**S1- MATEMATIKA I**

**Pertemuan Online Sesi 11**

**INTEGRAL CALCULUS**

**PENGERTIAN INTEGRAL CALCULUS**

**DAN**

**KEGUNAAN INTEGRAL**

* 1. **Integral calculus atau integration vs. differentiation**
     + Primitive function F(x) vs derivative function f(x)

Integral calculus atau integration adalah kebalikan dari differentiation, yaitu :

* Apabila fungsi F(x) merupakan an integral (anti derivative) function dari fungsi f(x), maka :

F(x) disebut sebagai primitive function, sedangkan

f(x) merupakan derivative dari F(x) dan f(x) adalah fungsi kontinyu (a continuous function) di atas domainnya atau suatu interval independent variabel x.

* Jadi integration atau integral calculus menyangkut pencarian (tracing) asal (the parentage of) dari fungsi f(x).

Tetapi differentiation mencari turunan (derivative atau differentiation) dari F(x).

* Differentiation dari F(x) menghasilkan fungsi yang unik (a unique derivative function) f(x).

Sebaliknya, integration dari f(x) menghasilkan banyak tak terbatas bentuk fungsi (indefinite number of possible parents) F(x).

* + - * Penjelasan :
        + Notasi integration dari f(x) terhadap x dalam rangka menuju atau ditrasir ke F(x) :

 --- indefinite integral

dan

 --- definite integral di atas interval [a,b]

dimana :

tandal integral (the integral sign)

 fungsi yang akan diintegralkan (the integrand --- the function to be integrated).

 tanda untuk melakukan diferensiasi terhadap x (the operation of differentiation which is to be performed with respect to the variable x).

 sebagai notasi diferensiasi dari the primitive function , jadi :



🡫



dimana  adalah suatu angka yang bersifat bebas atau angka apa saja (an arbitrary constant of integration) yang berfungsi sebagai indikasi banyaknya fungsi primitif yang bisa dihasilkan (the multiple parentage of the integrand).

**INTEGRAL INDEFINITE (INDEFINITE INTEGRALS)**

**DAN**

**KETENTUAN-KETENTUAN INTEGRASI**

**(RULES OF INTEGRATION)**

1. **Integral indefinite vs. Integral definite**

The integral 

disebut the indefinite integral of  karena tidak mempunyai batasan angka tertentu (no definite numerical value).

Sedangkan the integral 

disebut definite integral karena mempunyai definite numerical value misal dari angka sebesar a ke b

1. **Aturan Integrasi (berlaku juga untuk Integral definite)**

**dan Contoh**

|  |
| --- |
| **RULE 1 s.d, RULE 3 : Aturan dasar (Basic Rules of Integration)** |
| * 1. ***Rule 1 (the power rule)***   karena  dimana n ≠ − 1  Soal      4. 1. ***Rule 2 (the exponential rule)***   Rule 2a : karena dan  Rule 2b :  karena   * 1. ***Rule 3 (the logarithmic rule)***   Rule 3a : karena  dimana x > 0  Rule ini bentuk spesial (a special form) dari the power  function xn  karena untuk n = 1 tidak bisa dilakukan atas  dasar Rule 1 (the power rule) sebab menjadi  dan  Rule 2 b : |

|  |
| --- |
| **RULE 4 dan RULE 5 : Aturan operasi (Rules of Operation)** |
| * 1. ***Rule 4 (the integral of a sum)***       karena      Soal    2. 1. ***Rule 5 (the integral of a multiple)***     Soal |

|  |
| --- |
| **RULE 6 dan RULE 7 : Aturan Untuk Substitusi**  **(Rules Involving Substitution)** |
| * 1. ***Rule 6 (the substitution rule)***       Contoh :    Soal    2. 1. ***Rule 7 (integration by parts)***   karena :      Soal             8). Rule 8 (*trigonometric rules*)  a. dx = − cos x + C c.  dx = tg x + C  b.dx = sin x + C d. dx = − ctg x + C  c. dx = sec x tan x + C |

* 1. **Soal latihan**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 3. 4). |  |  |

**INTEGRAL DEFINITE (DEFINITE INTEGRALS)**

**DAN**

**SIFATNYA (ITS PROPERTIES)**

1. **Pengertian definite integrals dan contoh**

Definite integral adalah integral pada suatu interval atau jarak tertentu di atas domain variabel bebas (independent variable) x, misal dari angka a ke b (a < b), dengan notasi :



dimana : a = the lower limit of integration

b = the upper limit of integration

 atau bisa dalam bentuk  atau  =

= tanda instruksi variabel x dengan angka a dan b

Contoh dan soal :

1.  2). 
2.  4). 
3. **A definite integral sebagai suatu area di bawah kurva atau fungsi**

|  |  |
| --- | --- |
| Y      y = f(x)      area A    0 a = x1 xi b = x5 x | Area di bawah kurva di atas interval [a, b] atau [x1, x5] dimana xi untuki = 1, 2, 3, 4, 5,  yaitu :  =  =  = area A → karena  area itu diproxi (approximated) sebesar =  =  = area A\* (> area A) |

