INTEGRASI KALKULUS

A. DEFINISI DAN RUMUS DASAR

Jika F(x) adalah fungsi yang turunannya F'(x) = f(x) pada interval a≤x≤b, maka F(x) disebut antiderivatif dari f(x). Misalnya F(x) = x^3 + 6, F(x) = x^3-1, ataupun F(x) = x^3+C, dimana konstanta sebarang C, adalah antiderivatif dari f(x)=$3x^2$. Terlihat bahwa antiderivatif dari satuan fungsi adalah tidak tunggal (tidak unik). Antiderivatif F(x) + C disebut integral tak tentu (*indefinite integral)* dari f(x) dan ditulis sebagai $\int f(x)\, dx$.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

f(x) disebut integrand. Dibawah ini adalah sifat-sifat dan rumus-rumus dasar integral tak tentu:

1. $\int \frac{d}{dx}(f(x))\, dx = f(x) + c$
2. $\int (u + v)\, dx = \int u\, dx + \int v\, dx$, dengan u dan v fungsi dari x
3. $\int \alpha u dx = \alpha \int u dx$, dengan α konstanta, u fungsi dari x
4. $\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, untuk n ≠ -1
5. $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$
6. $\int a^u\, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$, dengan a> 0, a ≠ 1
7. $\int e^u\, du = e^u + C$
8. $\int \sin u\, du = -\cos u + C$
9. $\int \cos u\, du = \sin u + C$
10. $\int \tan u\, du = \ln |\sec u| + C$
11. $\int \cos u\, du = \ln |\sin| + C$
12. $\int \sec u\, du = \ln |\sec u + \tan u| + C$
13. $\int \csc u\, du = \ln |\csc u + \cot u| + C$
14. $\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$
15. $\int \csc^2 u\, du = -\cot u + C$
16. $\int \sec u \tan u\, du = \sec u + C$
17. $\int \csc u \cot u\, du = -\csc u + C$
18. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$
19. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{u}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$
20. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \text{arc sec} \frac{u}{a} + C$
21. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$
22. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$
23. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln \left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C$

24. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + C$
25. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{1}{2} u \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{u}{a} + C$
26. $\int \sqrt{u^2 + a^2}\, du = \frac{1}{2} u \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + C$
27. $\int \sqrt{u^2 - a^2}\, du = \frac{1}{2} u \sqrt{u^2 + a^2} - \frac{1}{2} a^2 \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + C$

B. INTEGRAL PARSIAL

Pandang u dan v fungsi yang diferensiabel dari x, maka:

d(uv) = u dv + v du

u dv = d(uv) – v du

$\int$ dv = $\int$ d(uv) - $\int$ v du = uv - $\int$ v du

Dengan melihat rumus diatas, dapat dihitung model integral yang tidak dapat dikembalikan ke rumus dasar. Metode ini disebut metode integral parsial. Yang perlu diperhatikan dalam metode ini:

1. Bagian yang dipilih sebagai dv harus mudah diintegralkan
2. $\int$ v du harus tidak lebih sukar darpada $\int u\, dv$

Pada umumnya metode integral parsial ini digunakanpada integral yang mengandung fungsi logaritma atau perkalian polinom x^2 dengan fungsi trigonometri, seperti x cos x atau x^n sin x, juga perkalian fungsi eksponensial x^n e^{ax} atau perklian fungsi eksponensial dengan fungsi trigonometri, seperti e^{2x} sin x dan juga fungsi-fungsi yang tidak terdapat pada rumus dasar, seerti fungsi siklometri.

C. INTEGRAL FUNGSI TRIGONOMETRI

Dengan menggunakan metode integrasi parsial, dapat diperoleh rumus-rumus reduksi sebagai berikut:

1. $\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx$, dengan n = bilangan asli
2. $\int \sin^x x\, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x\, dx$, dengan n = bilangan asli
3. $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \sec^n x\, dx = \frac{1}{n-1} \left[\frac{\sin x}{\cos^{n-1} x}\right] + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x\, dx$, n = bilangan asli, n $\geq$ 2
4. $\int \frac{dx}{\sin^n x} = \int \csc^n x\, dx = \frac{-1}{n-1} \left[\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x}\right] + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} x\, dx$, n = bilangan asli, n $\geq$ 2
5. $\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx$, n = bilangan asli, n $\geq$ 2

