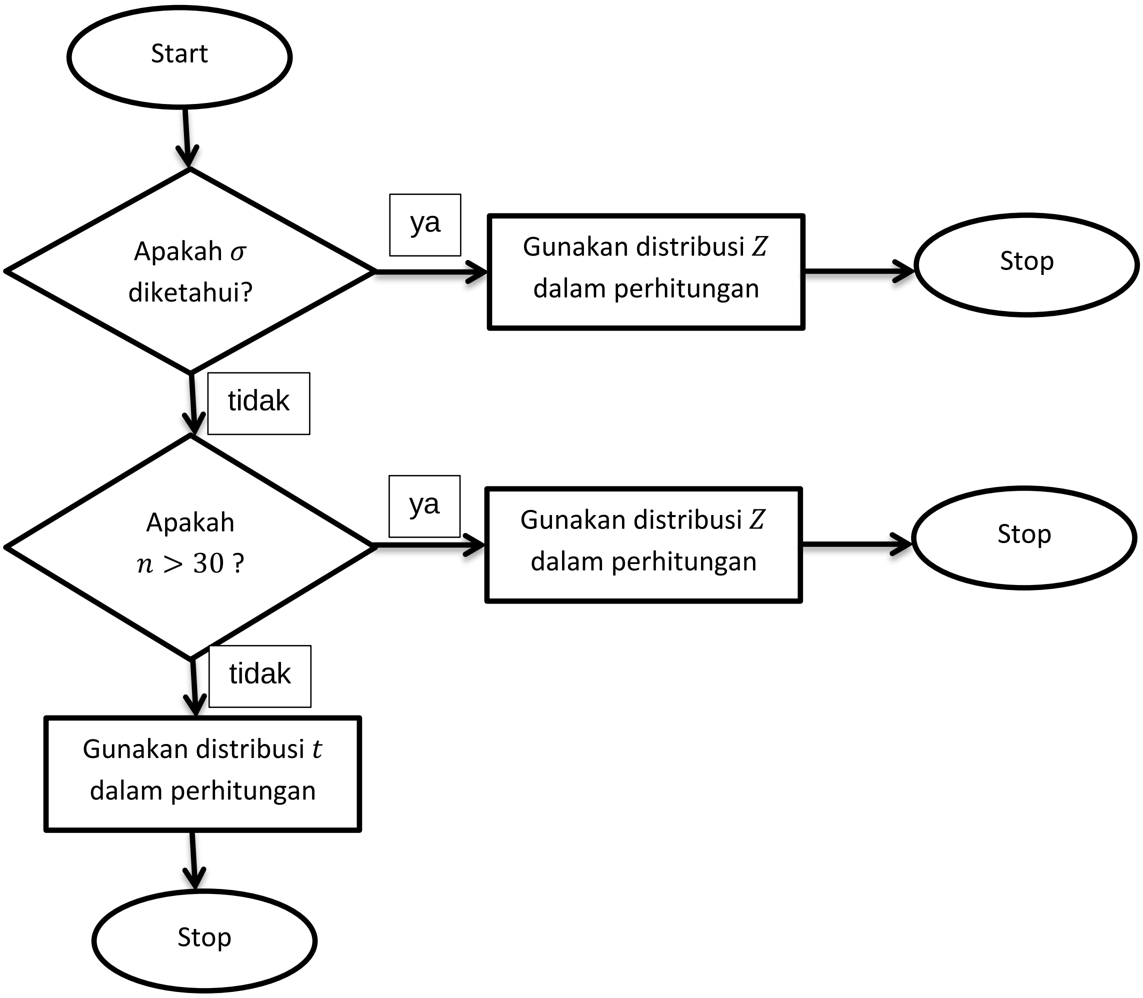
dengan

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2}$$

Rumus ini berlaku bagi sampel kecil ($n < 30$) yang diambil dari populasi ($\sigma$ tak diketahui) dengan pengembalian. Rumus ini pada dasarnya diperoleh dari rumus pertama dengan mengganti $\sigma$ dengan $s$ dan mengganti $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ dengan $t_{\frac{\alpha}{2}}$. Nilai dari $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ diperoleh dari tabel normal dan nilai $t_{\frac{\alpha}{2}}$ diperoleh dari tabel $t$ dengan derajat kebebasan sebesar $(n - 1)$.

