



www.esaunggul.ac.id

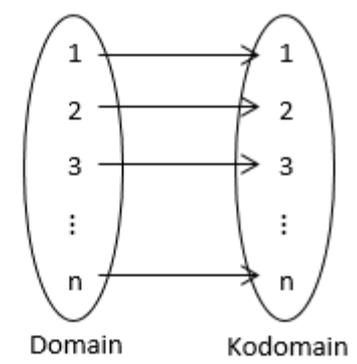
BARISAN & DERET PERTEMUAN 4

KEMAMPUAN AKHIR YANG DIHARAPKAN

Mahasiswa mampu untuk menganalisis serta menerapkan konsep barisan dan deret matematika

Definisi Barisan dan Deret

Barisan merupakan urutan dari suatu anggota-anggota himpunan berdasarkan suatu aturan tertentu. Setiap anggota himpunan diurutkan pada urutan/suku pertama, kedua, dan seterusnya. Untuk menyatakan urutan/suku ke-n dari suatu barisan dinotasikan U_n . Barisan juga dapat didefinisikan sebagai fungsi dari bilangan asli atau fungsi yang domainnya himpunan bilangan asli. Sehingga, $U_n = f(n)$



Misalkan $U_n = (2n + 1)$, maka suku ke-4 dari baris tersebut adalah $U_4 = (2(4) + 1) = 9$.

Penjumlahan suku-suku dari suatu barisan disebut deret. Penjumlahan suku-suku tersebut bisa dibuat dalam bentuk sigma. Barisan dari suku U_1, U_2, U_3, \dots U_n yang dinyatakan dalam fungsi $f(n) = U_n$ $f(n) = U_n$

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n = \sum_{i=1}^n U_i$$

Barisan Aritmetika

- Definisi

Barisan aritmetika adalah suatu barisan bilangan yang selisih setiap dua suku berturutan selalu merupakan bilangan tetap (*konstan*)

- Bilangan yang tetap tersebut disebut *beda* dan dilambangkan dengan *b*
- Perhatikan juga barisan-barisan bilangan berikut ini :

a. 1, 4, 7, 10, 13, ...

b. 2, 8, 14, 20, ...

c. 30, 25, 20, 15, ...



Barisan
Aritmetika

Baris aritmatika merupakan baris yang nilai setiap sukunya didapatkan dari suku sebelumnya melalui penjumlahan atau pengurangan dengan suatu bilangan b . Selisih antara nilai suku-suku yang berdekatan selalu sama yaitu b . Sehingga: $U_n - U_{(n-1)} = b$

Contoh :

a. $1, 4, 7, 10, 13, \dots$

$\underbrace{\quad}_{+3} \quad \underbrace{\quad}_{+3} \quad \underbrace{\quad}_{+3} \quad \underbrace{\quad}_{+3}$

Pada barisan ini, suku berikutnya diperoleh dari suku sebelumnya ditambah 3. Dapat dikatakan bahwa beda sukunya 3 atau $b = 3$

b. $2, 8, 14, 20, \dots$

$\underbrace{\quad}_{+6} \quad \underbrace{\quad}_{+6} \quad \underbrace{\quad}_{+6}$

Pada barisan ini, suku berikutnya diperoleh dari suku sebelumnya ditambah 6. Dapat dikatakan bahwa beda sukunya 6 atau $b = 6$

c. 30, 25, 20, 15, ...

$\underbrace{-5} \quad \underbrace{-5} \quad \underbrace{-5}$

Pada barisan ini, suku berikutnya diperoleh dari suku sebelumnya ditambah -5 . Dapat dikatakan bahwa beda sukunya -5 atau $b = -5$

Secara umum dapat dikatakan sebagai berikut

Jika U_n adalah suku ke- n dari suatu barisan aritmetika maka berlaku

$$b = U_n - U_{n-1}$$

Rumus umum suku ke- n barisan aritmetika dengan suku pertama (U) dilambangkan dengan a dan beda dengan b dapat ditentukan seperti berikut

$$U_1 = a$$

$$U_2 = U_1 + b = a + b$$

$$U_3 = U_2 + b = (a + b) + b = a + 2b$$

$$U_4 = U_3 + b = (a + 2b) + b = a + 3b$$

$$U_5 = U_4 + b = (a + 3b) + b = a + 4b$$

.
. .
.

$$U_n = U_{n-1} + b = a + (n - 1)b$$

Jadi, rumus suku ke-n dari barisan aritmetika adalah

Keterangan: $U_n =$ suku ke-n

$a =$ suku pertama

$b =$ beda

$n =$ banyak suku

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Contoh 1 :

Tentukan suku ke-8 dan ke-20 dari barisan -3, 2, 7, 12,

Jawab:

-3, 2, 7, 12, ...

Suku pertama adalah $a = -3$ dan bedanya $b = 2 - (-3) = 5$

Dengan menyubstitusikan a dan b , diperoleh :

$$U_n = -3 + (n - 1)5$$

$$\text{Suku ke-8 : } U_8 = -3 + (8 - 1)5 = 32$$

$$\text{Suku ke-20 : } U_{20} = -3 + (20 - 1)5 = 92$$

Contoh 2 :

Diketahui barisan aritmetika $-2, 1, 4, 7, \dots, 40$. Tentukan banyak suku barisan tersebut

Jawab:

Diketahui barisan aritmetika $-2, 1, 4, 7, \dots, 40$.

Dari barisan tersebut, diperoleh $a = -2$, $b = 1 - (-2) = 3$, dan

$$U_n = 40$$

Rumus suku ke- n adalah $U_n = a + (n - 1)b$ sehingga:

$$40 = -2 + (n - 1)3$$

$$40 = 3n - 5$$

$$3n = 45$$

Karena $3n = 45$, diperoleh $n = 15$

Jadi, banyaknya suku dari barisan di atas adalah 15

B. Deret Aritmetika

- **Definisi**

Misalkan $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ merupakan suku-suku dari suatu barisan aritmetika. $D_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$ disebut *deret aritmetika*, dengan $U_n = a + (n - 1)b$

- Deret aritmetika adalah jumlah n suku pertama barisan aritmetika. Jumlah n suku pertama dari suatu barisan bilangan dinotasikan D

Dengan demikian, $D_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$.
Untuk memahami langkah-langkah menentukan rumus D_n , perhatikan contoh berikut :

Contoh 1 :

Diketahui suatu barisan aritmetika 2, 5, 8, 11, 14.
Tentukan jumlah kelima suku barisan tersebut

Jawab:

Jumlah kelima suku 2, 5, 8, 11, 14 dapat
dituliskan :

$$D_5 = 2 + 5 + 8 + 11 + 14$$

$$D_5 = 14 + 11 + 8 + 5 + 2$$

$$\begin{array}{r} \hline 2D_5 = 16 + 16 + 16 + 16 + 16 \\ 2D_5 = 5 \times 16 \end{array} +$$

$$D_5 = \frac{5 \times 16}{2} \iff D_5 = 40$$

Jadi, jumlah kelima suku barisan tersebut adalah 40

Menentukan rumus umum untuk D sebagai berikut :
Diketahui rumus umum suku ke- n dari barisan aritmetika adalah

$$D_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_{n-2} + U_{n-1} + U_n$$

Dapat dinyatakan bahwa besar setiap suku adalah b kurang dari suku berikutnya.

$$U_{n-1} = U_n - b$$

$$U_{n-2} = U_{n-1} - b = U_n - 2b$$

$$U_{n-3} = U_{n-2} - b = U_n - 3b$$

Demikian seterusnya sehingga D_n dapat dituliskan

$$D_n = a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + (U_n - 2b) + (U_n - b) + U_n \dots (1)$$

Persamaan 1 dapat ditulis dengan urutan terbalik sebagai berikut:

$$D_n = U_n + (U_n - b) + (U_n - 2b) + \dots + (a + 2b) + (a + b) + a \dots (2)$$

Jumlahkan Persamaan (1) dan (2) didapatkan

$$D_n = a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + (U_n - 2b) + (U_n - b) + U_n$$

$$D_n = U_n + (U_n - b) + (U_n - 2b) + \dots + (a + 2b) + (a + b) + a$$

$$2D_n = (a + U_n) + (a + U_n) + (a + U_n) + \dots + (a + U_n)$$

n suku

Dengan demikian, $2D_n = n(a + U_n)$

$$D_n = (1/2) n(a + U_n)$$

$$D_n = (1/2) n(a + (a + (n - 1)b))$$

$$D_n = (1/2) n(2a + (n - 1)b)$$

Jadi, rumus umum jumlah n suku pertama deret aritmetika adalah

$$D_n = (1/2) n(a + U_n)$$

$$D_n = (1/2) n(2a + (n - 1)b)$$

Keterangan:

D_n = jumlah n suku pertama

a = suku pertama

b = beda

U_n = suku ke- n

n = banyak suku

Contoh 2:

Carilah jumlah 100 suku pertama dari deret $2 + 4 + 6 + 8 + \dots$

Jawab:

Diketahui bahwa $a = 2$, $b = 4 - 2 = 2$, dan $n = 100$.

$$\begin{aligned}D_{100} &= \frac{1}{2} \times 100 \{2(2) + (100 - 1)2\} \\ &= 50 \{4 + 198\} \\ &= 50 (202) \\ &= 10.100\end{aligned}$$

Jadi, jumlah 100 suku pertama dari deret tersebut adalah 10.100

Contoh 3:

Hitunglah jumlah semua bilangan asli kelipatan 3 yang kurang dari 100

Jawab:

Bilangan asli kelipatan 3 yang kurang dari 100 adalah 3, 6, 9, 12, ..., 99 sehingga diperoleh

$a = 3$, $b = 3$, dan $U_n = 99$

Terlebih dahulu kita cari n sebagai berikut :

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$99 = 3 + (n - 1)3$$

$$3n = 99$$

$$n = 33$$

Jumlah dari deret tersebut adalah

$$D_n = \frac{1}{2} n (a + U_n)$$

$$\begin{aligned} D_{33} &= \frac{1}{2} \times 33(3 + 99) \\ &= 1.683 \end{aligned}$$

Jadi, jumlah bilangan asli kelipatan 3 yang kurang dari 100 adalah 1.683

Barisan dan Deret Geometri

Barisan Geometri adalah susunan bilangan yang dibentuk menurut urutan tertentu, di mana susunan bilangan di antara dua suku yang berurutan mempunyai rasio yang tetap (dilambangkan dengan huruf r)

Jika a_1 adalah suku pertama dan r adalah rasio yang tetap, maka suku ke 2 dan seterusnya adalah

$$a_2 = a_1 r$$

$$a_3 = a_2 r = a_1 r^2$$

$$a_4 = a_3 r = a_1 r^3$$

Sehingga bentuk umum dari barisan geometri untuk suku ke-n adalah :

$$a_n = a_1 r^{n-1} \text{ atau } S_n = a_1 r^{n-1}$$

Di mana

- $a_n = S_n$ = suku ke - n
- a_1 = suku pertama
- r = rasio yang tetap
- n = banyaknya suku

Contoh

Carilah suku ke delapan dari barisan geometri di mana suku pertama adalah 16 dan rasionya adalah 2

Jawab:

Diketahui : $a_1 = 16$, $r = 2$, $n = 8$

Ditanyakan $S_8 = \dots?$

$$S_8 = a_1 r^{8-1} = a_1 r^7 = 16(2)^7 = 2048$$

Contoh

Carilah suku ke – 11 dalam suatu barisan geometri di mana suku ke -4 adalah 24 dan suku ke-9 adalah 768

Jawab

$$a_4 = S_4 = a_1 r^3 = 24$$

$$a_9 = S_9 = a_1 r^8 = 768$$

$$\text{Jadi } \frac{a_1 r^8}{a_1 r^3} = \frac{768}{24} = 32 = r^5$$

$$r = 2$$

$$\text{Karena } a_1 r^3 = 24 \text{ dan } r = 2 \rightarrow a_1 = 3$$

$$\text{Sehingga } a_{11} = S_{11} = a_1 r^{10} = 3(2)^{10} = 3072$$

Deret Geometri

Adalah jumlah dari suku – suku atau bilangan – bilangan dalam suatu barisan geometri.

Bentuk deret geometri

$$D_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + \dots + a_1r^{n-1} \dots (1)$$

Atau dapat ditulis secara singkat

$$D_n = \sum_{i=1}^n a_1 r^{i-1}$$

Untuk mendapatkan rumus D_n

Kalikan persamaan (1) dengan r

$$rD_n = a_1r + a_1r^2 + \dots + a_1r^{n-1} + a_1r^n \dots (2)$$

$$D_n - rD_n = a_1 - a_1r^n$$

$$D_n(1 - r) = a_1(1 - r^n) \rightarrow D_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{(1 - r)}$$

Rumus Deret Geometri

Jika $r < 1$

$$D_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{(1 - r)}$$

Jika $r > 1$

$$D_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{(r - 1)}$$

Jika $r = 1$

$$D_n = a_1 + a_1 + \dots + a_1$$

$$D_n = na_1$$

Contoh

Carilah jumlah suku ke-8 yang pertama dari barisan geometri berikut ini :

3, 6, 12, 24, ...

Penyelesaian :

Diketahui $a_1 = 3$; $r = 2$; dan $n = 8$

$$\text{Maka } D_8 = \frac{3(1-2^8)}{(1-2)} = 765$$

TERIMAKASIH