D. INTEGRAL DENGAN SUBTITUSI TRIGONOMETRI

Integral dimana *integrand* nya mengandung bentuk $\sqrt{a^2 + b^2 x^2}$ atau pun $\sqrt{b^2 x^2 - a^2}$ tetapi tidak terdapat faktor irrasional lain, dapat dicari dengan suatu metode subtitusi trigonometri sebagai berikut:

Integrand	**Subtitusi**
$\sqrt{a^2 + b^2\ x^2}$	x = $\frac{a}{b}$ tan z
$\sqrt{a^2 - b^2\ x^2}$	x = $\frac{a}{b}$ sin z
$\sqrt{b^2\ x^2 - a^2}$	x = $\frac{a}{b}$ sec z

E. INTEGRAL FUNGSI RASIONAL

Suatu fungsi F(x) = $\frac{f(x)}{g(x)}$ dimana f(x) dan g(x) polinom (suku banyak) disebut suatu fungsi pecahan rasional. Jika derajad dari f(x) lebih kecil dari pada derajad g(x), maka F(x) disebut fungsi pecahan rasional yang sebenarnya (*proper)* di dalam hal lain disebut fungsi pecahan rasional tidak sebenarnya (*improper)*. Suatu fungsi rasional yang tidak sebenarnya selalu dapat dinyatakan sebagai penjumlahan suatu polinom dan suatu fungsi yang sebenarnya dengan melakukan operasi pembagian biasa.

F. ANEKA SUBTITUSI

Integrand yang mengandung bentuk:

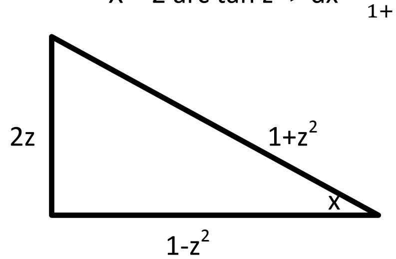
1. $\sqrt[n]{ax + b}$, digunakan subtitusi ax + b = z^n yang diikuti dengan integrasi fungsi rasional
2. $\sqrt{q + px + x^2}$, digunakan subtitusi q + px + x^2 = $(z – x)^2$
3. $\sqrt{q + px - x^2}$ = $\sqrt{(\alpha + x)(\beta - x)}$, digunakan subtitusi q + px - x^2 = $(\alpha + x)^2 z^2$ atau q + px - x^2 = $(\beta - x)^2 z^2$
4. Fungsi rasional dalam sinus/cosinus, digunakan subtitusi: z = tan $\frac{1}{2}$ x, maka tan x = tan 2($\frac{1}{2}$ x) = $\frac{2\tan\left(\frac{1}{2}x\right)}{1-tan^2\left(\frac{1}{2}x\right)}$ = $\frac{2z}{1-z^2}$,

   sehingga sin x = $\frac{2z}{1+z^2}$

   cos x = $\frac{1-z^2}{1+z^2}$

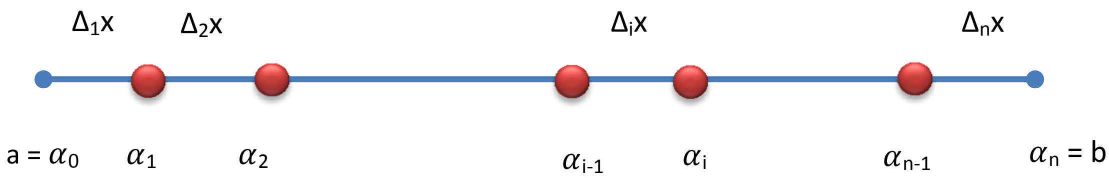
   z = tan $\frac{1}{2}$ x

   X = 2 arc tan z -> dx = $\frac{2z}{1+z^2}$dz



G. INTEGRAL TERTENTU (*DEFINITE α INTEGRAL*)

Misalkan f(x) kontinu pada interval a $\leq$ x $\leq$ b. Ambil (n-1) titik: α_1, α_2,…, α_{n-1} pada interval tersebut dimana a = $\alpha_0 < \alpha_1 <\ldots< \alpha_n$ = b. Interval a $\leq$ x $\leq$ b terbagi menjadi n sub internal h_1, h_2, …, h_n. Panjang masing-masing sub interval h_1 kita sebut = $\alpha_1 - \alpha_{i-1}$.



Ambil sebarang titik x_1 pada interval h_1, dan dibuat penjumlahan

$S_n = \sum_{k=1}^{n}$ $f(x_k)\ \Delta_k x = \int$ $(x_1)\ \Delta_1 x + \int$ $(x_2)\ \Delta_2 x + \ldots + \int$ $(x_n)\ \Delta_n x$

Apabila banyaknya interval => ∞, maka didefinisikan:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\ \Delta_k x = \int_a^b f(x)$$

$\int_a^b f(x)$ dx disebut integral tertentu dari f(x) terhadap x, dari x = a sampai x = b. f(x) disebut *integrand*, a dan b masing-masing disebut batas bawah dan batas atas.

<u>Beberapa sifat integral:</u>

1. $\int_a^b f(x)\,dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
3. $\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x) \pm \int_a^b g(x)dx$
4. $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$, untuk α = konstanta
5. $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$, jika a<c<b

<u>Teorema Dasar Integral Kalkulus</u>

Jika f(x) kontinu pada a$\leq$x$\leq$b dan F(x) suatu integral tak tentu dari f(x), maka

$\int_a^b \{f(x)\,dx = F(x)]^b_a = F(b) - F(a)$

H. INTEGRAL TAK SEBENARNYA

Integral tertentu $\int_a^b f(x)$ dx disebut integral tak sebenarnya (*improper integral)*, jika:

1. Integral f(x) mempunyai satu atau lebih titik diskontinu pada a$\leq$x$\leq$b
2. Paling sedikit satu dari batas integral adalah tak terhingga

Kasus (1)

1. Jika f(x) kontinu pada $a \le x < b$, tetapi diskontinu pada x = b didefinisikan
   $\int_a^b f(x)$ dx = $\lim_{e \to 0^+} \int_a^{b-e} f(x)dx$ asalkan harga limit tersebut ada
2. Jika f(x) kontinu pada $a < x \le b$, tetapi diskontinu pada x = a didefinisikan
   $\int_a^b f(x)$ dx = $\lim_{e \to 0^+} \int_{a+e}^{b} f(x)dx$ asalkan harga limit tersebut ada
3. Jika f(x) kontinu di semua x pada $a \le x \le b$, kecuali di x = c, a<c<b, didefinisikan
   $\int_a^b f(x)$ dx = $\lim_{e \to 0^+} \int_a^{c-e} f(x)dx \ + \ \lim_{\delta \to 0^+} \int_{c+\delta}^{b} f(x)dx$ asalkan harga limit tersebut ada

Kasus (1)

1. Jika f(x) kontinu pada interval $a \le x \le u$ didefinisikan
   $\int_a^{-\infty} f(x)$ dx = $\lim_{u \to +\infty} \ \int_a^u f(x)dx$ asalkan harga limit tersebut ada
2. Jika f(x) kontinu pada interval $v \le x \le b$ didefinisikan
   $\int_{-\infty}^{b} f(x)$ dx = $\lim_{v \to -\infty} \ \int_v^b f(x)dx$ asalkan harga limit tersebut ada
3. Jika f(x) kontinu pada interval $v \le x \le u$ didefinisikan
   $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)$ dx = $\lim_{v \to -\infty} \ \int_v^a f(x)dx \ + \lim_{u \to -\infty} \ \int_a^u f(x)dx$ asalkan harga limit tersebut ada

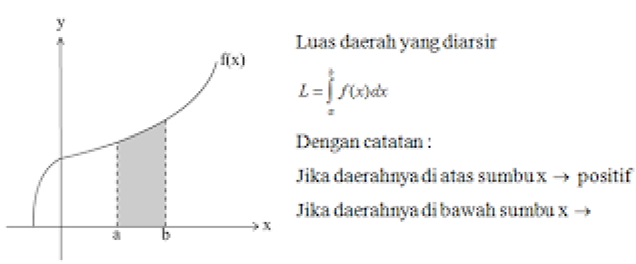
I. APLIKASI ANTIDERIVATIVE

Dalam definisi mengenai integral disebutkan sebagai berikut

1. Jika F(x) adalah fungsi yang turunannya F'(x) = f(x) pada interval $a \le x \le b$, maka F(x) disebut antiderivative (fungsi primitif) dari f(x)
2. Antiderivative F(x) + C disebut integral tak tentu dari f(x) pada $a \le x \le b$ dan ditulis sebagai $\int f(x)dx$, jadi $\int f(x)dx$ = F(x) + C jika F'(x) = f(x)
   Sedangkan F'(x) = F(x) atau $\frac{dF(X)}{DX}$ = F(x) adalah suatu bentuk persamaan diferensial yang paling sederhana

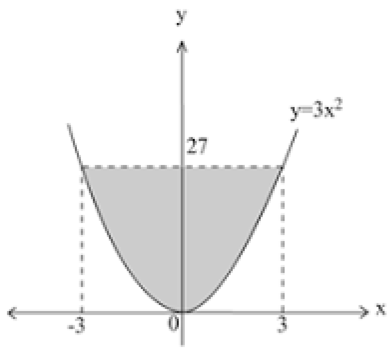
J. BEBERAPA APLIKASI DARI INTEGRAL

1. Perhitungan Luas suatu kurva terhadap sumbu x



Contoh

1. Tentukan luas daerah yang diarsir



Jawab :

Cara I

$$L = \int_{-1}^{3} (27 - 3x^2)dx \quad = 2\int_{0}^{3} (27 - 3x^2)dx$$

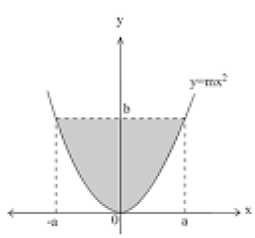
$$= 2\,(27\,x - x^3)\big|_0^3$$

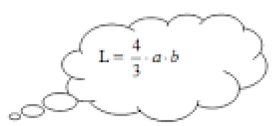
$$= 2\left[(27 \cdot 3 \cdot 3^3) - (27 \cdot 0 - 0^3)\right]$$

$$= 2\left[(81 - 27) - 0\right]$$

$$= 2\,(54) = 108$$

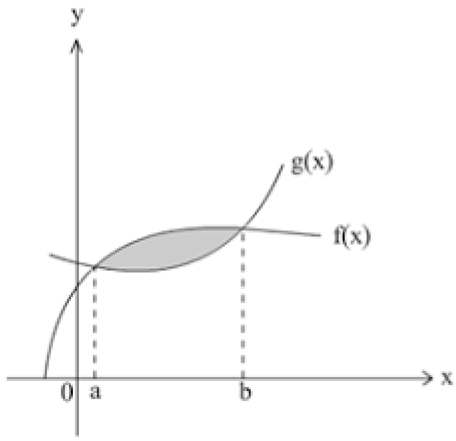
Cara 2 TOP SOLUTION





$$maka \left.\begin{matrix} a = 3 \\ b = 27 \end{matrix}\right\} L = \frac{4}{3}(3)(27) = 108$$

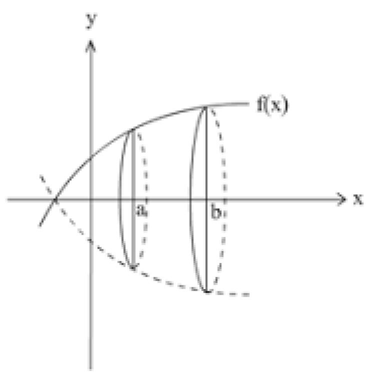
2. Menghitung luas diantara dua buah kurva



Luas yang diarsir $= \int_a^b f(x) - g(x) dx$

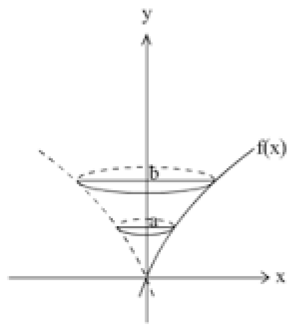
3. Menghitung volume benda putar yang diputar terhadap sumbu koordinat

1. Diputar terhadap sumbu x



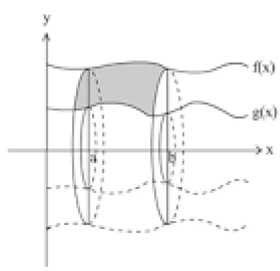
$$\text{Volume} = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

2. Diputar terhadap sumbu y



Volume= $\pi\int_{a}^{b} f^{2}(y)dy$

3. Volume benda putar diantara dua kurva mengelilingi sumbu x,



Volume $\pi\int_{a}^{b} f^{2}(x)-g^{2}(x)dx$