Keterangan.
$\bar{X}$ = rata-rata sampel
$\sigma$ = standar deviasi sampel
$\mu$ = rata-rata populasi
$n$ = banyaknya sampel
$N$ = banyaknya populasi
$s$ = penduga $\sigma$

Untuk mengetahui distribusi mana yang akan digunakan bagi pendugaan interval, perhatikan skema 1.




**CONTOH 1.**

Seratus orang calon mahasiswa Akademi Ilmu Statistik sebagai sampel acak, yang sudah mengikuti tes IQ, mempunyai rata-rata IQ sebesar 110 dan diketahui mempunyai deviasi standar sebesar 20. Dengan menggunakan tingkat keyakinan sebesar 95%, buatlah pendugaan interval dari rata-rata IQ.

**Penyelesaian.**

Diketahui

$\bar{X} = 110$
$\sigma = 20$
$n = 100$
$1 - \alpha = 95\%$

Pertama-tama, dihitung nilai dari $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ dari Tabel 1 yang ada pada Lampiran 1. sehingga diperoleh $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$. Selanjutnya dipilih rumus yang mana akan digunakan. Rumus yang digunakan adalah rumus pertama karena $\sigma$ diketahui. sehingga diperoleh

$$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$110 - 1{,}96 \left(\frac{20}{\sqrt{100}}\right) < \mu < 110 + 1{,}96 \left(\frac{20}{\sqrt{100}}\right)$$

$$106{,}08 < \mu < 113{,}92$$

Jadi, interval antara $106{,}08$ dan $113{,}92$ akan memuat rata-rata IQ sebenarnya dengan tingkat keyakinan 95%.

**CONTOH 2.**

Lima orang mahasiswa Fasilkom Universitas Esa Unggul, dipilih secara acak untuk kemudian diukur tinggi badannya. diperoleh data-datanya sebagai berikut. 160, 170, 165, 175, 180. Buatlah pendugaan interval tentang rata-rata tinggi mahasiswa Fasilkom Universitas Esa Unggul dengan tingkat keyakinan 95%.

**Penyelesaian.**

Diketahui

$n = 5$
$1 - \alpha = 95\%$

Rumus yang digunakan adalah rumus ketiga karena $\sigma$ tidak diketahui dan $n < 30$.

Pertama-tama dihitung nilai rata-rata dari sampel. diperoleh

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{1}{n} \sum X_i \\ &= \frac{1}{5}(160 + 170 + 165 + 175 + 180) \\ &= \frac{1}{5}(850) \\ &= 170\end{aligned}$$

dan dihitung deviasi standar dari sampel, diperoleh

$$\begin{aligned}s &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}((160 - 170)^2 + (170 - 170)^2 + (165 - 170)^2 + (175 - 170)^2 + (180 - 170)^2)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}(100 + 0 + 25 + 25 + 100)} = \sqrt{\frac{1}{4}(250)} = 7{,}906\end{aligned}$$

Setelah itu, dihitung nilai dari $t_{\frac{\alpha}{2}}$ dengan menggunakan tabel yang ada pada Lampiran 1, dengan nilai $\alpha = 0{,}05$ dan derajat kebebasan $= n - 1 = 5 - 1 = 4$. Cara membaca tabelnya adalah mencari baris yang derajat kebebasannya 4, dan mencari kolom yang $\alpha = 0{,}05$ dan yang dua arah (two tails), sehingga diperoleh

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}776$$

Selanjutnya, dihitung pendugaan intervalnya, dengan menggunakan rumus yang ketiga. sehingga diperoleh

$$\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$170 - 2{,}776 \left(\frac{7{,}906}{\sqrt{5}}\right) < \mu < 170 + 2{,}776 \left(\frac{7{,}906}{\sqrt{5}}\right)$$

$$170 - 9{,}815 < \mu < 170 + 9{,}815$$

$$160{,}185 < \mu < 179{,}815$$

Jadi, interval antara $160{,}185$ dan $179{,}815$ akan memuat rata-rata tinggi mahasiswa Fasilkom Universitas Esa Unggul dengan tingkat keyakinan 95%.