* + Penjelasan :
    - Tanda  menyatakan jumlah dari semua f(xi) dari 1 hingga n (the sum of a finite number of terms from 1 to n).
    - Sedangkan jika n hingga tak terhingga (n → ∞), maka limit dari the sum itu adalah  yang sama dengan 
    - Integral  dimaksud disebut **the Riemann integral** yang mempunyai suatu area connotation (an area of connotation) serta suatu jumlah connotation (a sum connotation) sebab  adalah bagian yang kontinyu (the continuous part) sebagai pasangan (a counterpart) dari konsep diskret dari (a discrete concept of) 
  + Theorem

Suatu fungsi mempunyai integral (integrable) pada suatu interval [a, b], apabila fungsi itu kontinyu pada interval dimaksud,

atau,

Jika fungsi f(x) adalah dalam interval [a, b], maka syarat perlu dan cukup (necessary and sufficient and condition) untuk terdapatnya



adalah bahwa set tidak kontinyu dari f(x) mempunyai *measure zero* (yaitu jika jumlah dari semua jarak dalam semua interval yang menutup semua titik dapat dibuat secar bebas sedemikian kecilnya (if the sum of the lengths of intervals enclosing all points can be made arbitrary small – less than any given positive number ε).

1. **Sifat-sifat (properties) definite integral**
   * + 1. 

Jadi, 

* + - 1. 
      2. 
      3. 
      4. 
      5. 
      6. Integration by parts : 

1. **Definite integral ke indefinite integral**



Jadi, definite integral  di atas interval dari titik atau angka a ke setiap titik atau angka di atas variabel x, menjadi persis seperti integral definite karena hasilnya juga adalah {F(x) + c} dimana c = - F(a).

Dengan demikian tanda integral  berarti sama dengan tanda  dalam arti c = − F(a).

1. **Soal latihan**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

**IMPROPER INTEGRALS**

1. **Pengertian improper integrals**

Improper integrals adalah definite integrals dimana salah satu limitnya adalah tak terhingga (∞ atau − ∞), yaitu :

 atau 

Kedua integral di atas tidak bisa dievaluasi karena ∞ bukan suatu angka.

1. **Convergent atau divergent improper integrals**

Evaluasi terhadap improper integrals di atas harus didasarkan atas dasar konsep limit, sehingga menjadi :

 atau 

* + Jika kedua limit itu :
    - Diperoleh (exist), maka dikatakan bahwa improper integral dimaksud *convergent* atau *to converge* yang akan menghasilkan suatu nilai integral.
    - Tidak diperoleh (do not exists), maka improper integral dimaksud *divergent* atau *to diverge* yang tidak menghasilkan nilai integral.
  + Jika kedua limit integral adalah tak terhingga (∞)



Juga, apabila limit diperoleh (exist), maka improper integral bersifat convergent, atau divergent jika limit tidak diperoleh.

* + Contoh f(x)

* + -  

Pertama : 

0 1 b → → ∞ x

Maka atas dasar konsep limit di atas, berarti :



Jadi, improper integral di atas bersifat convergent, yaitu kurva f(x) menuju ke suatu titik pada interval sejak titik x = 1 hingga x = b → ∞ di sumbu x.

* + -  f(x)



Pertama : 

0 1 b →→ ∞ x

Maka atas dasar konsep limit di atas, berarti :



Jadi, improper integral di atas bersifat divergent, yaitu kurva f(x) tidak menuju ke suatu titik pada interval sejak titik x = 1 hingga x = b → ∞ di sumbu x.

1. **Infinite integrand**

Improper integrals juga timbul karena the integrand menjadi tak terhingga (infinite) pada interval [a,b], walaupun limit integralnya adalah tertentu atau tidak terhingga (finite).

Untuk evaluasinya didasarkan atas konsep limit.

Contoh1 :

 → adalah improper integral karena seperti pada terlihat pada diagram (bagian bawah) di atas, the integrand menjadi tak terbatas atau tak terhingga pada limit bawah dari integral, yaitu the integrand 

Evaluasinya :

Pertama, peroleh dulu integral :



Kemudian, evaluasi limitnya dengan a → 0+ :



dan karena limit ln a = −∞ ketika a → 0+,

maka integral itu bersifat divergent

Contoh 2 :



Integral ini adalah improper integral karena ketika x → 0+ maka the integrand  menjadi tak terhingga atau tak terbatas

Evaluasinya :



Jadi, integral bersifat convergent ke angka 6.

Contoh 3 :

Ketika f(x) → ∞ dengan x → p dimana p berada di interval (a, b) dan bukan [a, b] jadi titik a dan b tidak termasuk, maka dengan the additivity property :



Integral di sisi kiri bersifat convergent hanya apabila masing-masing integral di sisi kanan mempunyai limit

Misal :



Evaluasinya :



karena b = 1, maka



Jadi, integral di sisi kiri itu bersifat divergent, setelah mengevaluasi integral pertama di sisi kanan dan tanpa meneruskan evaluasi terhadap integral bagian kedua.

1. **Soal latihan**

Tentukan integral mana berikut ini yang improper dan alasannya.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |