Universitas Esa Unggul Kampus Harapan Indah	MODUL XII **MATEMATIKA**	
Judul	**INTEGRAL**	
Penyusun	**Distribusi**	**Perkuliahan**
Nixon Erzed	PAMU UNIVERSITAS ESA UNGGUL	Pertemuan –XIII online

Tujuan :

Mahasiswa memahami pengertian integral dan dapat mencari integral dari suatu fungsi dan dapat menerapkan dalam penggunaan sederhana

Materi:

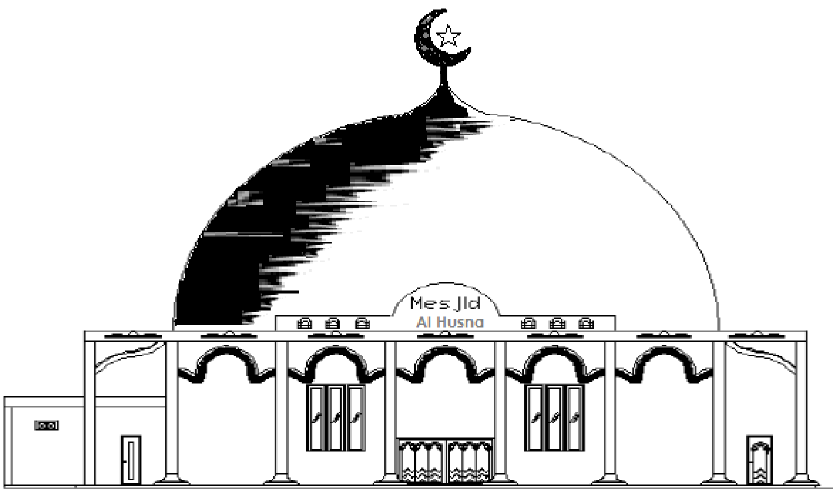
1. Integral Tak Tentu
2. Integral Fungsi Trigonometri
3. Integral Tertentu
4. Teknik Pengintegralan
5. Penggunaan Integral Tertentu

INTEGRAL

Integral merupakan salah satu bahasan dalam kalkulus yang merupakan cabang matematika. Integral adalah kebalikan dari turunan (diferensial). Oleh karena itu integral disebut juga anti turunan atau anti diferensial.

Kegunaan integral dalam kehidupan sehari-hari banyak sekali, diantaranya menentukan luas suatu bidang, menentukan voluem benda putar, menentukan panjang busur dan sebagainya. Integral tidak hanya dipergunakan di matematika saja. Banyak bidang lain yang menggunakan integral, seperti ekonomi, fisika, biologi, teknik dan masih banyak lagi disiplin ilmu yang lain yang mempergunakannya.

Perhatikan gambar kubah di bawah ini, tahukah anda bagaimana cara menentukan luas dan volume dari kubah tersebut? Konsep-konsep integral dapat menolong untuk menyelesaikan permasalahan tersebut.



Ada 2 macam integral, yaitu :
1. Integral tak tentu
2. integral tentu.

Integral tak tentu, yaitu integral yang nilainya tak tentu, sedangkan integral tentu adalah integral yang nilainya tertentu. Pada integral tentu ada batas bawah dan batas atas yang nanti berguna untuk menentukan nilai integral tersebut.

I. Integral Tak Tentu

Karena integral merupakan kebalikan (invers) dari turunan, maka untuk menemukan rumus integral kita beranjak dari turunan.

Definisi :

Integral merupakan antiturunan, sehingga jika terdapat fungsi F(x) yang kontinu pada interval [*a, b*] diperoleh :

$$\frac{d(F(x))}{dx} = F'(x) = f(x).$$

Antiturunan dari $f(x)$ adalah mencari fungsi yang turunannya adalah $f(x)$, ditulis $\int f(x).dx$

Secara umum dapat kita tuliskan :

$$\int f(x).dx = \int F'(x).dx = F(x) + C$$

Catatan:

$\int f(x).dx$: disebut unsur integrasi, dibaca "integral $f(x)$ terhadap x"

$f(x)$: disebut integran (yang diitegralkan)

F(x) : disebut fungsi asal (fungsi primitive, fungsi pokok)

C : disebut konstanta / tetapan integrasi

Perhatikan tabel dibawah ini:

Pendiferensialan

F(x)	F′(x) = f(x)
$x^2 + 3x$	$2x + 3$
$x^2 + 3x + 2$	$2x + 3$
$x^2 + 3x - 6$	$2x + 3$
$x^2 + 3x + \sqrt{3}$	$2x + 3$
$x^2 + 3x + C$, dengan konstanta $C \in R$	$2x + 3$

Pengintegralan

Berdasarkan tabel diatas dapat kita simpulkan bahwa:

- dari F(x) yang berbeda diperoleh F′(x) yang sama,
- jika F′(x) = f(x) diketahui sama, maka fungsi asal F(x) yang diperoleh belum tentu sama.
- Intergral adalah proses pencarian fungsi asal F(x) dari F′(x)

Berikut adalah perumusan integrasi fungsi aljabar (dasar), yaitu:

Integral fungsi aljabar

1) $\int k\, dx = k\, x + C$

2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ bila n ≠ -1

3) $\int ax^n dx = \frac{a}{n+1} . x^{n+1} + c,$ dengan n $\neq -1$

4) $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

5) $\int a.f(x) dx = a \int f(x) dx,$ → dimana a konstanta sebarang.

Cara Penyelesaian integrasi dasar :

1) Carilah : $\int x^4 dx$

Penyelesaian :

$$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{x^5}{5} + C \text{ atau } \frac{1}{5} x^5 + C$$

2) Carilah $\int \frac{2}{5} x^3 dx$

Penyelesaian :

$$\int \frac{2}{5} x^3 dx = \frac{2}{5} \frac{x^{3+1}}{(3+1)} + C = \frac{2}{5} \frac{x^4}{4} + C$$

$$= \frac{2}{20} x^4 + C = \frac{1}{10} x^4 + C$$

Contoh Soal:

Tentukan :

$a.\quad \int 2x^3\ dx$

$b.\quad \int \left(5x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 7x - 2\right) dx$

$c.\quad \int \frac{8}{3x^4}\ dx$

$d.\quad \int 2x\sqrt{x}\ dx$

$e.\quad \int 4\ dx$

Penyelesaian :

$a.\quad \int 2x^3\ dx = \frac{2}{4}x^4 + c = \frac{1}{2}x^4 + c$

$b.\quad \int \left(5x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 7x - 2\right) dx = x^5 - \frac{3}{4}x^4 + 2x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 2x + c$

$c.\quad \int \frac{8}{3x^4}\ dx = \int \frac{8}{3}x^{-4} dx = \frac{8}{3(-3)}x^{-3} + c = -\frac{8}{9x^3} + c$

$d.\quad \int 2x\sqrt{x}\ dx = \int 2x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5/2}x^{\frac{5}{2}} + c = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + c$

$e.\quad \int 4\ dx = 4x + C$

Pemakaian Integral Tak Tentu

Pada integral tak tentu terdapat nilai konstanta C yang tidak tentu nilainya. Untuk menentukan fungsi f dari suatu fungsi turunan, maka harus ada data yang lain sehingga harga C dapat diketahui.

Contoh 1 :

Diketahui f ‘(x) = 5x – 3 dan f(2) = 18. Tentukan f(x) !

Penyelesaian :

$$f(x) = \int (5x-3)dx = \frac{5}{2}x^2 - 3x + c$$

$$\begin{aligned} f(2) = 18 &\Leftrightarrow \frac{5}{2}(2)^2 + 3.2 + c = 18 \\ &\Leftrightarrow 10 + 6 + c = 18 \\ &\Leftrightarrow 16 + c = 18 \\ &\Leftrightarrow c = 2 \end{aligned}$$

Jadi $f(x) = \frac{5}{2}x^2 - 3x + 2$

Contoh 2 :

Jika gradien garis singgung di titik (x,y) pada sebuah kurva yang melalui titik (3,4) ditentukan $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 8x + 5$, maka tentukan persamaan kurva tersebut !

Penyelesaian :

$$f(x) = \int (3x^2 - 8x + 5)dx = x^3 - 4x^2 + 5x + c$$

$$\begin{aligned} f(3) = 4 &\Leftrightarrow 3^3 - 4.3^2 + 5.3 + c = 4 \\ &\Leftrightarrow 27 - 36 + 15 + c = 4 \\ &\Leftrightarrow c = -2 \end{aligned}$$

Jadi f(x) = $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

Contoh 3 :

Sebuah molekul bergerak sepanjang suatu garis koordinat dengan persamaan percepatan **a(t)= -12t + 24 m/detik^2**. Jika kecepatannya pada **t = 0** adalah **20 m/detik**.

Tentukan persamaan kecepatan molekul tersebut.

Penyelesaian:

Percepatan molekul $a(t) = -12t + 24$

Sehingga : $v = \int a \, dt$

$v = \int (-12t + 24)\ dt$

$v = -6t^2 + 24t + C$

pada t=0, v_0 = 20 m/detik, maka 20 = 0 + 0 + C, C = 20

Jadi, persamaan kecepatannya adalah $v = -6t^2 + 24t + 20$

LATIHAN SOAL :

A. Integral tak tentu

1. $\int (2-3x)^2$ dx.
2. $\int (\cos x + \sin 2x)$ dx.
3. $\int \frac{2x-1}{x^2}$ dx.
4. $\int \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}$ dx.
5. $\int (1+\sqrt[3]{x})$ dx.
6. $\int x\sqrt{x}$ dx
7. $\int 2\sin x dx$
8. $\int \sin^2 x$ dx
9. $\int \frac{dx}{3\sqrt{x^5}}$

B. Penggunaan Integral :

1. Kecepatan suatu benda bergerak adalah $v(t) = 5 + 2t$. Jika $s'(t) = v(t)$, dengan $s(t)$ adalah jarak benda pada saat t detik. Tentukan rumus umum jarak benda tersebut!
2. Diketahui rumus percepatan $a(t) = t^2 + 1$ dan kecepatan $v(0) = 6$. Tentukanlah rumus kecepatan, $v(t)$, jika $a(t) = v'(t)$!
3. Diketahui turunan fungsi f dinyatakan dengan $f'(x) = 6x^2 - 2x + 6$, dan $f(2) = -7$. maka rumus fungsi tersebut adalah ....
4. Gradien garis singgung di tiap titik (x,y) suatu kurva ditentukan oleh rumus $f'(x) = 3x(2 - x)$. Jika kurva tersebut melalui titik (-1,0), tentukan persamaannya!

