S1-MATEMATIKA

BAHAN 3

HUBUNGAN DAN FUNGSI

Penerapan Fungsi dalam ekonomi dan bisnis merupakan salah satu bagian yang sangat penting untuk dipelajari. Sebab dengan Fungsi dalam ekonomi dan bisnis dapat digunakan dan diaplikasikan untuk memecahkan masalah- masalah matematis dalam ekonomi, salah satunya untuk membuat kurva permintaan untuk memepermudah penggambaran situasi/ keadaan ekonomi. Selain itu, model-model ekonomi yang berbentuk matemtika biasanya dinyatakan dalam bentuk Fungsi, serta fungsi merupakan dasar untuk mempelajari mengenai konsep limit dan aljabar kalkulus (derivatif fungsi, Integral, dll). Fungsi yang digunakan dalam ekonomi dan bisnis ada beberapa jenisnya, dapat digolongkan dari jumlah variable bebasnya, letak variable bebasnya dan berdasarkan bentuknya.

Fungsi dalam ekonomi dan bisnis diartikan sebagai berikut Fungsi merupakan suatu persamaan yang menunjukkan hubungan di antara dua variabel atau lebih yang nilainya saling tergantung. Contoh hubungan di antara variabel ekonomi, antara lain 1) Hubungan antara konsumsi keluarga (C) dengan pendapatannya (Y), bentuk fungsinya yaitu C = f(Y) (Fungsi Konsumsi), 2)Hubungan antara jumlah barang yang diminta (Q) dengan harga barang tersebut (P) bentuk fungsinya yaitu Q = f(P) (Fungsi Permintaan).

Set urut (himpunan) merupakan set yang urutan anggotanya tertentu dan letaknya tidak boleh ditukar. Set urut dapat beranggotakan 2 atau lebih. Contoh dari set urut yaitu sebagai berikut :

a. Set urut dengan 3 anggota , misalnya predikat dari suatu perlombaan/ kompetisi yang anggotanya disusun secara berurutan.
   Set urut A (a, b, c). a menunjukan predikat pertama; b menunjukan predikat kedua; c menunjukan predikat ketiga. Susunan/ urutan dari set tidak boleh ditukar/ diacak posisinya.

b. Set urut dengan 2 anggota

   Set urut B : B (X,Y)

   Set Urut dari suatu Titik Koordinat (absis dan ordinat).

   Contoh Set urut B : (2,3)

absis=2 dan ordinat =3 tidak boleh ditukar posisinya, karena absis berada pada sumbu x, sedangkan ordinat berada pada sumbu y. jika ditukar maka, letak titik koordinat akan berubah.

Set urut yang beranggota dua disebut pasangan urut. Titik Koordinat tertentu yang terdiri dari absis dan ordinat, merupakan contoh dari pasangan urut.

Relasi adalah himpunan dari pasangan urut (titik-titik koordinat) dengan batasan tertentu. Hubungan (relasi) adalah suatu set (himpunan) dari pasangan urut (pasangan bersusun).Contoh (1): Set A = (X, Y) ; pasangan urut harga (X) dan kuantitas (Y). Pasangan urut A1 (X_1, Y_1) adalah: A1 = (20,80) dan pasangan urut A2 (X_2,Y_2) adalah: A2 = (30,120) Sehingga relasi ditulis: Z = [(20,80); (30,120)], Contoh (2): Set B = (X, Y) Pasangan urut titik koordinat Pasangan Urut : B1 (0,1) Pasangan Urut ; B2 (2,3) Pasangan Urut : B3 (3,4). Sehingga relasi ditulis : Z = [(0,1), (2,3), (3,4)]

Secara umum relasi dapat ditulis:

$Z = [(x,y) \mid x \in X \text{ dan } y \in Y]$

x : unsur pertama pasangan urut (absis)

y : unsur kedua pasangan urut (ordinat).

X : Himpunan dari seluruh unsur pertama (Domain/ absis)

Y : Himpunan dari seluruh unsur kedua (Range/ ordinat).

Contoh dari Relasi :

a. $Z = [(x,y) \mid y \leq x ; \ x = 1 \text{ dan } -3 \leq y \leq 1]$

Fungsinya adalah $y \leq x$

Daerah himpunan x : x=1 anggota x(1)

Daerah himpunan y : $-3 \leq y \leq 1$anggota y (-3,-2,-1,0,1)

Relasinya, Z=[(1,-3),(1,-2), (1,-1), (1,0), (1,1)]

b. $Z = [(x,y) \mid Y = 2X; \ 0 \leq X \leq 2]$

Fungsinya adalah Y = 2X

Daerah himpunan x : $0 \leq X \leq 2$ anggota x(0,1,2)

Daerah himpunan y : dengan memasukkan nilai dari himpunan x anggota y (0,2,4)

Relasinya, Z=[(0,0),(1,2), (2,4)]

Pengertian Fungsi Dari Segi Teori Set yaitu Fungsi adalah himpunan dari pasangan urut yang tidak memiliki pasangan urut dengan unsur pertama yang sama. Secara Umum , Fungsi adalah persamaan yang terdiri dari dua variabel atau lebih yang nilainya saling tergantung. Jenis fungsi (ditinjau dari segi bentuk gambar/ kurvanya) yang lazim diterapkan dalam ekonomi dan bisnis antara lain:

a. Fungsi Linier

Fungsi linier adalah fungsi yang dalam penggambarannya dalam grafik/ kurvanya akan berbentuk linier atau garis lurus, fungsi linier hanya memiliki satu variable bebas. Salah satu contoh dari Fungsi Linier adalah Fungsi Permintaan yang memiliki variable dianggap tetap atau konstan (ceteris paribus). Bentuk umum $y=ax+b$; $a\neq0$

b. Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadrat adalah fungsi yang meiliki dua atau lebih variable bebas dengan salah satu variabelnya berpangkat 2 (kuadrat). Bentuk gambar kurvanya yaitu berbentuk parabola, lingkaran, elips dan hiperbola. Bentuk umum fungsi kuadrat parabola $Y = aX^2 + bX + c$; $a\neq0$

c. Fungsi Kubik

Fungsi Kubik adalah fungsi yang meiliki dua variable bebas dengan salah satu variabelnya berpangkat 3. Bentuk umum $Y = aX^3 + bX^2 + cx+d$; $a\neq0$

d. Fungsi Logaritma

Fungsi Logaritma adalah fungsi yang menggunakan operasi perhitngan logaritma

Bentuk umum $Y = {}^{a}\text{Log } X$; $(a \neq 0)$

e. Fungsi Eksponen

$Y = a.b^X + c$; $(a \neq 0)$

Fungsi linier yang paling lazim dan sering digunakan adalah fungsi untuk menggambarkan kurva permintaan. Fungsi permintaan akan membentuk kurva linier apabila diasumsikan bahwa variable bebasnya tetap dan konstan (ceteris paribus). Dalam keadaan konstan, fungsi permintaan hanya dipengaruhi oleh factor harga (P) serta jumlah permintaan (Q). apabila harga dan jumlah permintaan mengalami perubahan maka kurva fungsi permintaan akan mengalami pergeseran (Shifting). Dalam duni ekonomi yang nyata permintaan akan dipengaruhi oleh factor selain harga dan jumlah permintaan, factor tersebut antara lain pendapatan, harga barang lain yang berkaitan, selera (taste).

Contoh fungsi permintaan (D) :

Popo membeli baju dengan harga harga yang ditawarkan penjual sejumlah tertentu.

Harga ($)	quantiti
1	8
2	6
3	4
4	2
5	0

Bahan 3.1.

GARIS (LINES) DAN TITIK (POINTS) ,
PASANGAN BERURUTAN (ORDERED PAIRS),
KUADRAN (HYPERPLANES) SERTA TITIK (POINTS)

A. GARIS (LINES) DAN BILANGAN RIIL (THE REAL NUMBERS)

1. Atas dasar Bahan 2.1 sebelumnya, setiap garis lurus (the real line) menyatakan :

   a. Himpunan semua bilangan riil (dengan notasi R) – the set of all real numbers, karena garis lurus memuat semua bilangan riil (the real numbers) yang terdiri dari :
      - ☑ Bilangan rasional (rasional numbers) yang terdiri dari :
        - ✪ Bilangan bulat (integers)
        - ✪ Bilangan pecahan (fractions).
      - ☑ Bilangan irasional (irrational numbers).

   b. Suatu variabel, karena variabel adalah sesuatu yang dapat dinyatakan dengan angka atau nilai dari bilangan riil.

2. Setiap bilangan riil merupakan titik di atas garis lurus (the real line).

B. PASANGAN BERURUTAN (ORDERED PAIRS)

1. Pasangan tidak berurutan (unordered pairs)

Set $\{a, b\} = \{b, a\}$ → merupakan dua set yang sama karena mempunyai elemen yang sama (atas dasar Bahan 2.5. sebelumnya tentang sets), tetapi tanpa memperdulikan

kesamaan urutan atau order elemen masing-masing set.

Pasangan elemen setiap set itu disebut pasangan variabel yang tidak berurutan (**unordered pairs**).

2. Pasangan berurutan (ordered pairs)

Set {a, b} ≠ {b, a} → merupakan dua set yang tidak sama (walaupun memiliki elemen yang sama), karena urutan atau order elemen masing-masing set tidak sama, kecuali apabila a = b.

Pasangan elemen pada setiap elemen itu disebut pasangan variabel yang berurutan (**ordered pairs**).

3. Contoh :

- ☑ Menyebut anggota dalam suatu pertandinagan tanpa urutan (unordered pairs). Tetapi menyebut pemenang 1, 2, dan seterusnya harus berurutan (ordered pairs).
- ☑ Untuk set dengan elemen ordered pair, dimana elemen pertama untuk umur dan elemen kedua untuk berat, tentu akan beda antara set {45, 60} dan {60, 45}.
- ☑ Pasangan bilangan (koordinat) pada 4 kuadran atau disebut the Cartesian Product.

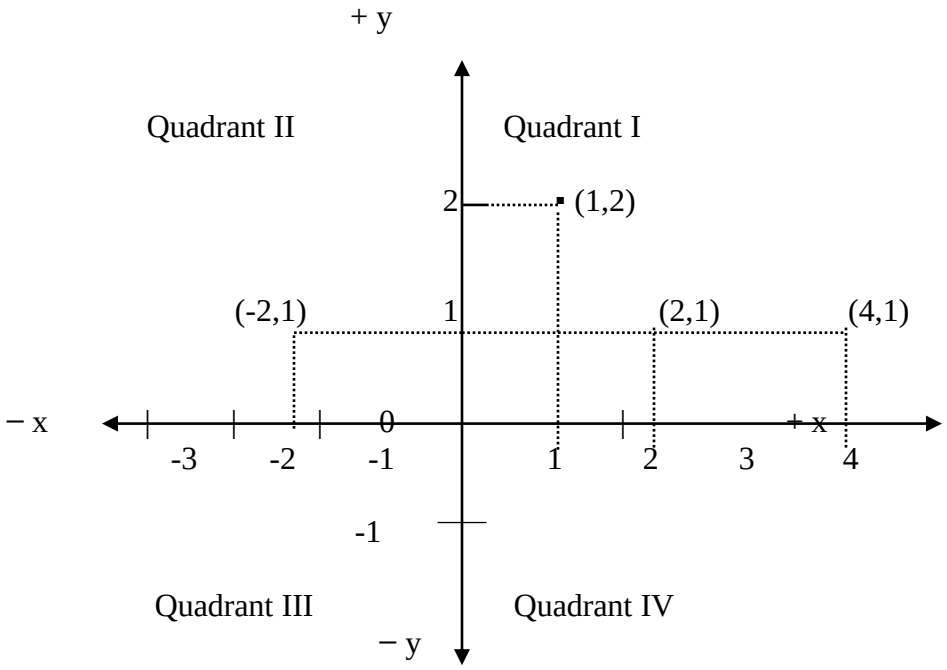
Catatan : Pengertian ordered pairs dan unordered pairs di atas, juga berlaku untuk elemen set lebih dari dua variabel, yaitu dengan sebutan ordered and unordered triples (3 elemen), quadruples (4 elemen), quintuples (5 elemen), dan seterusnya.

C. ORDERED PAIRS PADA KUADRAN (THE XY PLANE)

Dua variabel, misal variabel x dan y, yang dinyatakan oleh dua garis lurus atau sumbu yang berpotongan, yaitu sumbu/garis horizontal untuk variabel x dan sumbu vertikal untuk variabel y, menciptakan (lihat Diagram 3.1.1. di bawah) :

1. 4 (empat) kuadran (quadrant) I, II, III, IV, atau disebut *the xy plane*, dimana :
   - ☑ Kuadran I dimana terdapat jumlah tak terbatas dari ordered pairs dengan urutan +x (angka x positif) dan +y (angka y positif).
2. Kuadran II dimana terdapat jumlah tak terbatas dari ordered pairs dengan urutan −x (angka x negatif) dan +y.

Diagram 3.1.1
THE (COORDINATE) XY PLANE ATAU
THE CARTESIAN PRODUCT



- ☑ Kuadran III dimana terdapat jumlah tak terbatas dari ordered pairs dengan urutan −x dan −y (angka y negatif).
- ☑ Kuadran IV dimana terdapat jumlah tak terbatas dari ordered pairs dengan urutan +x dan −y.

3. Titik-titik kombinasi dari titik x pada sumbu/garis x dan titik y pada sumbu/garis y secara berurutan, disebut *the xy ordered pairs*.
   Misal, titik kombinasi atau the xy ordered pair (2,4) berbeda dengan the xy ordered pair (4,2).

4. **Himpunan ordered pairs (the set of all ordered pairs) pada kuadran (the xy plane atau the rectangular coordinate plane atau disebut the Cartesian product) bersifat tak terbatas.**

   Set ordered pairs pada kuadran atau the plane itu disebut *the Cartesian product (named after Descartes)*.
   The Cartesian product juga disebut *direct product*, karena elemennya berupa ordered pairs yang merupakan produk dari set x dan set y (dengan notasi x ***** y, atau (x, y)), dimana set x dan y adalah set dari bilangan riil,
   Dengan kata lain, setiap set pada the Cartesian product merupakan ordered pairs, dengan elemen pertama dari variabel x dan elemen kedua dari variabel y, atau ditulis (x, y). Oleh karena itu, orderd pair (1, 2) beda dengan (2, 1).

Produk dari set x dan set y dimaksud mempunyai jumlah yang tak terbatas, sehingga the Cartesian product atau the xy plane itu merupakan suatu set bersifat tak terbatas dari ordered pair atau titik pada kuadran (an infinite set of points or ordered pairs).

Notasi dari the Cartesian product sebagai berikut :

☑ The Cartesian product dengan set (ordered pairs) atau titik pada kuadran yang memiliki 2 elemen (2 dimensi) dari set x dan set y, mempunyai notasi the Cartesian product adalah **R * R** atau $\mathbf{R^2}$ **:**

x * y = {(1, 2), (2, 1), (4, 1)}
atau

x * y = {a, b) | a ∈ x dan b ∈ y}
dimana a dan b adalah elemen dari bilangan riil (real numbers) yang diberi notasi R, sehingga lebih umum lagi menjadi

x * y = {a, b) | a ∈ R dan b ∈ R}
dimana x dan y adalah set dari R

☑ The Cartesian product dengan set (ordered pairs) atau titik yang memiliki 3 elemen (3 dimensi) dari sumbu x, sumbu y dan sumbu z, mempunyai notasi the Cartesian product adalah **R * R * R** atau $\mathbf{R^3}$ **:**

x * y * z = {a, b) | a ∈ x, b ∈ y, c ∈ z}
atau

x * y * z = {a, b) | a ∈ R, b ∈ R, c ∈ R}

☑ The Cartesian product dengan ordered pairs atau titik pada kuadran dengan n elemen (n dimensi) mempunyai notasi R^n.

Bahan 3.2.

HUBUNGAN (RELATIONS) DAN FUNGSI (FUNCTION)

A. HUBUNGAN (RELATIONS) PADA THE CARTESIAN PRODUCT

A.Pengertian Relasi

Suatu relasi (biner) F dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu perkawanan elemen-elemen di A dengan elemen-elemen di B.

Contoh:

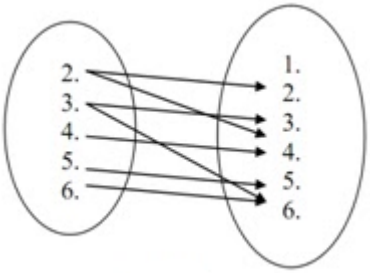
A = {2,3,4,5,6}

B = {1,2,3,4,5,6}

Relasi : "adalah faktor dari "

Dapat disajikan dalam dua macam cara.

a. Dengan diagram panah



b. Dengan diagram pasangan berurutan.

R = {(2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4), (5,5), (6,6)}

Dengan menggunakan penyajian relasi di atas, maka relasi R dari himpunan A ke himpunan B dapat kita definisikan sebagai himpunan pasangan (a,b) pada A × B, di mana a ∈ A dan - b ∈ B salah satu dari kalimat berikut:

(1) "a berelasi dengan b" ditulis a R b atau R(a,b)

(2) "a tidak berelasi dengan b" ditulis a $\not R$ b atau $\not R$ (a,b)

Relasi atau hubungan itu dapat terjadi di berbagai bidang misalnya ekonomi,IPA, keteknikan dan lain sebagainya, seperti hubungan antara jumlah suatu barang dengan harganya, dalam hubungan antara harga dengan permintaan atau penawaran, dalam hubungan antara kekuatan suatu zat radioaktif dengan waktu.

Sebagaimana dibahas pada Bahan 3.1. di atas, pada kuadran atau the xy plane atau The Cartesian product, setiap ordered pair (x, y) atau x ***** y merupakan satu titik, atau sebaliknya.

Jadi terdapat hubungan yang bersifat unik atau satu-satu dan timbal balik (double uniqueness).

Dengan demikian, terdapat hubungan satu-satu (one-to-one correspondence) antara set ordered pairs (the set of ordered pairs) dan set titik (the set of points) pada the Cartesian product.

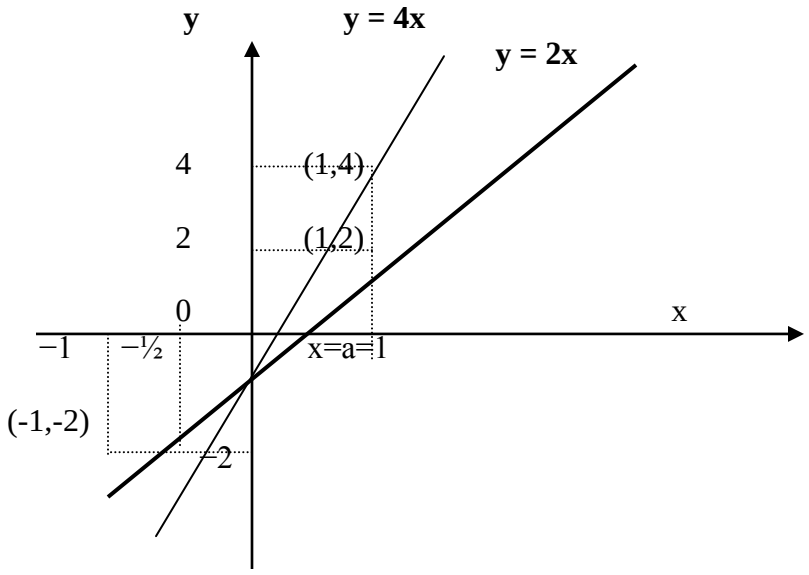
Setiap titik atau ordered pair pada the xy plane atau the Cartesian product menunjukkan terjadi hubungan (relation) :

Antara setiap bilangan riil atau titik pada garis atau variabel x dengan bilangan riil atau titik pada garis atau variabel y, jadi, terdapat set (x, y) atau ordered pair atau titik pada the xy plane sebagai dari hasil hubungan (asosiasi) atas dasar suatu aturan dari setiap bilangan atau angka dari x dengan bilangan atau angka dari y.

Misal pada Diagram 3.1.1. di atas :
Titik (x, y) = (1,2) di kuadran I, menunjukkan bahwa atas dasar suatu aturan, maka untuk x =1 mempunyai hubungan dengan y = 2.
Juga titik (x, y) = (−2, 1) di kuadran II menunjukkan hubungan x = − 2 dengan y = 1 berdasarkan suatu aturan.

B. SIFAT HUBUNGAN : SATU-SATU (ONE-TO-ONE) ATAU BUKAN

Diagram 3.2.1
HUBUNGAN (RELATION) DAN FUNGSI (FUNCTION)



Berapa bilangan atau angka atau nilai dari set y hasil dari hubungan dengan setiap bilangan atau angka atau nilai dari x ?

Penentunya adalah suatu aturan, yang akan menentukan salah satu diantara dua jenis hubungan :

1. Hubungan bukan bersifat satu-satu atau kausal.

   Dengan hubungan ini, maka atas dasar suatu aturan satu bilangan dari set x akan berhubungan atau menghasilkan lebih dari satu bilangan dari set y. Jadi hubungan tidak bersifat kausal atau satu-satu (one-to-one relation).
   Suatu aturan dimaksud hanya disebut sebagai **hubungan** (relation atau a multivalued function).
   Contoh :
   Pada Diagram 3.2.1. di atas, terdapat set $\{x, y| y \leq x\}$ yang antara lain termasuk pairs atau titik (1,0), (1,1), (1,−4), sehingga untuk satu bilangan x = 1 menghasilkan hubungan dengan 3 bilangan y yaitu y = 0, y = 1 dan y = −4.
   Dengan set atau aturan $y \leq x$ dimaksud, maka hubungan y terhadap x bukan bersifat satu-satu atau kausal, jadi hanya merupakan hubungan saja.
   Area dari set dimaksud di bawah garis y = 2x.

2. Hubungan merupakan **fungsi** yaitu hubungan bersifat satu-satu atau kausal (one-to-one relation or correspondence, atau unique relation)

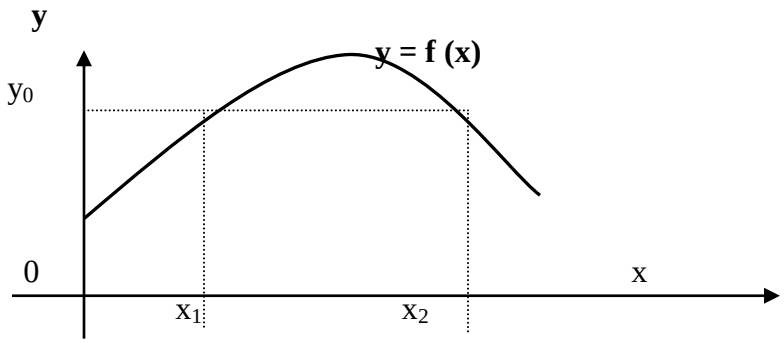
   Dengan hubungan ini, maka atas dasar suatu aturan satu bilangan dari set x akan berhubungan atau menghasilkan hanya satu bilangan dari set y. Jadi hubungan bersifat kausal atau satu-satu (one-to-one relation).
   Suatu aturan dimaksud disebut sebagai **fungsi** (function) atau a single-valued function.
   Contoh ;
   Pada Diagram 3.2.1. di atas, set $\{(x, y) \mid y = 2x\}$ adalah suatu set ordered pairs termasuk (1,2), (0,0) dan (−1, −2), menghasilkan hubungan satu-satu atau kausal, dimana untuk x = 1 hanya menghasilkan y = 2, x = 0 hanya menghasilkan y = 0, x = −1 hanya menghasilkan y = −2.
   Dengan set atau aturan y = 2x dimaksud, maka hubungan y terhadap x bersifat satu-satu atau kausal (one-to-one relation or correspondence).

3. Fungsi juga berbentuk hubungan satu bilangan y terhadap lebih dari satu x

   Diagram 3.2.2. di bawah menunjukkan hubungan bersifat **fungsi**, tetapi dimana lebih dari satu bilangan x menentukan hanya satu nilai y. Hubungan ini tetap bersifat satu-satu atau kausal (one-to-one relation) antara x menentukan y.

Diagram 3.2.2.

Fungsi Dengan Angka y Lebih Dari Satu



C. PENGERTIAN DAN PENULISAN FUNGSI

1. Definisi fungsi

Berdasarkan uraian pada butir B. di atas, maka definisi fungsi sebagai berikut :

> Fungsi adalah set dari ordered pairs (x, y) dimana setiap bilangan x menentukan hanya satu bilangan y.
> Seperti dikemukakan dalam buku Chiang and Wainwright (Book 1) halaman 17 :
> *A function is therefore a set of ordered pairs with the property that any x value uniquely determines a y value.*
> *This definitionof function corresponds to what would be called a single-valued function in the older terminology. What was formerly called a multivalued function is now referred to as a relation or correspondence.*

Dalam ilmu ekonomi fungsi umumnya menyatakan fungsi persamaan tingkah laku (behavioral equation functions).

2. Penulisan (notasi) fungsi

Fungsi, misalnya untuk 2 variabel x dan y, ditulis dengan notasi $y = f(x) \rightarrow$ baca y adalah fungsi dari x (y is said to be a function of x, atau y equals of x).
Jadi y sebagai variabel ditentukan (**dependent variable**, atau juga disebut **endogeneous variable**), sedangkan x adalah variabel penentu (idependent variable, atau juga disebut **exogeneous variable**) terhadap y.

3. Fungsi merupakan transformasi atau *mapping*

Fungsi, seperti y = f(x), juga disebut *a mapping or transformation* yang menunjukkan hubungan antara y dengan x, dimana :

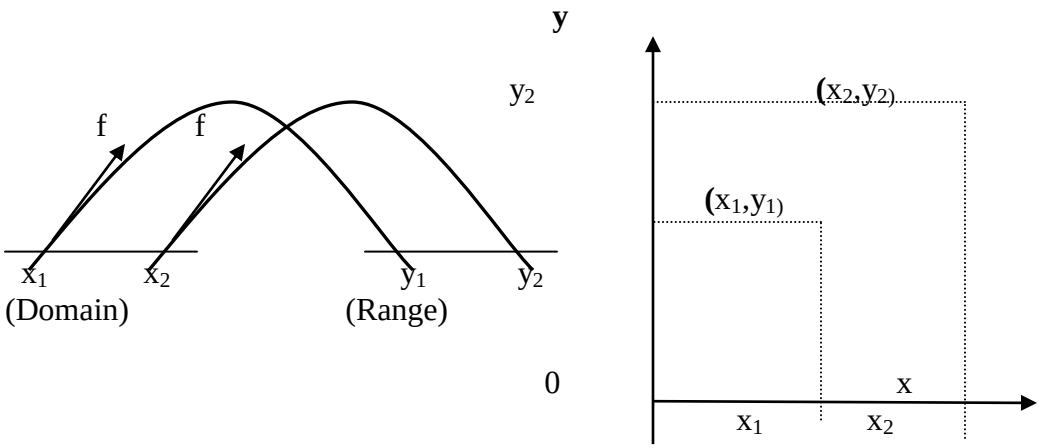
☑ Notasi f merupakan suatu aturan (a rule) yang mentransformasi (transformed atau mapped) set x ke dalam set y (the set x is mapped or transformed into the set y, yang ditulis dengan notasi :

$$f : x \rightarrow y$$

dimana :

- ✪ Tanda → menyatakan transformasi (mapping atau transforming).
- ✪ Notasi f menandakan (specification) suatu **aturan (a rule)** dari mapping atau transforming.
  Selain huruf kecil f, untuk notasi juga digunakan huruf lain seperti g dan z, huruf besar F dan G, huruf Yunani (Greek) kecil seperti φ (phi) ψ (psi) atau huruf besar phi Φ dan psi Ψ.
- ✪ Pada fungsi seperti y = f(x), maka :

Diagram 3.2.3.
DOMAIN DAN RANGE SERTA RULE f



- ► Variabel x disebut *the argument of the function* atau *independent variable* yaitu variabel penentu.
  Sedangkan, set dari semua bilangan atau angka dari variabel x disebut *the domain of the function*. Jadi set ini juga merupakan subset dari *the set of all real numbers*. Lihat Diagram 3.2.3.di atas.
- ► Variable y disebut *the value of the function* atau *dependent variable* yaitu variable yang ditentukan.
  Sedangkan, angka y (the value of y) hasil dari mapping suatu angka (value) x, disebut *the image of that x value*.
  Set dari semua images disebut *the range of the function*. bilangan atau angka dari variabel x disebut *the domain of the function*. Lihat Diagram 3.2.3 di atas.
- ► Catatan :
  - ◆ Domain dan range y = f(x) mencerminkan variabel-variabel dan fungsi dalam ilmu ekonomi, yaitu terbatas pada bilangan positif

(nonnegative real numbers). Jadi diagram dan kurva digambar pada kuadran I.

- Dalam buku Henderson and Quandt (Book 3) halaman 363-364 dikemukakan :

The relation y = f(x) (read"y is a function of x") means that ***a rule*** *exists by which it is possible to associate values of the variable y with values of the variable x.*

Examples are y = 1/x; y = $3x^2$, y = ln sin x and y =1 when x is an odd integer and y = 0 for any other value of x.

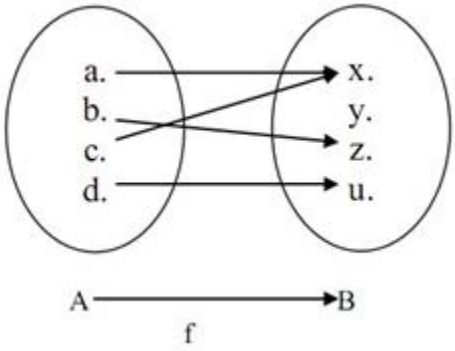
In each case, values of y correspond to given values of x according to the rule of association specified in the form of the function.

A function may not be definedn for all possible values of x. Examples :

y = 1/x cannot be evaluated for x = 0.

y = x^2, it has all the real numbers as its domain.

Perhatikan diagram dibawah ini:



Relasi fungsional atau sering disingkat fungsi sering juga disebut dengan istilah pemetaan (mapping) didefinisikan sebagai berikut :

Definisi: *Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi yang memasangkan setiap elemen dari A secara tunggal, dengan elemen pada B.*

Ditulis f : A → B dibaca "fungsi f pemetaan A ke dalam / into B"

Apabila f memetakan suatu elemen x ∈A ke suatu y ∈ B dikatakan bahwa y adalah peta dari x oleh f dan peta ini dinyatakan dengan notasi f(x), dan biasa ditulis dengan f:x → f(x), sedangkan x biasa disebut prapeta dari f(x).

Himpunan A dinamakan daerah asal (domain) dari fungsi f , sedangkan himpunan B disebut daerah kawan (kodomain) sedangkan himpunan dari semua peta di B dinamakan daerah hasil (range) dari fungsi f tersebut.

Contoh 1:

Diagram sebagaimana pada G.b. 2.4 di atas adalah fungsi karena pertama, terdapat relasi (yang melibatkan dua himpunan yakni A dan B) dan kedua, pemasangan setiap elemen A adalah secara tunggal.

Contoh 2

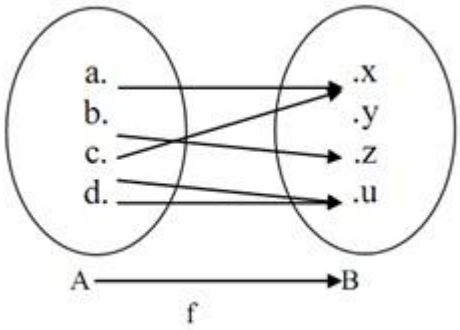


Diagram di samping bukan merupakan fungsi karena ada elemen A yang dipasangkan *tidak* secara tunggal dengan elemen pada B.

Contoh 3 :
Diketahui A = {x | -3 ≤ x < 3, x ∈ R} dan suatu fungsi f: A → R
Ditentukan oleh rumus f(x) = x2 + 1
a. Carilah f(-1), f(0) dan prapeta dari 5
b. Dengan melukis grafik, tentukan daerah hasil dari fungsi f.
c. Jelaskan bahwa f adalah suatu fungsi.
Jawab:

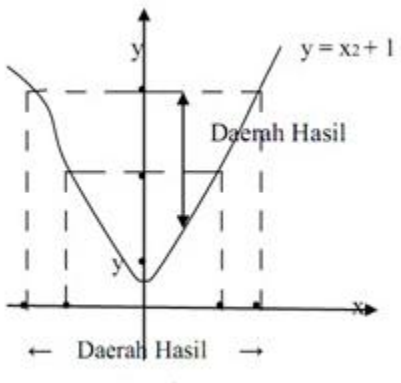
a. $f(x) = x_2 + 1 \Rightarrow f(-1) = (-1)_2 + 1 = 2$

$f(0) = 0_2 + 1 = 1$

Prapeta dari 5 $\Rightarrow x_2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x_2 = 4 \Leftrightarrow x = +2$

Sehingga prapeta dari 5 adalah 2 atau –2

b.



Dibuat grafik y= x2 + 1

f(-3) = (-3)2 + 1 =10
f(3) = (3)2 + 1 = 10
titik balik (0,1)
Jadi daerah hasil dari fungsi f adalah: R = { y | 1 < y < 10, y ∈ R }, karena nilai f(x) = y terletak pada interval tersebut sebagaimana terlihat pada sumbu y.
c. Karena f suatu relasi dimana setiap elemen pada domain A (sumbu x) dipasangkan secara tunggal maka f merupakan fungsi.

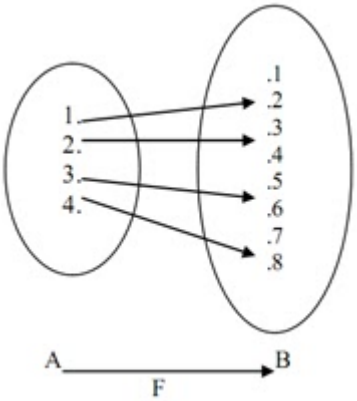
C.Sifat Fungsi

Dengan memperhatikan bagaimana elemen-elemen pada masing-masing himpunan A dan B yang direlasikan dalam suatu fungsi, maka kita mengenal tiga sifat fungsi yakni sebagai berikut :

1. Injektif (Satu-satu)

Misalkan fungsi f menyatakan A ke B maka fungsi f disebut suatu fungsi satu-satu
(injektif), apabila setiap dua elemen yang berlainan di A akan dipetakan pada dua elemen yang berbeda di B. Selanjutnya secara singkat dapat dikatakan bahwa f:A→B adalah fungsi injektif apabila a ≠ a' berakibat f(a) ≠ f(a') atau ekuivalen, jika f(a) = f(a') maka akibatnya a = a'.
Contoh:
1. Fungsi f pada R yang didefinisikan dengan f(x) = x2 bukan suatu fungsi satu-satu sebab
f(-2) = f(2).

2.

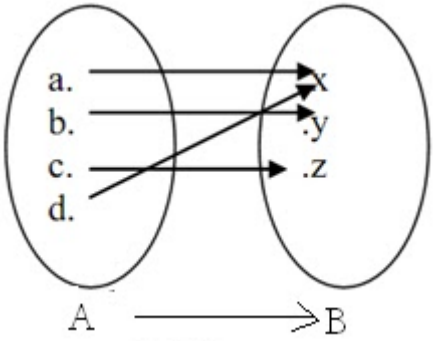


Adapun fungsi pada A = {bilangan asli} yang didefinisikan dengan f(x) = 2x adalah fungsi satu-satu, sebab kelipatan dua dari setiap dua bilangan yang berlainan adalah berlainan pula.

2. Surjektif (Onto)

Misalkan f adalah suatu fungsi yang memetakan A ke B maka daerah hasil f(A) dari fungsi f adalah himpunan bagian dari B, atau f(A) c B. Apabila f(A) = B, yang berarti setiap elemen di B pasti merupakan peta dari sekurang-kurangnya satu elemen di A maka kita katakan f adalah suatu fungsi surjektif atau "f memetakan A Onto B"

Contoh:
1. Fungsi f: R→R yang didefinisikan dengan rumus f(x) = x2 bukan fungsi yang onto karena himpunan bilangan negatif tidak dimuat oleh hasil fungsi tersebut
2. Gb. 2.11

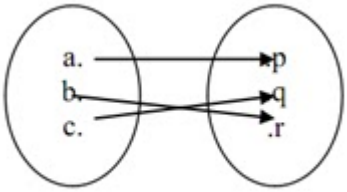


Misal A = {a, b, c, d} dan B = {x, y, z} dan fungsi f: A → B yang didefinisikan dengan diagram panah adalah suatu fungsi yang surjektif karena daerah hasil f adalah sama dengan kodomain dari f (himpunan B).

3.Bijektif (Korespondensi Satu-satu)

Suatu pemetaan f: A→B sedemikian rupa sehingga f merupakan fungsi yang injektif dan surjektif sekaligus, maka dikatakan "f adalah fungsi yang bijektif" atau " A dan B berada dalam korespondensi satu-satu".
Contoh:

1)



Relasi dari himpunan A = {a, b, c} ke himpunan B = {p,q, r} yang didefinisikan sebagai diagram di samping adalah suatu fungsi yang bijektif.

2) Fungsi f yang memasangkan setiap negara di dunia dengan ibu kota negaranegara di dunia adalah fungsi korespondensi satu-satu (fungsi bijektif), karena tidak ada satu kotapun yang menjadi ibu kota dua negara yang berlainan.

D.Jenis – jenis Fungsi

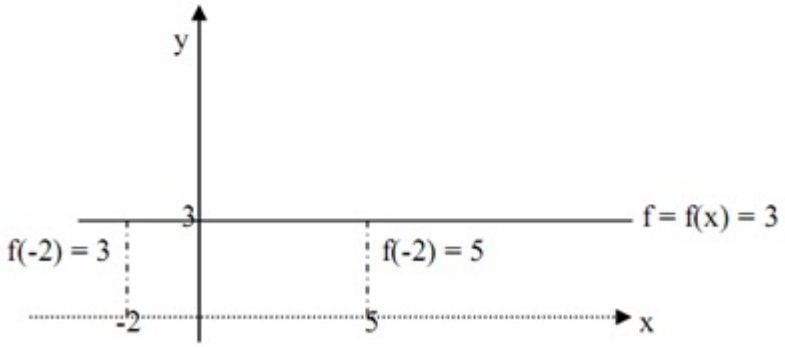
Jika suatu fungsi f mempunyai daerah asal dan daerah kawan yang sama, misalnya D, maka sering dikatakan fungsi f pada D. Jika daerah asal dari fungsi tidak

dinyatakan maka yang dimaksud adalah himpunan semua bilangan real (R). Untuk fungsi-fungsi pada R kita kenal beberapa fungsi antara lain sebagai berikut.

a. Fungsi Konstan

> *$f : x \rightarrow$ C dengan C konstan disebut fungsi konstan (tetap).*
>
> *Fungsi f memetakan setiap bilangan real dengan C.*

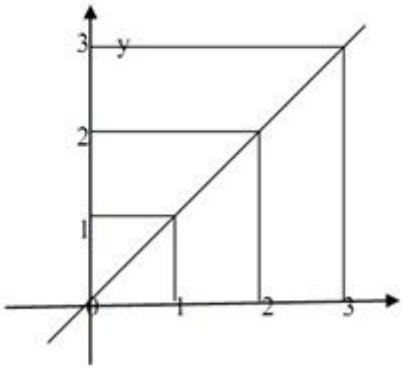
Fungsi f: $x \rightarrow 3$



f (-2) = 3
f (0) = 3
f (5) = 3

b. Fungsi Identitas

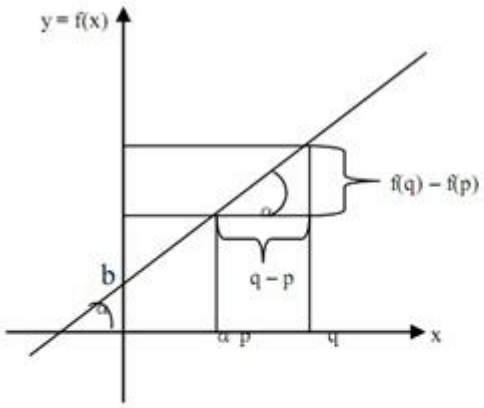
> *Fungsi R→R yang didefinisikan sebagai: $f : x \rightarrow$ x disebut fungsi identitas.*



f(1) = 1
f(2) = 2
f(3) = 3

c. Fungsi Linear

Fungsi pada bilangan real yang didefinisikan : f(x) = ax + b, a dan b konstan dengan a



$f(x) = ax + b \rightarrow f(p) = ap + b$

$f(q) = aq + b$ _

$f(q) - f(p) = a(q-p)$

$\frac{f(q)\,(f(p)}{q-p}$ _ $= a = \tan \alpha$, disebut gradien dari garis $y = ax + b$ tersebut.

Jika garis $y = mx + c$ maka gradiennya adalah m dan melalui titik (0,c).

d. Fungsi Kuadrat

Fungsi f: R→R yang ditentukan oleh rumus $f(x) = ax2 + bx + c$ dengan $a,b,c \in R$ dan $a \neq 0$ disebut fungsi kuadrat.

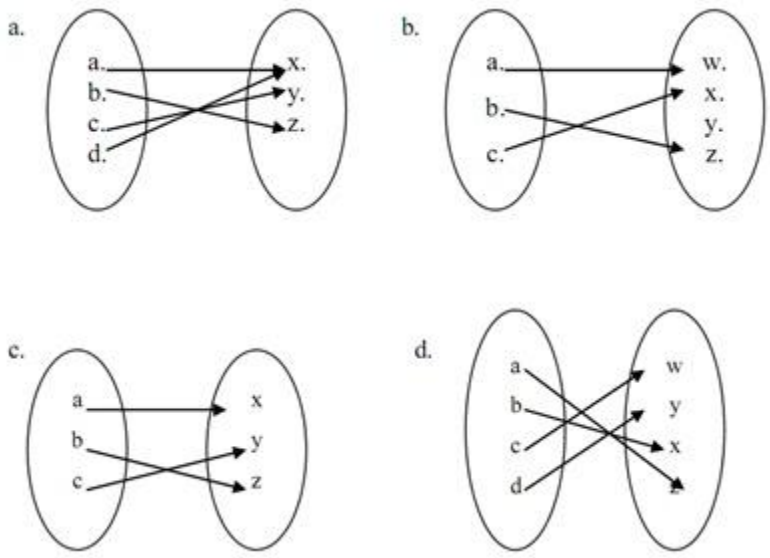
e. Fungsi Rasional

Fungsi rasional adalah suatu fungsi terbentuk f(x) =Q(x) P(x) dengan P(x) dan Q(x) adalah suku banyak dalam x dan $Q(x) \neq 0$.

Fungsi R→R yang didefinisikan sebagai: f : x→ x disebut fungsi identitas.

Soal Latihan:

1. Diantara fungsi-fungsi berikut, manakah yang merupakan fungsi injektif, surjektif,
serta bijektif? Berilah penjelasannya!



2. Diketahui himpunan D = {1,2,3,4,5}. Suatu relasi pada D ini, manakah yang berupa pemetaan dan berikan alasannya !
   a.R = {(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)}
   b.R = {(1,2),(2,3),(2,4),(4,5),(5,1)}
   c.R = {(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2)}
3. Suatu fungsi f: R→R ditentukan oleh f(x) = x2 + 2
   a.Tentukan f(-1), f(a), dan f(1).
   b.Tentukan a jika f(a) = 27
   c.Anggota manakah dari daerah asal yang mempunyai peta 18 ?
4. Manakah yang merupakan fungsi injektif, surjektif, atau bijektif dari fungsi dengan domain {1, 2, 3, 4}, yang didefinisikan sebagai berikut?
   a. R = {(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7); jika kodomainnya {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
   b. R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1); jika kodomainnya {1, 2, 3}
   c. R = {(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1); jika kodomainnya {1, 2, 3, 4}
   d. R = {(1, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 4); jika kodomainnya {1, 2, 3, 4, 5, 6}
5. Misalkan A = [–1, 1] = {x|–1≤ x ≤ 1, ∈ R}. Apakah fungsi di bawah ini surjektif?
   a. f: A → A ; didefinisikan f(x) = x c. f: A → A ; didefinisikan f(x) = x2
   b. f: A → A ; didefinisikan f(x) = 2x – 1 d. f: A → A ; didefinisikan f(x) = x3

Referensi :

1. Yahya, yusuf, D.Suryadi HS dan Agus S; **Matematika Dasar Untuk Perguruan Tinggi**, Ghalia Indonesia, Jakarta, 2005
2. Chiang, Alpha C; **Fundamental Methods of Mathematical Economics**, McGraw Hill, New York, 2005
3. Frank Ayres, **Calculus 2nd edition**, McGraw Hill, New York, 1985
4. Johannes, H dan Handoko, BS. 1994. Pengantar Matematika untuk Ekonomi. Edisi ke empat belas. LP3ES. Jakarta
5. **Wirawan, Nata.** ***Cara Mudah Memahami Matematika Ekonomi Edisi Kelima.*** **Denpasar : Keraras Emas. 2014**