	MODUL X **MATEMATIKA**

Judul	**TRANSPOSE – DETERMINAN - DAN INVERS MATRIKS**	
Penyusun	**Distribusi**	**Perkuliahan**
Nixon Erzed	PAMU UNIVERSITAS ESA UNGGUL	Pertemuan –XI online

Tujuan :

Mahasiswa memahami pengertian dan dapat mencari matriks transpose, derterminan dan Invers Matriks

Materi:

1. Transpose dari suatu matriks
2. Ruang Baris (Row Space) dan Ruang Kolom
3. Rank Matriks
4. Determinan Matriks Persegi
5. Invers Matriks Persegi

MATRIKS LANJUTAN

1. Transpose dari suatu Matriks

Yang dimaksud dengan transpose matriks adalah ketika pada sebuah matriks dilakukan pertukaran antara dimensi kolom dan barisnya. Definisi lain dari matriks transpose adalah sebuah matriks yang didapatkan dengan cara memindahkan elemen-elemen pada kolom menjadi elemen baris dan sebaliknya. Biasanya sebuah matriks transpose disimbolkan dengan menggunakan lambang tanda petik (A') ataupun dengan huruf T kecil di atas (A^T).

Misal $A = (a_{ij})$ berukuran (m x n)

maka transpose dari A adalah matriks A^T berukuran (nxm) adalah $A^T = (a_{ji})$.

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

maka matriks transposnya $A^t = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Pada gambar di atas dapat didefinisikan bahwa matriks m x n berubah menjadi m x n. Jika kita perhatikan, elemen-elemen yang ada pada baris satu berubah posisi menjadi elemen kolom 1. Elemen pada baris 2 berubah menjadi elemen pada kolom 2, begitu juga dengan elemen pada baris ke 3 berubah posisi menjadi elemen kolom ke 3. Sekarang mari kita lihat sifat-sifat yang berlaku untuk transpose matriks.

Beberapa Sifat matriks transpose :

(i) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(ii) $(A^T)^T = A$

(iii) $\lambda(A^T) = (\lambda A)^T$

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$

Catatan :

Bila Matriks A = (a_{ij}) adalah suatu matriks kompleks,

Maka Transpose Hermitian (Conjugate Transpose) yaitu

$A^H = \left(\bar{a}_{ij}\right)^T = \left(\bar{a}_{ji}\right)$, jika z = x – yi maka $\bar{z}$ = x + yi

Contoh :

$A = \begin{pmatrix} 3-i & 1-i \\ i & 3 \end{pmatrix}$ maka $A^H = \begin{pmatrix} 3+i & 1+i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$

Soal Latihan :

Tentukan transpos dari matriks-matriks A, B, C berikut :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

2. Ruang Baris (Row Space) dan Ruang Kolom (Coloum Space) dari suatu Matriks

Misal : Matriks A ukuran (4 x 5) sebagai berikut :

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \Leftarrow \\ \Leftarrow \\ \Leftarrow \\ \Leftarrow \end{matrix} \\ \begin{matrix} \Uparrow & \quad\Uparrow & \quad\Uparrow & \quad\Uparrow & \quad\Uparrow \end{matrix} & \end{array}$$

Tiap – tiap baris/kolom dari matriks A dapat di anggap sebagai vektor dan disebut vektor baris/kolom

Definisi :

Ruang baris dari matriks A (mxn) adalah suatu ruang vektor bagian dari R^n yang dibentuk oleh vektor-vektor baris dari A.

Analogi

Ruang kolom dari matriks A (mxn) adalah suatu ruang vektor bagian dari R^n yang dibentuk oleh vektor-vektor kolom dari A.