II. Integral Fungsi Trigonometri

Dari turunan fungsi trigonometri yang secara ringkas dapat digambarkan sebagai berikut :

$$\sin x \to \cos x \to -\sin x \to -\cos x \to \sin x$$

$$\tan x \to \sec^2 x$$

$$\cot x \to -\cos ec^2 x$$

"$\to$" artinya turunannya.

Karena integral adalah invers dari turunan maka :

dari $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ diperoleh $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

dari $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ diperoleh $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

dari $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ diperoleh $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$

untuk bentuk yang lebih kompleks :

$$\frac{d}{dx}(\cos(ax+b) = -a.\sin(ax+b)$$

dan bentuk yang setara

$$\frac{d}{dx}(\frac{-1}{a}\cos(ax+b) = \frac{-1}{a}(-a).\sin(ax+b) = \sin(ax+b)$$

Sehingga diperoleh

$$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$$

Dan dengan cara yang sama diperoleh:

$$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$

Kesamaan-kesamaan fungsi trigonometri berikut ini diperlukan untuk menyelesaikan integral trigonometri :

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2) $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

3) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

4) $\sin x . \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$

5) $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{1}{2} x$

6) $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{1}{2} x$

Berikut ini adalah Cara Penyelesaian integrasi fungsi trigonometri:

Carilah $\int \sin 3x . dx$

Penyelesaian :

$$\int \sin 3x . dx = -\frac{1}{3} \cos 3x + C$$

Carilah $\int \cos^2 3x \, dx$

Penyelesaian:

Dari rumus kesamaan trigonometri

→ $\cos^2 3x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2(3x)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 6x$

Sehingga integral tersebut diselesaikan sebagai berikut:

$$\int \cos^2 3x \, dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 6x\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} . \frac{-1}{6} \sin 6x + C$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{12} \sin 6x + C$$

Contoh Soal:

Tentukan :

$$a.\quad \int Sin^2 x\ dx$$

$$b.\quad \int Cos(3x+2)\ dx$$

$$c.\quad \int (5\sin x + 2\cos x)\ dx$$

$$d.\quad \int (-2\cos x - 4\sin x + 3)\ dx$$

Penyelesaian :

$$a.\quad \int \sin^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx$$

$$= \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x).dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$b.\quad \int \cos(3x+2)\ dx = \frac{1}{3}\sin(3x+2) + C$$

$$c.\quad \int (5\sin x + 2\cos x)\ dx = \int (5\sin x\ dx + \int 2\cos x\ dx$$

$$= -5\cos x + 2\sin x + c$$

$$d.\quad \int (-2\cos x - 4\sin x + 3)\ dx = \int -2\cos x\ dx - \int 4\sin x\ dx + \int 3\ dx 2\sin x$$

$$= -2\sin x + 4\cos x + 3x + C$$

III. Integral Tertentu

Integral tertentu dinotasikan dengan

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ \text{dx} = \left[F(x)\right]_a^b = \text{F(b)} - \text{F(a)}}$$

Keterangan:

f(*x*) adalah integran, yaitu *f*(*x*) = F'(*x*)
a, b adalah batas-batas pengintegralan
[a, b] adalah interval pengintegralan

Perhatikan contoh berikut :

$$\int_a^b x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_a^b = \left[\frac{1}{3}(b)^3\right] - \left[\frac{1}{3}(a)^3\right] = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

Contoh soal :

1) $\int_{-2}^{2} x^3 \text{ dx} = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^{2}$

$= \left[\frac{1}{4}(2)^4\right] - \left[\frac{1}{4}(-2)^4\right]$

= (4 – 4) = 0

2) $\int_0^2 (x^2 + 4x)\text{ dx} = \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2$

$= \left[\frac{1}{3}(2)^3 + 2(2)^2\right] - \left[\frac{1}{3}(0)^3 + 2(0)^2\right]$

= (8/3 + 8) – (0 + 0) = 10 $\frac{2}{3}$

3) $\int_0^{\frac{\eta}{2}} \cos^2 x$ dx= $\int_0^{\frac{\eta}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ dx

$$= \left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\eta}{2}}$$

$$= \left[\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin 2(\frac{\pi}{2})\right]$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-0)+\frac{1}{4}(0-0)=\frac{\pi}{4}$$

Latihan soal :

1. $\int_{-1}^{1}(1-x^2)$ dx = ...
2 $\int_0^4 (\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})$ dx = ...
3 $\int_{-2}^{0}(2-x)$ dx = ...
4. Carilah nilai p bila, $\int_0^p x(1-x)$ dx = 0, p>0 !
5. Selidiki apakah $\int_1^3 4x^3dx+\int_3^4 4x^3dx=\int_1^4 4x^3dx$
6. $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ = ...
7. $\int_0^{\eta} \sin xdx$ = ...
8. $\int_{1/4\eta}^{1/2\eta} \sin 2xdx$ = ...
9. $\int_0^2 (x^2-6x+8)dx=....$.
10. $\int_{-\eta}^{0} \cos xdx$ = ...

IV. Teknik Pengintegralan

a. Integral Substitusi

Pada bagian ini akan dibahas teknik integrasi yang disebut metode substitusi. Konsep dasar dari metode ini adalah dengan mengubah integral yang kompleks menjadi bentuk yang lebih sederhana.
Bentuk umum integral substitusi adalah sebagai berikut.

$$\boxed{\int [f(u)\frac{du}{dx}]dx = \int f(u)du}$$

Artinya :

Dari fungsi integran $f(x)$ *harus dapat diubah menjadi suatu fungsi lain misalkan f(u) dikalikan dengan turunan u terhadap x*

$$f(x) = f(u).\frac{du}{dx}$$

sehingga

$$f(x).dx = f(u).\frac{du}{\cancel{dx}}.\cancel{dx}$$ atau $f(x).dx = f(u).du$

Perhatikan uraian berikut :

Untuk $f(x) = 3x^2.(x^3+10)^4$ carilah $\int f(x)dx$

misalkan $u = x^3 + 10$ → $u' = 3x^2$

jika

$u^4 = (x^3+10)^4$ dipandang sebagai $f(u) = u^4$

maka

$f(x) = 3x^2(x^3+10)^4$ dapat ditulis $f(x) = u'.f(u)$

sehingga

$\int 3x^2.(x^3+10)^4 dx$ dapat dicari sebagai $\int u^4 du = \frac{1}{5}u^5 + C$

atau $\int 3x^2.(x^3+10)^4 dx = \frac{1}{5}(x^3+10)^5 + c$

Untuk fungsi trigonometri, perhatikan uraian berikut :

1. Perhatikan fungsi trigonometri berikut : $f(x) = \sin^2 x.\cos x$

   Misalkan $u = \sin x$ → $u' = \cos u$

   jika

   $\sin^2 x = u^2$ dipandang sebagai $f(u) = u^2$

   maka

   $f(x) = \sin^2 x.\cos x$ dapat ditulis $f(x) = f(u).u'$

   Sehingga

   $\int f(x)dx = \int \sin^2 x.\cos x.dx$

   dapat dicari sebagai $\int u^2.du = \dfrac{u^3}{3} + C$

   atau $\int f(x)dx = \dfrac{1}{3}\sin^3 \mathrm{x} + C$

2. Perhatikan kombinasi fungsi aljabar dan fungsi trigonometri berikut ini : $f(x) = 6\mathrm{x}^2.\cos x^3$

   misalkan $u = x^3$ → $u' = 3x^2$

   jika

   $\cos u = \cos x^3$ dipandang sebagai $f(u) = \cos u$

   maka

   $f(x) = 6\mathrm{x}^2.\cos x^3$

   $= 2.3\mathrm{x}^2.\cos x^3$ dapat ditulis $f(x) = 2.u'.f(u)$

   sehingga

   $\int f(x)dx = \int 6\mathrm{x}^2.\cos x^3 dx$

   dapat dicari sebagai $\int 2.\cos u.du = 2\sin u + C$

   atau $\int f(x)dx = 2\sin \mathrm{x}^3 + C$

Contoh soal :

a. Tentukan $\int 2x(x^2+3)^4\,dx$

Misalkan *u* = x^2+3, maka $\frac{du}{dx}=2x$ atau $dx=\frac{du}{2x}$

Sehingga diperoleh,

$$\int 2x(x^2+3)^4\,dx = \int 2x\,u^4\,\frac{du}{2x}$$

$$= \int u^4\,du$$

$$= \frac{1}{5}u^5+C = \frac{1}{5}(x^2+3)^5+C$$

b. Tentukan $\int \sin^3 x.\cos x\,\mathrm{d}x$

Misalkan *u* = sin *x*, maka $\frac{du}{dx}=\cos x$ atau $dx=\frac{du}{\cos x}$

Sehingga diperoleh:

$$\int \sin^3 x.\cos x\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{u}^3\cos x\,\frac{du}{\cos x}$$

$$= \int u^3\,du$$

$$= \frac{1}{4}u^4+C = \frac{1}{4}\sin^4 x+C$$

Soal Latihan

selesaikan integral berikut dengan teknik substitusi :

1. $\int x^2\cdot\sin x^3\,dx$
2. $\int 3x(x^2+5)^5\,dx$
3. $\int 2x\sqrt{x^2-4}.dx$
4. $\int 2x.\sin(x^2+3)\,dx$
5. $\int \frac{6x^2}{\sqrt{x^3+8}}\,dx$
6. $\int \sin^3 3\mathrm{x}.\cos 3\mathrm{x}\,\mathrm{dx}$
7. $\int 3x\cdot\sin 6x^2\,dx$
8. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{3x^2+9x-1}}\,dx$

b. Integral Parsial

Teknik integral parsial ini digunakan bila suatu integral tidak dapat diselesaikan dengan cara biasa maupun dengan cara substitusi.

Prinsip dasar integral parsial adalah sebagai berikut.

Jika $y = u\,.v \rightarrow \quad dy = du.v + u.dv$

$$\int dy = \int v\, du + \int u\, dv$$

$$y = \int v\, du + \int u\, d$$

$$u.v = \int v\, du + \int u\, dv$$

$$\int u\, dv = u.v - \int v\, du$$

pengintegralan parsial integral tertentu

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

$$\int u.dv = uv - \int v.du$$

pengintegralan parsial integral tak tentu

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

$$\int_a^b u.dv = [uv]_a^b - \int_a^b v.du$$

Contoh soal :

Tentukan $\int x^2 \sin x \; dx$

Penyelesaian:

Cara 1: dengan menggunakan rumus $\int u\, dv = uv - \int v\, du$

Misal : $u = x^2$, $\quad \rightarrow du = 2xdx$

$dv = \sin x\, dx \quad \rightarrow v = \int \sin xdx = -\cos x$

sehingga diperoleh,

$$\int x^2 \sin x \; dx = x^2.(-\cos x) - \int (-\cos x) 2xdx$$

$$= x^2.(-\cos x) + \int \cos x.2xdx$$

$$= -x^2.\cos x + 2\left(x.\sin x - \int \sin xdx\right)$$

$$= -x^2.\cos x + 2x.\sin x + 2\cos x + C$$

Selain cara di atas, dapat pula diselesaikan dengan cara sebagai berikut : untuk menentukan integral parsial bentuk $\int udv,$ yang turunan ke-k dari u adalah 0 dan integral ke- k dari v selalu ada.

Cara 2:

	Diturunkan	Diintegralkan
+	x^2	$\sin x$
–	$2x$	$-\cos x$
+	2	$-\sin x$
–	0	$\cos x$

Deferensialkan sampai nol

Sehingga diperoleh,

$$\int x^2 \cdot \sin x dx = -x^2 . \cos x + 2x . \sin x + 2 \cos x + C$$

Latihan soal :

Selesaikan integral berikut dengan teknik substitusi atau integral parsial!

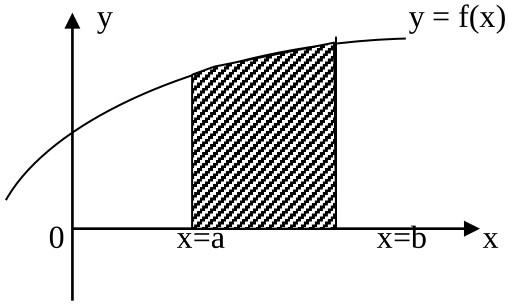
1. $\int x^2 \cdot \sin x dx$
2. $\int 3x(x-7)^5 dx$
3. $\int -x\sqrt{x+7}dx$
4. $\int -2x.\cos (x+3)dx$
5. $\int 3x \cdot \sin 6x dx$

V. Penggunaan Integral Tertentu.

V. 1. Penggunaan Integral Tertentu, untuk menghitung Luas Daerah.

Luas daerah antara kurva dengan sumbu X atau sumbu Y

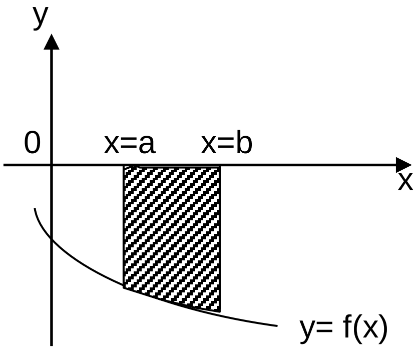
(a) Luas daerah di atas sumbu x



Dari gambar diatas luas daerah yang diarsir :

$$L_A = \int_a^b f(x)\,dx$$

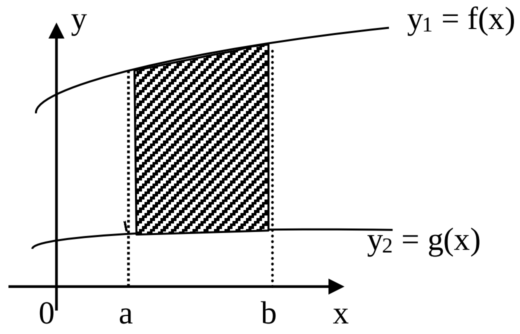
(b) Luas daerah di bawah sumbu x



Dari gambar diatas luas daerah yang diarsir :

$$L_B = -\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$$

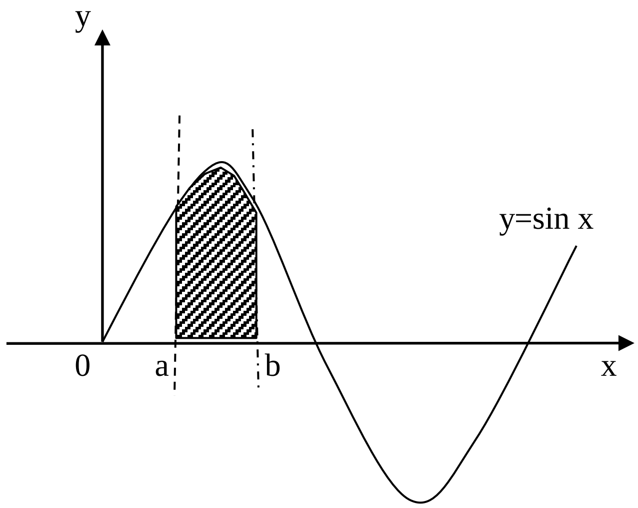
(c) Luas daerah dibatasi oleh dua kurva



Dari gambar diatas luas daerah yang diarsir :

$$L_C = \int_a^b (y_1 - y_2)dx$$

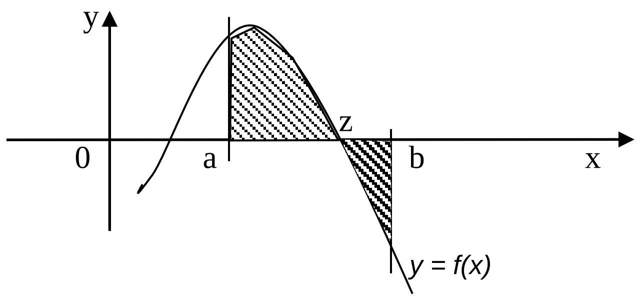
(d) Luas daerah dibatasi oleh y = sinx



Dari gambar diatas luas daerah yang diarsir :

$$L_D = \int_a^b \sin x dx$$

(e) Luas daerah dibatasi oleh y = f(x) yang berada diatas dan bawah sumbu x



Dari gambar diatas luas daerah yang diarsir :

$$L_E = \int_a^z f(x)dx - \int_z^b f(x)dx$$

Contoh soal :

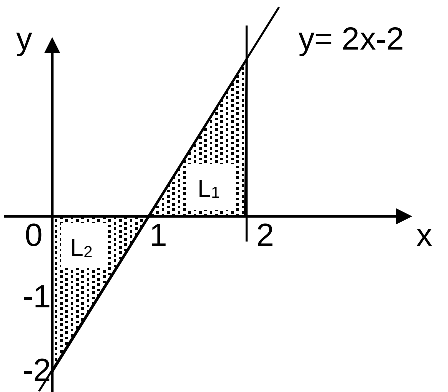
Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh:

1. y =2x - 2, untuk 0$\le x \le 2$
2. $y_1 = x^2$ dan y_2 = 2x +3
3. y = cos x, untuk $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$

Penyelesaian:

1. y =2x - 2

Berikut gambar daerah yang dibatasi oleh kurva y=2x- 2



$L = L_1 + L_2$

L1= $\int_{1}^{2} (2x-2)dx = \left[x^2 - 2x\right]_1^2$

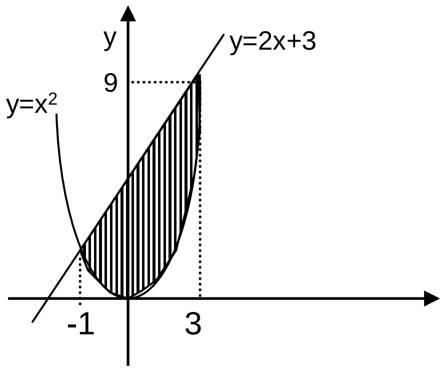
= $(2^2-1^2)-(2.2-2.1) = (4-1)-(4-2) = 3-2 = 1$

L2= - $\int_{0}^{1} (2x-2)dx = -\left[x^2 - 2x\right]_0^1 = -(1^2 - 2.1) = 1$

Jadi luas L=1+ 1 = 2 satuan luas

2. $y_1 = x^2$ dan $y_2 = 2x + 3$

Gambar dibawah memperlihatkan daerah yang dibatasi oleh kurva $y_1 = x^2$ dan $y_2 = 2x + 3$



menentukan batas-batasnya → $y_1 - y_2 = 0$ (perpotongan y_1 dan y_2) diperoleh

$x^2 - 2x - 3 = 0$
$(x+1)(x-3) = 0$
$x_1 = -1$ dan $x_2 = 3$

(-1) sebagai batas bawah dan (3) sebagai batas atas.

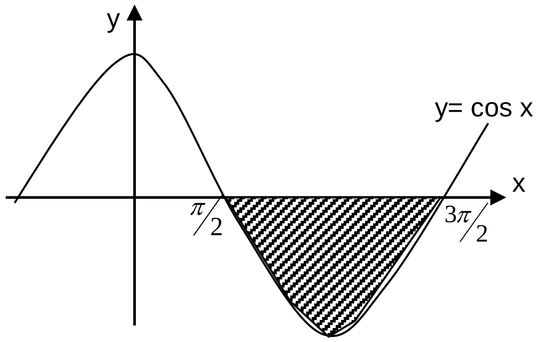
L = $\int_{-1}^{3} (2x+3) - x^2 \, dx = \left[x^2 + 3x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{3}$

= $\left[3^2 + 3.3 - \frac{1}{3}.3^3\right] - \left[-1^2 + 3.(-1) - \frac{1}{3}.(-1^3)\right]$

= $\left[9 - (1 - 3 + \frac{1}{3})\right]$

= $10\frac{2}{3}$ satuan luas

3. y = cos x



$$L = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx = -\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$= -(\sin \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2})$

$= -(-1 - 1)$

$=$ 2 satuan luas

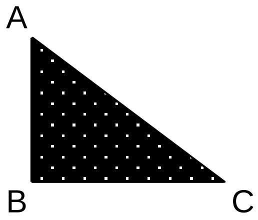
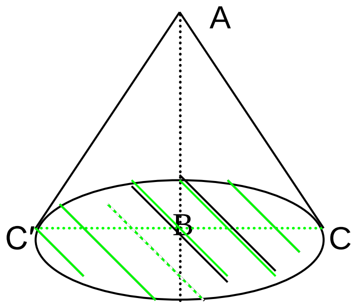
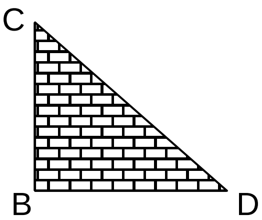
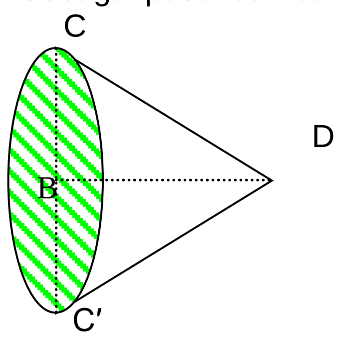
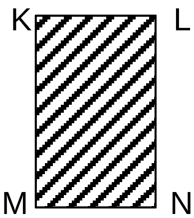
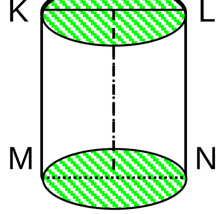
Latihan soal :

Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh garis dan kurva yang terdapat pada tiap soal berikut :

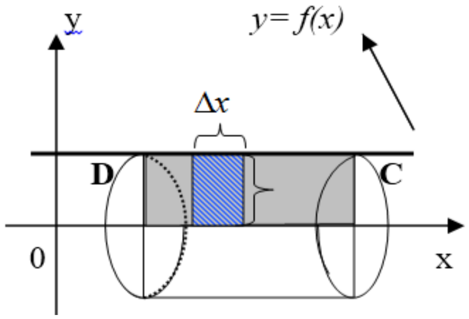
a. $y = 3x + 4$, sumbu x, dan garis $x = 2$ dan $x = 6$.
b. $y= 3x + 4$, dan sumbu x
c. $y = 6x$ dan $y^2 = x^2 - 2x$.
d. $x = 8 + 2y - y^2$, sumbu y , dan garis $y = -1$ dan $y = 3$
e. $y = x^3$, sumbu x, dan garis $x = 0$ dan $x = 1$.

V.2. Penggunaan Integral Tertentu, untuk menghitung volume benda putar.

Pengertian benda putar adalah suatu bentuk bidang datar yang diputar sejauh 360º, terhadap suatu garis pada bidang datar tersebut sebagai sumbu putarannya perhatikan gambar berikut:

BENTUK BIDANG DATAR	HASIL PENGAMATAN
1. 	1. ▲ABC diputar dengan AB sebagai pusat sumbu putar. 
2. 	2. ▲BCD, diputar dengan BD Sebagai pusat sumbu putar. 
3. 	3.Persegi panjang ABCD diputar dengan KM sebagai pusat sumbu putar. 

1. Volume benda putar, mengelilingi sumbu x



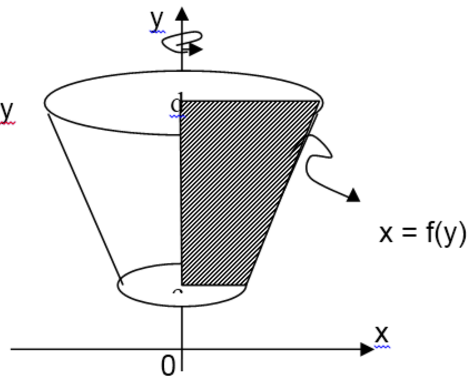
$$V = \pi\int_{a}^{b}(f(x))^2\,dx$$

$$V = \pi\int_{x_2}^{x_1} y^2\,dx$$

2. Volume benda putar , mengelilingin sumbu y

$$V = \pi\int_{c}^{d}(f(y))^2\,dy$$

$$V = \pi\int_{y_1}^{y_2} x^2\,dy$$



3. Volume benda putar yang dibatasi oleh dua kurva.

Jika $f_1(x) > f_2(x)$, dan $a < x < b$

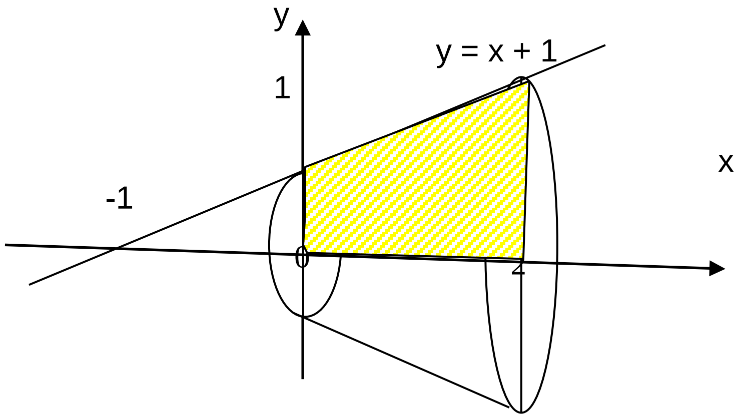
$$V = \pi\int_a^b \{(f_1(x)^2 - (f_2(x)^2\}\,dx$$

$$V = \pi\int_{x_1}^{x_2} (y^2{}_1 - y^2{}_2)\,dx$$

Contoh soal :

1. Hitunglah volume benda putar yang terjadi, jika yang daerah dibatasi kurva $y = x + 1$, $x = 0$, $x = 2$, dan sumbu x diputar mengelilingi sumbu x sejauh 360°.

   Penyelesaian :



$$V = \pi\int_0^2 f^2(x)\,dx = \pi\int_0^2 (x+)^2\,dx = \pi\int_0^2 (x^2 + 2x + 1)dx$$

$$= \pi\left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x\right]_0^2 =$$

$$\pi\left[(\frac{1}{3}.2^3 + 2^2 + 2) - (\frac{1}{3.}0^3 + 0^2 + 0)\right] = \pi(\frac{26}{3})$$

$$= \frac{26}{3}\pi \text{ satuan volume}$$

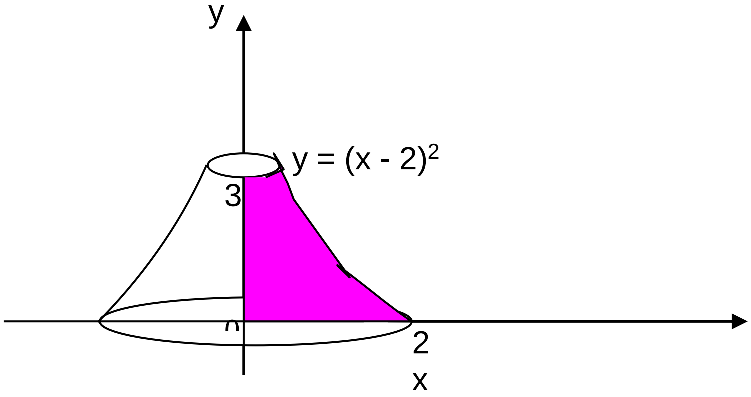
2. Hitung volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi y = $(x - 2)^2$, sumbu y , y = 0 dan y = 3 diputar mengelilingi sumbu y sejauh 360º.

Penyelesaian:

dimana $(x - 2)^2 = y$ menjadi x = $\sqrt{y}$ +2

$$V = \pi\int_0^3 x^2 dy = \pi\int_0^3 (\sqrt{y}+2)^2 dy = \pi\int_0^3 (y \;\; + 4\sqrt{y} + 4)dy$$

$$= \pi\left[\frac{1}{2}y^2 + \frac{8}{3}y\sqrt{y} + 4y\right]_0^3 = \pi\left[\frac{1}{2}.3^2 + \frac{8}{3}.3\sqrt{3} + 4.3\right] = \left[\frac{9}{2} + 8\sqrt{3} + 12\right]\pi$$



Latihan soal :

1. Hitunglah volume benda putar yang terjadi, jika daerah yang dibatasi kurva berikut diputar mengelilingi sumbu X sejauh 360º.

   a. y = 3x - 2 dan y = x^2

   c. y = sin x , $0 \le x \le \frac{1}{2}\pi$

   b. y = x - 1 dan y = 3 – x

2. Hitunglah volume benda putar yang terjadi, jika daerah yang dibatasi kurva berikut diputar mengelilingi sumbu Y sejauh 360º.

   a. y = $\sqrt{x}$ dan y = 1
   b. y = x + 1 untuk 1< y < 4
   c. y = $9 - x^2$, garis y = -9 dan y = 9