## PENDUGAAN INTERVAL UNTUK DUA RATA-RATA

Misalkan $\bar{X}_1$ dan $\bar{X}_2$ adalah dua rata-rata sampel dari dua populasi dengan distribusi sampling masing-masing mendekati distribusi normal, maka pendugaan interval selisih rata-rata dua populasi yang merupakan sumber pengambilan sampel, dirumuskan sebagai berikut.

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\, \sigma_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\, \sigma_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}$$

dengan

$$\sigma_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

jika $n \geq 30$ , serta $\sigma_1$ dan $\sigma_2$ diketahui.

Jika $n < 30$ , serta $\sigma_1$ dan $\sigma_2$ tidak diketahui, maka rumus yang digunakan adalah sebagai berikut.

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}}\, s_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}}\, s_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}$$

dengan

$$s_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_{i1} - \bar{X}_1)^2$$

$$s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (X_{i2} - \bar{X}_2)^2$$

Keterangan.

$\mu_1$ = rata-rata populasi 1
$\mu_2$ = rata-rata populasi 2
$n_1$ = banyaknya sampel 1
$n_2$ = banyaknya sampel 2
$\bar{X}_1$ = rata-rata sampel 1
$\bar{X}_2$ = rata-rata sampel 2
$\sigma_1$ = standar deviasi sampel 1
$\sigma_2$ = standar deviasi sampel 2
$s_1^2$ = varians sampel 1
$s_2^2$ = varians sampel 2
$X_{i1}$ = data ke i dari sampel 1
$X_{i2}$ = data ke i dari sampel 2

**CONTOH 3.**

Lampu pijar merek ampuh memiliki rata-rata daya tahan 4500 jam dengan deviasi standar 500 jam, sedangkan lampu pijar merek baik memiliki rata-rata daya tahan 4000 jam dengan deviasi standar 400 jam. Jika diambil sampel masing-masing 100 buah lampu pijar dan diteliti, buatlah pendugaan interval untuk selisih rata-rata daya tahan dari kedua lampu pijar tersebut dengan tingkat keyakinan 90%.

**Penyelesaian.**

Misalkan

1 = lampu pijar merk ampuh

2 = lampu pijar mek baik

maka diketahui

$\bar{X}_1 = 4500$ , $\sigma_1 = 500$

$\bar{X}_2 = 4000$ , $\sigma_2 = 400$

$n_1 = n_2 = 100$

$1 - \alpha = 90\%$

Karena nilai $\sigma_1$ dan $\sigma_2$ diketahui, serta sampel berukuran besar maka rumus yang digunakan untuk menduga selisih rata-rata daya tahan dari kedua lampu pijar adalah sebagai berikut.

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\, \sigma_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\, \sigma_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}$$

Pertama-tama dihitung terlebih dahulu nilai dari $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ dengan menggunakan tabel pada Lampiran 1. sehingga diperoleh

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645$$

Selanjutnya, dihitung nilai dari $\sigma_{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)}$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\sigma_{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)} &= \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\\ &= \sqrt{\frac{500^2}{100}+\frac{400^2}{100}}\\ &= \sqrt{4100}\\ &= 64{,}031\end{aligned}$$

Selanjutnya, dihitung pendugaan intervalnya.

$$(\bar{X}_1-\bar{X}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\,\sigma_{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)} < \mu_1-\mu_2 < (\bar{X}_1-\bar{X}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\,\sigma_{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)}$$

$$(4500-4000) - 1{,}645\ (64{,}031) < \mu_1-\mu_2 < (4500-4000) + 1{,}645\ (64{,}031)$$

$$500 - 105{,}331 < \mu_1-\mu_2 < 500 + 105{,}331$$

$$349{,}669 < \mu_1-\mu_2 < 605{,}331$$

Jadi, interval antara $349{,}669$ dan $605{,}331$ akan memuat selisih rata-rata daya tahan dari kedua lampu pijar merk baik dan ampuh dengan tingkat keyakinan 90%.

**CONTOH 4.**

Untuk mengetahui apakah ada perbedaan rata-rata gaji bulanan bagi karyawan dari dua perusahaan A dan B, maka dilakukan terhadap 9 karyawan yang dipilih secara acak sebagai sampel dari masing-masing perusahaan. hasil wawancara adalah sebagai berikut.

| Karyawan | Gaji per bulan (puluhan ribu rupiah) | |
|---|---|---|
| | Perusahaan A | Perusahaan B |
| 1 | 40 | 30 |
| 2 | 46 | 24 |
| 3 | 50 | 16 |
| 4 | 36 | 25 |
| 5 | 38 | 35 |
| 6 | 34 | 40 |
| 7 | 42 | 46 |
| 8 | 44 | 38 |
| 9 | 30 | 34 |

Buatlah pendugaan inteval dari selisih rata-rata gaji karyawan dari kedua perusahaan tersebut, dengan tingkat keyakinan sebesar 95%.

**Penyelesaian.**

Misalkan

$1$ = perusahaan A

$2$ = perusahaan B

Karena pada soal tidak diketahui rata-rata dan deviasi standar dari populasi, maka akan diduga nilai rata-rata dan deviasi standarnya dari sampel yang ada dengan menggunakan rumus yang sudah dijelaskan diatas. pertama dicari terlebih dahulu nilai rata-rata dari perusahaan A dan B. sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\bar{X}_1 &= \frac{1}{n}\sum x_i\\ &= \frac{1}{9}(40+46+50+36+38+34+42+44+30)\\ &= \frac{1}{9}(360)\\ &= 40\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\bar{X}_2 &= \frac{1}{n}\sum x_i\\ &= \frac{1}{9}(30+24+16+25+35+40+46+38+34)\\ &= \frac{1}{9}(288)\\ &= 32\end{aligned}$$

Selanjutnya dihitung nilai varians dari masing-masing sampel. sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}s_1^2 &= \frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_{i1}-\bar{X}_1)^2\\ &= \frac{1}{9-1}\begin{pmatrix}(40-40)^2+(46-40)^2+(50-40)^2+(36-40)^2+(38-40)^2\\ +(34-40)^2+(42-40)^2+(44-40)^2+(30-40)^2\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{8}(0+36+100+16+4+36+4+16+100)\\ &= \frac{1}{8}(312)\\ &= 39\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}s_2^2 &= \frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(X_{i2}-\bar{X}_2)^2\\ &= \frac{1}{9-1}\begin{pmatrix}(30-32)^2+(24-32)^2+(16-32)^2+(25-32)^2+(35-32)^2\\ +(40-32)^2+(46-32)^2+(38-32)^2+(34-32)^2\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{8}(4+64+256+49+9+64+196+36+4)\\ &= \frac{1}{8}(682)\\ &= 85{,}25\end{aligned}$$

Kemudian dihitung nilai dari deviasi standar selisih dari perusahaan A dan B dengan menggunkaan rumus sebagai berikut.

$$s_{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)} = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$
$$= \sqrt{\frac{(9-1)\,39+(9-1)85{,}25}{9+9-2}}\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}$$
$$= \sqrt{\frac{994}{16}}\sqrt{0{,}222}$$
$$= \sqrt{62{,}125}\,\sqrt{0{,}222}$$
$$= 3{,}714$$

Dari soal diketahui bahwa tingkat keyakinannya adalah 95%, artinya nilai dari $\alpha = 5\% = 0{,}05$. Nilai $t_{\frac{\alpha}{2}}$ dengan derajat kebebasan $= n_1 + n_2 - 2 = 9 + 9 - 2 = 16$ adalah 2,12.

Selanjutnya, dihitung pendugaan interval dari selisih rata-rata gaji bulanan karyawan perusahaan A dan B dengan menggunakan rumus sebagai berikut.

$$(\bar{X}_1-\bar{X}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}}\, s_{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)} < \mu_1-\mu_2 < (\bar{X}_1-\bar{X}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}}\, s_{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)}$$

$$(40-32) - 2{,}12\,(3{,}714) < \mu_1-\mu_2 < (40-32) + 2{,}12\,(3{,}714)$$

$$8 - 7{,}874 < \mu_1-\mu_2 < 8 + 7{,}874$$

$$0{,}126 < \mu_1-\mu_2 < 15{,}874$$

Jadi, interval antara $0{,}126$ dan $15{,}874$ akan memuat selisih rata-rata gaji bulanan karyawan dari perusahaan A dan perusahaan B dengan tingkat keyakinan 95%.

**PENDUGAAN INTERVAL UNTUK SATU PROPORSI**

Proporsi sampel adalah penduga tak bias terhadap proporsi populasi. jika ukuran sampel cukup besar, yaitu $nP$ maupun $n(1-P)$ lebih besar $5,$ dimana $P$ adalah proporsi populasi, maka distribusi sampling proporsi akan mendekati distribusi normal dengan rata-rata $P$ dan standar deviasi proporsi

$$\sigma = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$

dalam menghitung $\sigma$ dibutuhkan pengetahuan tentang $P$. Umumnya, $P$ tidak diketahui. sehingga nilai dari $\sigma$ diestimasi dengan $s_p$ dan $P$ diestimasi dengan $p$. sehingga

$$s_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

untuk populasi berhingga, dan

$$s_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

untuk populasi tak berhingga.

$p$ adalah penduga untuk $P$, maka ukuran sampel dikatakan cukup besar jika $np$ dan $n(1-p)$ lebih besar dari 15. Rumus untuk pendugaan proporsi populasi adalah sebagai berikut.

$$p - Z_{\frac{\alpha}{2}}\, s_p < P < p + Z_{\frac{\alpha}{2}}\, s_p$$

dengan

$p = \frac{X}{n}$ = proporsi untuk sampel
$X$ = banyaknya elemen dengan karakteristik tertentu
$n$ = banyaknya sampel
$s_p$ = standar deviasi untuk sampel
$P$ = proporsi untuk populasi

**CONTOH 5.**

Tiga puluh lima dari sampel random sebanyak 500 angkatan kerja dijumpai sedang menganggur. Buatlah interval keyakinan proporsi penganggur di daerah itu dengan menggunakan tingkat keyakinan sebesar 90%.

**Penyelesaian.**

Misalkan

$X$ = banyaknya penganggur

Diketahui.

$X = 35$

$n = 500$

$p = \frac{X}{n} = \frac{35}{500} = 0{,}07$

$\alpha = 10\% = 0{,}05$

$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645$

Pertama-tama, dihitung deviasi standar sengan menggunakan rumus

$$\begin{aligned} s_p &= \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \\ &= \sqrt{\frac{0{,}07(1-0{,}07)}{500}} \\ &= \sqrt{\frac{0{,}0651}{500}} \\ &= \sqrt{0{,}0001302} \\ &= 0{,}011 \end{aligned}$$

Selanjutnya, dihitung pendugaan interval proporsi dengan rumus

$$p - Z_{\frac{\alpha}{2}}\, s_p < P < p + Z_{\frac{\alpha}{2}}\, s_p$$

$$0{,}07 - 1{,}645\ (0{,}011) < P < 0{,}07 + 1{,}645\ (0{,}011)$$

$$0{,}07 - 0{,}018 < P < 0{,}07 + 0{,}018$$

$$0{,}052 < P < 0{,}088$$

Jadi, interval antara $0{,}052$ dan $0{,}088$ akan memuat proporsi penganggur di daerah tersebut dengan tingkat keyakinan sebesar 90%.

## PENDUGAAN INTERVAL UNTUK DUA PROPORSI

Misalkan $P_1$ dan $P_2$ adalah dua proporsi sampel dari dua populasi dengan distribusi sampling masing-masing mendekati distribusi normal, maka pendugaan interval selisih proporsi dua populasi yang merupakan sumber pengambilan sampel, dirumuskan sebagai berikut.

$$(p_1 - p_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\, s_{(p_1-p_2)} < P_1 - P_2 < (p_1 - p_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\, s_{(p_1-p_2)}$$

dengan

$$p_1 = \frac{X_1}{n_1}$$

dan

$$p_2 = \frac{X_2}{n_2}$$

serta

$$s_{(p_1-p_2)} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

Keterangan:

$P_1$ = proporsi populasi 1 dengan karakteristik tertentu
$P_1$ = proporsi populasi 2 dengan karakteristik tertentu
$p_1$ = proporsi sampel 1 dengan karakteristik tertentu
$p_2$ = proporsi elemen 2 dengan karakteristik tertentu
$X_1$ = banyaknya elemen 1 dengan karakteristik tertentu
$X_2$ = banyaknya elemen 2 dengan karakteristik tertentu
$n_1$ = banyaknya sampel 1
$n_2$ = banyaknya sampel 2
$s_{(p_1-p_2)}$ = deviasi standar selisih proporsi 1 dan 2.

**CONTOH 6.**

BKKBN melakukan penelitian di dua daerah ($D_1$ dan $D_2$) untuk mengetahui apakah ada perbedaan antara persentase penduduk yang setuju KB di daerah tersebut. kemudian akan dibuat pendugaan interval mengenai besarnya selisih / perbedaan persentase tersebut. Di daerah $D_1$ dan $D_2$ masing-masing dilakukan wawancara terhadap 120 orang, antara lain menanyakan apakah mereka setuju KB atau tidak.

Dari $D_1$ ada 90 orang dan dari $D_2$ ada 78 orang yang setuju KB. Buatlah pendugaan interval dari perbedaan persentase tentang pendapat penduduk yang setuju dengan KB di kedua daerah tersebut dengan tingkat keyakinan sebesar 90%.

**Penyelesaian.**

Misalkan

$X_1 =$ penduduk daerah $D_1$ yang setuju KB

$X_2 =$ penduduk daerah $D_2$ yang setuju KB

Diketahui

$X_1 = 90$
$X_2 = 78$
$n_1 = 120$
$n_2 = 120$
$\alpha = 10\%$
$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645$ (Lihat tabel pada Lampiran 1).
Pertama-tama, dihitung nilai dari $p_1$ dan $p_2$.

$$p_1 = \frac{X_1}{n_1} = \frac{90}{120} = 0{,}75$$

$$p_2 = \frac{X_2}{n_2} = \frac{78}{120} = 0{,}65$$

Selanjutnya, dihitung nilai standar deviasi dari selisih proporsi kedua daerah tersebut, dengan menggunakan rumus sebagai berikut.

$$s_{(p_1-p_2)} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{0{,}75(1-0{,}75)}{120} + \frac{0{,}65(1-0{,}65)}{120}}$$

$$= \sqrt{\frac{0{,}1875}{120} + \frac{0{,}2275}{120}}$$

$$= \sqrt{0{,}00156 + 0{,}00189}$$

$$= \sqrt{0{,}00345}$$

$$= 0{,}059$$

Selanjutnya dihitung pendugaan interval untuk selisih proporsi dari kedua daerah tersebut dengan menggunakan rumus berikut.

$$(p_1 - p_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\, s_{(p_1 - p_2)} < P_1 - P_2 < (p_1 - p_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\, s_{(p_1 - p_2)}$$

$$(0{,}75 - 0{,}65) - 1{,}645\ (0{,}059) < P_1 - P_2 < (0{,}75 - 0{,}65) - 1{,}645\ (0{,}059)$$

$$0{,}1 - 0{,}097 < P_1 - P_2 < 0{,}1 + 0{,}097$$

$$0{,}003 < P_1 - P_2 < 0{,}197$$

Jadi, interval antara $0{,}003$ dan $0{,}197$ akan memuat perbedaan persentase tentang pendapat penduduk yang setuju dengan KB di di daerah $D_1$ dan $D_2$ dengan tingkat keyakinan sebesar 90%.

**LATIHAN SOAL.**

1) Sebuah random sampel dipilih dari 100 pedagang kaki lima di Pasar Minggu, dari seluruh pedanga kaki lima di Pasar Minggu. Rata-rata tingkat keuntungan yang diperoleh adalah 20% dengan deviasi standar 2%. Dengan menggunakan interval kepercayaan sebesar 95%, berapa rata-rata tingkat keuntungan seluruh populasi pedangan kaki lima di Pasar Minggu?

2) Suatu penelitian dilakukan oleh sebuah perguruan tinggi swasta terhadap ketepatan pembayaran SPP dari para mahasiswanya. Dari 100 orang mahasiswa yang diteliti ternyata 30 orang mahasiswa melakukan pembayaran SPP tidak tepat waktu. Dengan tingkat interval keyakinan 95%, tentukan pendugaan interval proporsi dari mahasiswa yang melakukan pembayaran tidak tepat waktu!