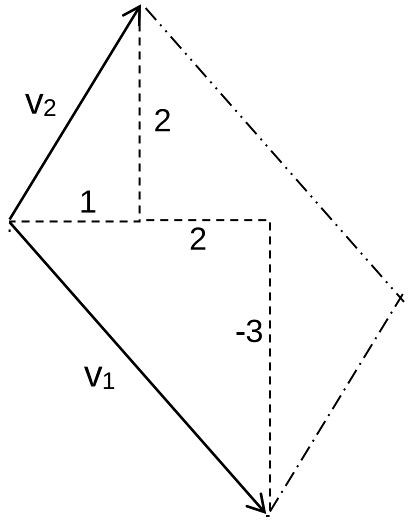
Contoh : Untuk matriks A (2x2)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Untuk baris terdapat :

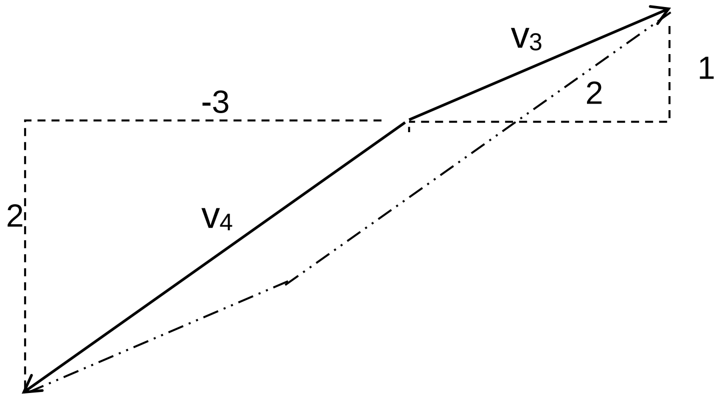
vektor $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ dan vektor $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ruang baris dari matriks A tersebut dibentuk oleh vektor v_1 dan vektor v_2 adalah sebagai berikut :



Ruang kolom dari matriks A dibentuk oleh vektor kolom v_3 dan vektor kolom v_4

$v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $v_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ yaitu sebagai berikut :



3. Rank Matriks

Definisi :

- Rank baris dari matriks A adalah dimensi dari ruang baris matriks A.
- Rank kolom dari matriks A adalah dimensi dari ruang kolom matriks A.
- *Rank Baris = Rank Kolom ditulis **r(A)***

Catatan :

- Rank dari matriks menyatakan jumlah maksimum vektor-vektor baris/kolom yang bebas linier
- Untuk mencari rank dari suatu matriks dapat digunakan transformasi elementer. Dengan mengubah sebanyak mungkin baris/kolom menjadi vektor nol (karena vektor nol adalah bergantung linier).
- Langkah-langkah menentukan Rank (Baris/Kolom):
  1. Tentukan elemen Pivot (pada baris/kolom), untuk mempermudah pilih elemen 1 atau –1
  2. Jadikan nol semua elemen yang sekolom/sebaris dengan pivot tersebut.
  3. Sekarang kita perlu perhatikan lagi baris /kolom yang tertinggal (tanpa baris atau kolom yang terdapat pivot):

     3.1. apabila tinggal dua baris /kolom yang tersisa maka tinggal diperiksa apakah baris/kolom tersebut kelipatan jika ya maka salah satu baris /kolom tersebut dapat dijadikan nol.jika tidak langkah selesai

     3.2. apabila masih lebih dari dua baris/kolom lakukan lagi langkah 1 di atas sampai langkah 3.1.

Contoh :

Tentukan Rank dari matriks A berikut :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

→ **Dengan menentukan Rank Baris**

Langkah 1 :

Pilih Pivot pada baris satu kolom satu, yaitu elemen =1

Langkah 2 :

Dengan mengunakan transformasi elementer baris

$H_{21}^{(-2)}$ (A); $H_{31}^{(-1)}$ (A); dan $H_{41}^{(-1)}$ (A)

diperoleh matriks

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Langkah 3.1 *: tidak diperlukan*

Langkah 3.2:

Karena masih tersisa matrik ukuran (3x3) $\Longrightarrow$ (tanpa baris satu kolom satu atau baris dan kolom yang mengandung piviot) maka kita harus temukan pivot kembali dan ulangi langkah 1 sampai 3.1.

Ulangi langkah 1 :

Plih pivot pada elemen baris 2 kolom 2 yaitu -1 (elemen baris 3 kolom 2 atau baris 4 kolom 2 dapat juga di jadikan pivot)

Langkah 2 : transfomasi elementer

Gunakan transformasi elementer baris

$$H_{32}^{(2)}\ (B); \qquad H_{42}^{(1)}\ (B)$$

sehingga diperoleh matriks C

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & -11 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \Leftarrow \\ \Leftarrow \end{matrix}$$

Langkah 3.1.

Baris 3 dan 4 berkelipatan maka dengan transformasi elementer baris $H_{43}^{(-1)}\ (C)$; akan diperoleh matriks D :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dari pelanksanaan langkah-langkah 1 s/d 3.2 didapatkan
Rank Baris matriks A atau **r(A) = 3**
(banyaknya baris yang bukan baris nol)

→ **Dengan menentukan Rank Baris**

Dengan Cara yang hampir sama dapat digunakan secara kolom.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Pilih pivot pada baris 1 kolom 1 → 1

2. Dengan transformasi $K_{21}^{(-2)}$ (A); $K_{31}^{(-3)}$ (A); $H_{41}^{(-1)}$ (A) diperoleh matriks B :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Ulangi langkah 1

1. Pilih pivot baris 2 kolom 2 (misal ,karena dapat juga elemen baris 3 kolom 2 atau baris 4 kolom 2)
2. Gunakan transformasi kolom $K_{32}^{(-5)}$ (B); $K_{42}^{(2)}$ (B);

   Sehingga diperoleh matriks C sbb:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & & \Downarrow & \Downarrow \end{array} \\ C = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -11 & 6 \\ 1 & 1 & -11 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

3.1. kolom 3 dan 4 berkelipatan maka dengan transformasi kolom $K_{43}^{(6/11)}$ (C); sehinga diperoleh matriks D :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -11 & 0 \\ 1 & 1 & -11 & 0 \end{pmatrix}$$

Dari pelanksanaan langkah-langkah 1 s/d 3.1 didapatkan
Rank Kolom matriks A atau **r(A) = 3**
(banyaknya kolom yang bukan kolom nol)

Kesimpulan : Rank Baris = Rank kolom.

Catatan :

Rank Baris = Rank kolom maka kita dapat mencari rank suatu matrik dengan menentukan mana ukuran yang kecil baris atau kolom, sehingga langkah penyelesaiannya lebih cepat.

4. Determinan Matriks Persegi

4.a. Determinan matriks ordo 2 x 2

Matriks berordo 2 × 2 yang terdiri atas dua baris dan dua kolom. Pada bagian ini akan dibahas determinan dari suatu matriks berordo 2 × 2.

Misalkan A adalah matriks persegi ordo 2 × 2 dengan bentuk

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Determinan matriks A di definisikan sebagai selisih antara perkalian elemen elemen pada diagonal utama dengan perkalian elemen-elemen pada diagonal sekunder.

Determinan dari matriks A dinotasikan dengan ***det A*** atau **|*A*|**. Nilai dari determinan suatu matriks berupa bilangan real.

Berdasarkan definisi determinan suatu matriks, Anda bisa mencari nilai determinan dari matriks A, yaitu sebagai berikut :

$$\det A = |A| = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (a \times d) - (b \times c) = ad - bc$$

Contoh :

untuk A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, maka

$$\det A = |A| = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 1.4 - 2.3 = 4 - 6 = -2$$

4.b. Determinan Matriks Ordo 3 x 3

Determinan untuk matriks berordo > 2x2, harus dilakukan bertahap secara parsial. Terdapat dua metoda untuk menghitung determinan, yaitu :

1. Metoda Sarrus
2. Metoda Ekspansi Kofaktor

Misalkan *A* matriks persegi berordo 3 × 3 dengan bentuk

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

METODA SARRUS

Berikut ini adalah cara menghitung determinan mariks berordo 3×3 dengan cara atau metode Sarrus :

1. Salin kembali kolom pertama dan kolom kedua matriks *A* di sebelah kanan tanda determinan.

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

2. Hitunglah jumlah hasil kali elemen-elemen pada diagonal utama dan diagonal lain yang sejajar dengan diagonal utama (lihat gambar).
   Nyatakan jumlah hasil kali tersebut dengan *Du*

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

Du = $a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32}$

3. Hitunglah jumlah hasil kali elemen-elemen pada diagonal sekunder dan diagonal lain yang sejajar dengan diagonal sekunder (lihar gambar). Nyatakan jumlah hasil harga tersebut dengan *Ds*.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

Ds = $a_{31}\, a_{22}\, a_{13} + a_{32}\, a_{23}\, a_{11} + a_{33}\, a_{21}\, a_{12}$

4. Sesuai dengan definisi determinan matriks maka determinan dari matriks *A* adalah selisih antara *Du* dan *Ds* => *Du* – *Ds*.

det *A* = $\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$

$= (a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32}) -$
$(a_{31}\, a_{22}\, a_{13} + a_{32}\, a_{23}\, a_{11} + a_{33}\, a_{21}\, a_{12})$

Contoh :

Diketahui matriks *A* = $\begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Tentukan nilai determinan matriks *A*.

Jawab :

det *A* = $\left[\begin{array}{ccc} -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right]\begin{array}{cc} -3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}$

= [(–3×1×(–1)) + (4×3×1) + (2×2×0)]
– [(1×1×2) + (0×3×(–3)) + (–1×2×4)]

= (3+12+0) – (2+0–8) = 21

Jadi, nilai determinan matriks *A* adalah 21.

METODA EKSPANSI KOFAKTOR

Metode ini tidak hanya digunakan untuk menghitung determinan matriks 2x2 atau 3x3 tapi digunakan untuk matriks yang berordo lebih besar lagi seperti, 4x4 atau 5x5 dan seterusnya. Untuk menghitung determinan menggunakan metode ini, rumusnya dijamin oleh Teorema berikut.

Teorema 1

Determinan matriks A yang berukuran $n \times n$ dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri dalam suatu baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menambahkan hasil-hasil kali yang dihasilkan yakni untuk setiap $1 \le i \le n$ dan $1 \le j \le n$, maka

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j)

atau

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i)

Untuk lebih memperjelas apa itu kofaktor, perrhatikan definisi dibawah ini.

Definisi 2.

*Jika A adalah matriks kuadrat, maka **minor entri a_{ij}** dinyatakan oleh M_{ij} dan didefinisikan menjadi determinan submatriks yang tetap setelah baris **ke-i** dan kolom **ke-j** dicoret dari A.*
*Bilangan $(-1)^{i+j}.M_{ij}$ dinyatakan oleh C_{ij} dan dinamakan **kofaktor entri** a_{ij}*

Contoh 1

Misalkan kita punya matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

a. Tentukan minor entri a_{11}, a_{12}, dan a_{13}.
   Tentukan juga kofaktor entri M_{11}, M_{12} dan M_{13}

b. Hitung determinan dari matriks A

Penyelesaian.

a. minor entri a_{11}, a_{12}, a_{13} dan kofaktor entri M_{11}, M_{12} dan M_{13}

- **Minor entri a_{11}** adalah $M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 5(8)–4(6)= 16$

  kofaktor a_{11} adalah $C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = (-1)^2(16) = 16$

- **minor entri a_{12}** adalah $M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 2(8) – 1(6) = 10$

  kofaktor a_{12} adalah $C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = (-1)^3(10) = -10$

- **minor entri a_{13}** adalah $M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(4) – 1(5) = 3$

  kofaktor a_{13} adalah $C_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = (-1)^4(3) = 3$

b. Determinan matriks A

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ &= 3(16) + 1(-10) + (-4)(3) \\ &= 48 – 10 – 12 \\ &= 26 \end{aligned}$$

Contoh 5.

Tentukan determinan matriks A = $\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 8 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian.

Menggunakan yang diberikan pada **Teorema** diatas dengan mengambil i = 3 dan j = 1, 2, dan 3, maka diperoleh.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 8 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33}$$

$$= a_{31}(-1)^{3+1}M_{31} + a_{32}(-1)^{3+2}M_{31} + a_{33}(-1)^{3+3}M_{31}$$

$$= a_{31}M_{31} - a_{32}M_{31} + a_{33}M_{31}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 3.[6(8)-0(6)] - 2.[0(8)-8(0)] + 2.[0(6)-8(6)]$$

$$= 144 - 0 - 96$$

$$= 48$$

4.c. Determinan Matriks Ordo > (3 x 3) dengan Metoda Ekspansi Kofaktor

Seperti yang sudah dijelaskan diawal 4.b, metode ekspansi kofaktor tidak hanya digunakan untuk menghitung determinan matriks 2x2 atau 3x3 tapi digunakan untuk matriks yang berordo lebih besar lagi seperti, 4x4 atau 5x5. Prinsip perhitungan adalah dengan cara berulang pada sub matriks satu tingkat dibawahnya. Untuk lebih jelasnya ikuti contoh berikut ini.

Contoh 1

Tentukan determinan matriks B = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Penyelesaian.

dengan menggunakan kolom pertama pada matriks B sebagai kofaktor dan berdasarkan **Teorema** diatas dengan mengambil i = 1, 2, 3, 4 dan j = 1 maka diperoleh.

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} + a_{41}C_{41}$

$= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{21}(-1)^{2+1}M_{21} + a_{31}(-1)^{3+1}M_{31} + a_{41}(-1)^{4+1}M_{41}$

$= a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31} - a_{41}M_{41}$

$$= 2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

hitung lagi determinan untuk sub-matriks 3×3 dengan metoda yang sama (untuk sub-matriks 3x3 boleh juga dihitung dengan metoda Sarrus)

= 2[ambil i = 1 dan j = 1, 2, 3] – 1[ambil i = 1, 2, 3 dan j = 3]

{untuk matriks ketiga dan keempat tidak perlu dihitung karena koefesiennya 0, sehingga apabila dikali, hasilnya akan tetap = 0}

$= 2[a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}] - 1[a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33}] + 0 - 0$

$= 2[a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13}] -$
$1[a_{13}(-1)^{1+3}M_{13} + a_{23}(-1)^{2+3}M_{23} + a_{33}(-1)^{3+3}M_{33}]$

$= 2[a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}] - 1[a_{13}M_{13} + a_{23}M_{23} + a_{33}M_{33}]$

$= 2\left(0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) - 1\left(1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right.$
$\left. - 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)$

= 2(0[1(3)-2(0)] – 1[2(3)-1(0)] + 1[2(2)-1(1)]) –
1(1[2(2)-1(1)] – 0[1(2)-1(3)] + 3[1(1)-2(3)])

= 2(0 – 6 + 3) – 1(3 – 0 + 3(-5))

= -6 + 12

= 6

Contoh 2.

Tentukan determinan matriks

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 10 & 13 & 17 \\ 2 & 6 & 7 & 10 & 14 \\ 3 & 10 & 20 & 22 & 40 \\ 1 & 5 & 10 & 12 & 16 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian.

$$det(E) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 10 & 13 & 17 \\ 2 & 6 & 7 & 10 & 14 \\ 3 & 10 & 20 & 22 & 40 \\ 1 & 5 & 10 & 12 & 16 \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} + a_{41}C_{41} + a_{51}C_{51}$$
$$= a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31} - a_{41}M_{41} + a_{51}M_{51}$$

Selanjutnya, karena $M_{11}, M_{21}, M_{31}, M_{41}$ dan M_{51} merupakan determinan 4×4, maka kita uraikan lagi dengan menggunakan kofaktor. Ambil $i = 1, 2, 3, 4, 5$ dan $j = 1$.

Dengan menggunkaan Metode Sarrus, diperoleh

$$= 9 \cdot 184 - 6 \cdot 100 + 10 \cdot 12 - 5 \cdot 138$$
$$= 1656 - 600 + 120 - 690$$
$$= 486$$

Dengan menggunkaan Metode Sarrus, diperoleh

$$= 2 \cdot 184 - 6 \cdot 64 + 10 \cdot 4 - 5 \cdot 0$$
$$= 368 - 384 + 40 - 0$$
$$= 24$$

Dengan menggunkaan Metode Sarrus, diperoleh

$$= 2 \cdot 100 - 9 \cdot 64 + 10 \cdot -2 - 5 \cdot -48$$
$$= 200 - 576 - 20 + 240$$
$$= -156$$

Dengan menggunkaan Metode Sarrus, diperoleh

$$= 2 \cdot 12 - 9 \cdot 4 + 6 \cdot -2 - 5 \cdot -3$$
$$= 24 - 36 - 12 + 15$$
$$= -9$$

Dengan menggunkaan Metode Sarrus, diperoleh

$$= 2 \cdot 138 - 9 \cdot 0 + 6 \cdot -48 - 10 \cdot -3$$
$$= 276 + 0 - 288 + 30$$
$$= 18$$

Jadi, diperoleh

$$= 1 \cdot 486 - 4 \cdot 24 + 2 \cdot -156 - 3 \cdot -9 + 1 \cdot 18$$
$$= 486 - 96 - 312 + 27 + 18$$
$$= 123$$

5. Invers Matriks Persegi

Definisi Invers Matriks

Misalkan *A* dan *B* adalah dua matriks yang berordo 2 × 2 dan memenuhi persamaan *AB* = *BA* = *I*2 maka matriks *A* adalah matriks invers dari matriks *B* atau matriks *B* adalah matriks invers dari matriks *A*.

Contoh :

perhatikanlah perkalian matriks-matriks berikut.

Misalkan A = $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6-5 & 3-3 \\ -10+10 & -5+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= I_2$$

Perkalian *AB* menghasilkan I_2 (matriks identitas berordo 2 × 2)

Misalkan P = $\begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ dan Q = $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$

$$PQ = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7+8 & 14-14 \\ -4+4 & 8-7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= I_2$$

Perkalian *PQ* menghasilkan I_2.

Berdasarkan perkalian-perkalian tersebut, ada hal yang harus Anda ingat, yaitu perkalian matriks *A* dan matriks *B* menghasilkan matriks identitas (*AB* = *I*) Ini menunjukkan matriks *B* merupakan matriks invers dari matriks *A*, yaitu *B* = *A*–1 atau bisa juga dikatakan bahwa matriks *A* merupakan invers dari matriks *B*, yaitu *A* = *B*–1. Begitu pula untuk perkalian matriks *P* dan matriks *Q* berlaku hal serupa.

Contoh :

Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

tentukan Apakah matriks *B* merupakan invers dari matriks *A*?

Jawab :

Matriks *B* merupakan invers dari matriks *A* jika memenuhi persamaan

AB = *I*

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+2 & -2+2 \\ 1-1 & 2-1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

= I

Oleh karena *AB* = *I* maka matriks *B* merupakan invers dari matriks *A*.

5.a. Penurunan Rumus Invers Matriks Ordo 2 × 2

Rumus Invers Matriks Berordo 2 × 2

Misalkan A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ invers dari *A* adalah A^{-1}, yaitu

$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, dengan det *A* ≠ 0

Contoh :

Tentukan invers dari matriks D = $\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$

Jawab :

det D = $\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -7 & 11 \end{vmatrix}$ = 3(11) – (–7)(–6) = 33 – 42 = –9

$$D^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} 11 & 6 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-9}\begin{bmatrix} 11 & 6 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{11}{9} & -\frac{6}{9} \\ -\frac{7}{9} & -\frac{3}{9} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{11}{9} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{7}{9} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

5.b. Penurunan Rumus Invers Matriks Ordo > 2 × 2

Invers matriks A yang berordo 3x3 dapat dicari dengan menggunakan aturan :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} . Adj(A)$$

Keterangan :

A^{-1} = Invers dari matriks A
Adj(A) = matriks Adjoin dari A
det(A) = determinan dari matriks A

Perhatikan paparan berikut :

Misal A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Cara menentukan matriks Adj(A) adalah :

$$\text{Ajd(A)} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Matriks Invers A atau $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} . Adj(A)$

Contoh:

Hitunglah invers matriks A **=** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Jawab:

Pertama-tama kita hitung determinan A.

$$- \qquad - \qquad -$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ -3 & 4 \end{matrix}$$

$$+ \qquad + \qquad +$$

= [1.(-2).5] + [2.3.(-3)] + [(-1).0.4] – [(-3).(-2).(-1)] – [4.3.1] – [5.0.2]

= -10 – 18 + 0 + 6 – 12 – 0 = -34

atau

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$$

= 1(-10-12) – 2(0-(-9)) + (-1)(0-6)

= -22 -18 + 6 = -34

Jadi, determinan A adalah -34.

Adjoin dari A adalah:

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -22 & -14 & 4 \\ -9 & 2 & -3 \\ -6 & -10 & -2 \end{bmatrix}$$

Invers dari matriks A adalah :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}.Adj(A)$$

Diperoleh :

$$A^{-1} = \frac{1}{-34}\begin{bmatrix} -22 & -14 & 4 \\ -9 & 2 & -3 \\ -6 & -10 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{22}{34} & \frac{14}{34} & -\frac{4}{34} \\ \frac{9}{34} & -\frac{2}{34} & \frac{3}{34} \\ \frac{6}{34} & \frac{10}{34} & \frac{2}{34} \end{bmatrix}$$