MODUL ONLINE 3
ESA143 - MATEMATIKA

Materi 4

LIMIT & FUNGSI

Disusun Oleh
TEAM DOSEN

Universitas
Esa Unggul

LIMIT FUNGSI

A. DEFINISI

Limit fungsi untuk mendekati *a*

- Definisi :

  Suatu fungsi *f(x)* didefinisikan untuk *x* mendekati *a*, maka :

  $Lim\ f(x) = L$

  Jika $x \rightarrow a$ maka

  $\underset{x\rightarrow a^-}{Lim}\ f(x) = \underset{x\rightarrow a^+}{Lim}\ f(x)$

Definisi Intuitif

Misalkan *y=f(x)* suatu fungsi, *a* dan L bilangan riil

sedemikian hingga:

- Bila *x* dekat *a* tetapi tidak sama dg *a* ($x \neq a$), *f*(*x*) dekat ke L
- Bila *x* mendekati *a* tetapi $x \neq a$, maka *f(x)* mendekati L
- Misalkan *f(x)* dapat kita buat sedekat mungkin ke L dg membuat *x* cukup dekat *a* tetapi tdk sama dg a
- Maka dapat dikatakan bhw limit *f*(*x*) bila *x* mendekati *a* adalah L,

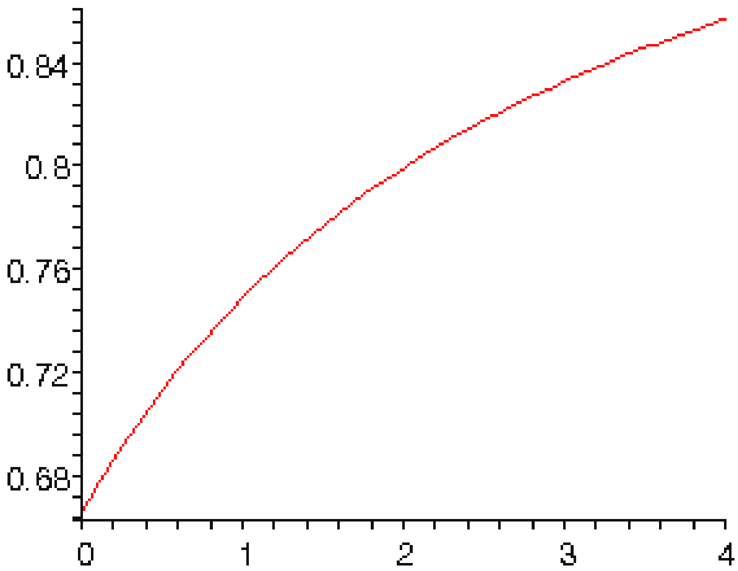
$$\lim_{x\rightarrow a} f(x) = L$$

Contoh :

$$\lim_{x\rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2+x-6} = \frac{4}{5}$$

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1	0.75	3	0.83333
1.5	0.7778	2.5	0.81818
1.9	0.7959	2.1	0.80392
1.999	0.79996	2.001	0.80004
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
2	0.8	2	0.8

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+x-6}$$



- Menentukan limit fungsi

1. Metode Substitusi Langsung

   Contoh :

   $$\lim_{x\to 1}\sqrt{10+x}=\sqrt{11}$$

2. Memfaktorkan

   Contoh :

   1) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{1}=1$

   2) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+9x-10}{x-1}$

   $$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)(x+10)}{(x-1)}=\lim_{x\to 0}x+10=1+10=11$$

3. Mengalikan dengan Sekawan

   Contoh :

   1) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+7}-4}$

   $$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+7}-4}\times\frac{\sqrt{x^2+7}+4}{\sqrt{x^2+7}+4}$$

   $$=\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-9)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}{x^2+7-16}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{\left(x^2-9\right)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}{\left(x^2-9\right)} = \lim_{x\to 3} \sqrt{x^2+7}+4$$

$$= \sqrt{9+7}+4 = 4+4 = 8$$

B. Limit Kiri dan Limit Kanan

- Limit kiri (limit *f(x)* bila *x* menuju *a* dari kiri)

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

- Limit kanan (limit *f(x)* bila *x* menuju *a* dari kanan)

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

- <u>Teorema</u> :

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

jika dan hanya jika

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

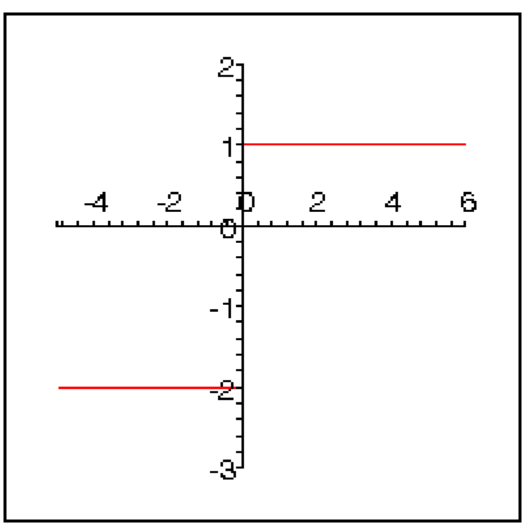
Contoh :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -2, & x < 0 \end{cases} .$$

Untuk $x > 0$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} 1 = 1.$ **limit kanan**.

Untuk $x < 0$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} (-2) = -2.$ **limit kiri**.

Maka $\lim_{x\to 0} f(x)$ tidak ada



C. Teorema Limit

1. $f(x) = k \rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = k$

   untuk k dan $a \in R$

   k = konstanta

2. $f(x) = x \rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = a$

3. a. $\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

b. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)-\lim\limits_{x\to a} g(x)$

4. Jika k = konstanta, $\lim\limits_{x\to a} k\cdot f(x)=k\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$

5. a. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

   b. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

6. a. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^n$

   b. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

   dengan $\lim\limits_{x\leftarrow a} f(x)\geq 0$ untuk n genap

Bentuk Tak Tentu

Bentuk di dalam matematika ada 3 macam, yaitu :

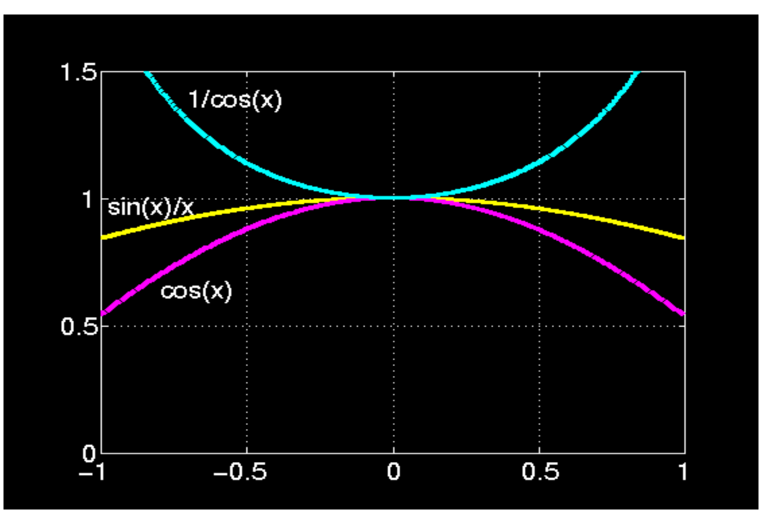
1. ***Bentuk terdefinisi*** (tertentu) : yaitu bentuk yang nilainya ada dan tertentu, misalnya : $\frac{6}{3}, \frac{0}{4}$.
2. ***Bentuk tak terdefinisi*** : yaitu bentuk yang tidak mempunyai nilai, misalnya : $\frac{5}{0}$
3. ***Bentuk tak tentu*** : yaitu bentuk yang nilainya sembarang, misalnya : $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 1^\infty$

Penting : Persoalan limit adalah mengubah ***bentuk tak tentuk*** menjadi ***bentuk tertentu***.

D. Limit Fungri Trigonometri

cos(x) ≤ sin(x)/x ≤ 1/cos(x)

$$\lim_{x\to 0}\cos(x)=1=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)},\quad \text{maka}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$



- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\text{tg } x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{ax} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ax}{\sin ax} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg } ax}{ax} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ax}{\text{tg } x} = 1$

Contoh :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg } 6x}{5x} = \dfrac{Lim}{x \to 0} \dfrac{\text{tg } 6x}{6x} \cdot \dfrac{6}{5} = 1 \cdot \dfrac{6}{5} = \dfrac{6}{5}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ux}{\text{tg} 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{4x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\text{tg } 3x} \cdot \dfrac{4}{3}$

   $= 1 \cdot 1 \cdot \dfrac{4}{3} = \dfrac{4}{3}$

Soal Limit Fungsi

1. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \ldots.$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 3x} = \ldots.$
3. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3x+2}{x-3} = \ldots.$
4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \ldots.$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9x^2+x}-\sqrt{9x^2-x}}{x} = \ldots.$
6. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2+2}{3x^3+x-4} = \ldots.$
7. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 2, \lim\limits_{x\to a} g(x) = -1$

   $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{4f(x)-2g(x)}{f(x)+g(x)} = \ldots.$
8. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x^2+4x-8}{x^2-4x+4} = \ldots.$
9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 8x}{5x} = \ldots.$

10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 6x}{\tan 3x} = ...$

E. Kontinuitas dan Diskontinuitas Fungsi

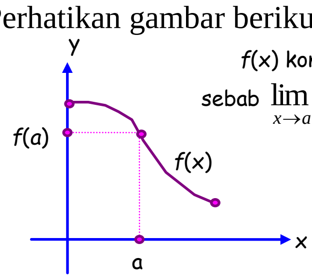
Definisi : Fungsi *f*(x) dikatakan kontinu (sinambung) di x = a jika dan hanya jika $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Dari definisi terlihat ada tiga syarat fungsi *f*(x) kontinu di x = a, yaitu :

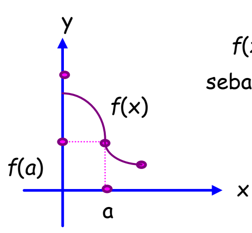
1. *f*(a) terdefinisi (ada)
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ terdefinisi ada
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Apabila satu di antara ketiga syarat itu tidak dipenuhi, maka fungsi *f*(x) diskontinu (tak sinambung) di x =a.

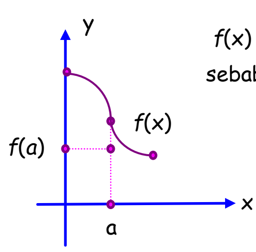
Perhatikan gambar berikut :

1.


f(x) kontinu di x = a,
sebab $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

2.


f(x) diskontinu di x = a,
sebab $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ tidak ada

3.


f(x) diskontinu di x = a,
sebab $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

Contoh :

1. Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = x^2 + x - 3$ kontinu di $x = 1$

   Jawab : 1) $f(1) = 1^2 + 1 - 3 = -1 \longrightarrow$ *f*(1) terdefinisi

   2) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \left(x^2 + x - 3\right) = 1^2 + 1 - 3 = -1 \longrightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x)$ terdefinisi

   3) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$ Jadi fungsi $f(x) = x^2 + x - 3$ kontinu di x =1.

2. Selidiki apakah fungsi $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ kontinu di x = 3

   Jawab : 1) $f(3) = \frac{3^2 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0}$ (tidak terdefinisi)

   Karena *f*(3) tak terdefinisi, maka *f*(x) diskontinu di x = 3

3. Selidiki apakah fungsi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{untuk } x \neq 2 \\ 4, & \text{untuk } x = 2 \end{cases}$$ kontinu di x = 2

Jawab : 1) $f(1) = 4$ (terdefinisi)

2) $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \left(x^2 + x + 1\right) = 1^2 + 1 + 1 = 3$

(terdefinisi)

3) $\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$, berarti f(x) diskontinu di x = 1