3) Penelitian lain dilakukan terhadap sampel 16 orang mahasiswa asing yang berkunjung ke Jakarta. Menunjukkan pengeluaran rata-rata dari 16 mahasiswa tersebut adalah sebesar $500 seminggu, dengan standar deviasi $100. dengan tingkat keyakinan 95%, berapakah interval pengeluaran rata-rata seluruh populasi mahasiswa asing di Jakarta perminggunya?

4) Buatlah pendugaan interval rata-rata sebenarnya $\mu$ dengan tingkat keyakinan 95%, berdasarkan data berikut.
   a. $n = 15;\ \bar{X} = 42{,}55;\ \sigma = 5{,}34$
   b. $n = 8;\ \bar{X} = 12{,}74;\ \sigma = 2{,}62$
   c. $n = 25;\ \bar{X} = 1263{,}40;\ \sigma = 82{,}10$

5) Diketahui informasi dari 10 karyawan yang dipilih secara acak dari populasi karyawan dalam suatu perusahaan tentang besarnya upah (dalam ribuan rupiah sebagai berikut). 210, 215, 270, 300, 310, 320, 280, 235, 295, 310. Hitunglah pendugaan interval tentang rata-rata upah dengan tingkat keyakinan 95%.

6) Guna meningkatkan pelayanan, seorang pemimpin suatu bank mengadakan penelitian terhadap 300 nasabah. dari 300 nasabah bank tersebut, ternyata 40 orang mengatakan tidak puas. Hitunglah pendugaan interval tentang proporsi nasabah tidak puas dengan tingkat keyakinan 90%.

7) Seorang pengawasan mutu rokok dari Departemen kesehatan mengambil 10 batang rokok merk A dan 8 batang rokok merk B. Dari hasil penelitian diperoleh bahwa rata-rata nikotin rokok merk A sebesar 23,1 mg dengan simpangan baku 1,5 mg; sedangkan rokok B rata-rata nikotinnya adalah 22,7 mg dengan simpangan baku 1,7 mg. Hitunglah pendugaan interval selisih rata-rata dari kandungan nikotin yang ada pada kedua rokok tersebut dengan tingkat keyakinan 95%.

8) Seorang pejabat dari direktorat jenderal pajak mengambil sampel masyarakat wajib pajak dari kota A sebanyak 200 orang, dan masyarakat wajib pajak dari kota B sebanyak 400 orang. Dari 200 orang wajib pajak dari kota A, ternyata yang belum membayar pajak 7 orang. sedangkan dari kota B 10 orang. Hitunglah pendugaan interval selisih proporsi dari kedua kota tersebut dengan tingkat keyakinan 95%.

**Referensi:**

Mulyono, Sri. 2006. Statistika untuk Ekonomi dan Bisnis. Edisi ketiga. Jakarta: Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia.

Supranto, J. 2001. Statistik Teori dan Aplikasi. Edisi keenam Jilid 2. Jakarta: Penerbit Erlangga.

http://ueu1013.weblog.esaunggul.ac.id/wp-content/uploads/sites/256/2013/04/MINGGU-KE_XIII-XIV.pdf

https://www.slideshare.net/dansap13/pendugaan-interval

Lampiran 1. Tabel $Z$ dan $t$

# $t$ Table

| cum. prob | $t_{.50}$ | $t_{.75}$ | $t_{.80}$ | $t_{.85}$ | $t_{.90}$ | $t_{.95}$ | $t_{.975}$ | $t_{.99}$ | $t_{.995}$ | $t_{.999}$ | $t_{.9995}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| one-tail | 0.50 | 0.25 | 0.20 | 0.15 | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 | 0.001 | 0.0005 |
| two-tails | 1.00 | 0.50 | 0.40 | 0.30 | 0.20 | 0.10 | 0.05 | 0.02 | 0.01 | 0.002 | 0.001 |
| df | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0.000 | 1.000 | 1.376 | 1.963 | 3.078 | 6.314 | 12.71 | 31.82 | 63.66 | 318.31 | 636.62 |
| 2 | 0.000 | 0.816 | 1.061 | 1.386 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 | 22.327 | 31.599 |
| 3 | 0.000 | 0.765 | 0.978 | 1.250 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 | 10.215 | 12.924 |
| 4 | 0.000 | 0.741 | 0.941 | 1.190 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 | 7.173 | 8.610 |
| 5 | 0.000 | 0.727 | 0.920 | 1.156 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 | 5.893 | 6.869 |
| 6 | 0.000 | 0.718 | 0.906 | 1.134 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 | 5.208 | 5.959 |
| 7 | 0.000 | 0.711 | 0.896 | 1.119 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 | 4.785 | 5.408 |
| 8 | 0.000 | 0.706 | 0.889 | 1.108 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 | 4.501 | 5.041 |
| 9 | 0.000 | 0.703 | 0.883 | 1.100 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 | 4.297 | 4.781 |
| 10 | 0.000 | 0.700 | 0.879 | 1.093 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 | 4.144 | 4.587 |
| 11 | 0.000 | 0.697 | 0.876 | 1.088 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 | 4.025 | 4.437 |
| 12 | 0.000 | 0.695 | 0.873 | 1.083 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 | 3.930 | 4.318 |
| 13 | 0.000 | 0.694 | 0.870 | 1.079 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 | 3.852 | 4.221 |
| 14 | 0.000 | 0.692 | 0.868 | 1.076 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 | 3.787 | 4.140 |
| 15 | 0.000 | 0.691 | 0.866 | 1.074 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 | 3.733 | 4.073 |
| 16 | 0.000 | 0.690 | 0.865 | 1.071 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 | 3.686 | 4.015 |
| 17 | 0.000 | 0.689 | 0.863 | 1.069 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 | 3.646 | 3.965 |
| 18 | 0.000 | 0.688 | 0.862 | 1.067 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 | 3.610 | 3.922 |
| 19 | 0.000 | 0.688 | 0.861 | 1.066 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 | 3.579 | 3.883 |
| 20 | 0.000 | 0.687 | 0.860 | 1.064 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 | 3.552 | 3.850 |
| 21 | 0.000 | 0.686 | 0.859 | 1.063 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 | 3.527 | 3.819 |
| 22 | 0.000 | 0.686 | 0.858 | 1.061 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 | 3.505 | 3.792 |
| 23 | 0.000 | 0.685 | 0.858 | 1.060 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 | 3.485 | 3.768 |
| 24 | 0.000 | 0.685 | 0.857 | 1.059 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 | 3.467 | 3.745 |
| 25 | 0.000 | 0.684 | 0.856 | 1.058 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 | 3.450 | 3.725 |
| 26 | 0.000 | 0.684 | 0.856 | 1.058 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 | 3.435 | 3.707 |
| 27 | 0.000 | 0.684 | 0.855 | 1.057 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 | 3.421 | 3.690 |
| 28 | 0.000 | 0.683 | 0.855 | 1.056 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 | 3.408 | 3.674 |
| 29 | 0.000 | 0.683 | 0.854 | 1.055 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 | 3.396 | 3.659 |
| 30 | 0.000 | 0.683 | 0.854 | 1.055 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 | 3.385 | 3.646 |
| 40 | 0.000 | 0.681 | 0.851 | 1.050 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 | 3.307 | 3.551 |
| 60 | 0.000 | 0.679 | 0.848 | 1.045 | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 | 3.232 | 3.460 |
| 80 | 0.000 | 0.678 | 0.846 | 1.043 | 1.292 | 1.664 | 1.990 | 2.374 | 2.639 | 3.195 | 3.416 |
| 100 | 0.000 | 0.677 | 0.845 | 1.042 | 1.290 | 1.660 | 1.984 | 2.364 | 2.626 | 3.174 | 3.390 |
| 1000 | 0.000 | 0.675 | 0.842 | 1.037 | 1.282 | 1.646 | 1.962 | 2.330 | 2.581 | 3.098 | 3.300 |
| z | 0.000 | 0.674 | 0.842 | 1.036 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 | 3.090 | 3.291 |
| | 0% | 50% | 60% | 70% | 80% | 90% | 95% | 98% | 99% | 99.8% | 99.9% |
| | Confidence Level | | | | | | | | | | |