VEKTOR DAN MATRIKS (Lanjutan)

A. MATRIKS SINGULAR, NONSINGULAR, DAN RANK

Suatu matriks bujur sangkar A, disebut singular apabila det (A) = 0, Jika det(A) ≠0, maka A disebut matriks yang nonsingular. Matriks yang nonsingular mempunyai invers, sedangkan matriks singular tidak mempunyai invers.

Dengan transformasi elementer baris/kolom, kita dapat menjadikan nol sebanyak mungkin baris/kolom matriks. Banyak maksimum baris/kolom yang tidak dapat dijadikan nol disebut rank matriks, ditulis r(A).

Matriks bujur sangkar A berordo n adalah singular jika r(a) < n, dimana determinan yang mempunyai baris/kolom nol, harga det = 0. Determinan dari matriks A dikalikan dengan determinan dari matriks B = determinan matriks AB.

$|A|$. $|B|$ = $|AB|$ (Jika ordo A dan B sama)

Dapat pula mencari rank suatu matriks dengan pertolongan determinan. Suatu matriks A ≠ 0 mempunyai rank = r jika paling sedikit satu minor berukuran (r x r) nya ≠ 0, sementara setiap minor berukuran (r+1) x (r+1) nya jika ada berharga = 0

B. MATRIKS INVERS

Sebuah matriks bujur sangkar A berordo n

$$\begin{matrix} a11 & a12 & a1n \\ a21 & a23 & a2n \\ an1 & an2 & ann \end{matrix}$$

Mempunyai invers, jika ada suatu matriks B_1, sehingga AB = BA I_n. Matriks B disebut invers matriks A_1 ditulis A^{-1}.

Contoh

Carilah invers dari A = $\begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{matrix}$

$\begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{matrix} \begin{matrix} a1 & a2 \\ a3 & a4 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$

Jika dikalikan $\begin{matrix} 2a1 + a3 & 2a2 + a4 \\ 4a1 + 3a3 & 4a2\_3a4 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$

Atau

2a1+a3 = 1

2a2+a4 = 0

4a1+3a3 = 0

4a2+3a4 = 1

Jika kita selesaikan, diperoleh a1 = 3/2, a2 = -1/2, a3 = -2, a4 = 1

Jadi $A^{-1} = \begin{matrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{matrix}$

Dapat juga diselidiki pada contoh diatas bahwa $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$. Cara seperti diatas hanya baik untuk matriks yang berordo kecil, yaitu untuk n = 2. Untuk ordo-ordo yang lebih besar dapat dipelajari selanjutnya.

Ternyata bahwa matriks-matriks yang mempunyai invers adalah matriks-matriks yang non singular (determinannya ≠ 0 atau rank nya r = n). Invers matriks jika ada adalah tunggal (hanya satu).

$(A^{-1})^{-1} = A$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Seperti pada matrik A = (a_{ij}). Kita sebut kofaktor dari elemen a_{ij} sebagai C_{ij}, maka matriks

$$\begin{matrix} C11 & C12 & C1n \\ C21 & C23 & C2n \\ Cn1 & Cn2 & Cnn \end{matrix}$$

Dinamakan matriks kofaktor A. Transpose dari matriks ini dinamakan adjoin A, dinotasikan dengan adj (A).

Kita hendak mencari matriks adjoin A =

$$\begin{matrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{matrix}$$

Kofaktor dari kesembilan elemen dari A adalah sebagai berikut:

$C_{11} = + \begin{matrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{matrix} = -18$

$C_{12} = - \begin{matrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{matrix} = 2$

$C_{13} = + \begin{matrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{matrix} = 4$

C_{21} = - $\begin{matrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{matrix}$ = -11

C_{22} = + $\begin{matrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{matrix}$ = 14

C_{23} = - $\begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{matrix}$ = 5

C_{31} = + $\begin{matrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{matrix}$ = -10

C_{32} = - $\begin{matrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{matrix}$ = -4

C_{33} = - $\begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{matrix}$ = -8

Jadi Adj (A) =

$$\begin{matrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{matrix}$$

Dengan pertolongan matriks Adjoin, kita dapat mencari invers suatu matriks:

$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)}$, dengan syarat det (A) ≠ 0

Carilah A^{-1} dengan menggunakan matriks adjoin sebagai berikut:

A =

$$\begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{matrix}$$

Maka C_{11} = 3, C_{12} = -4, C_{21} = -1, C_{22} = 2

Adj(A)

$$\begin{matrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{matrix}$$

Det (A) =

$\begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{matrix}$ = 2

Jadi A^{-1}

$$\frac{\begin{matrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{matrix}}{2}$$

$= \begin{matrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{matrix}$

Carilah A^{-1} dengan menggunakan matriks adjoin sebagai berikut:

A =

$$\begin{matrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{matrix}$$

$= 2 \begin{matrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{matrix} + \begin{matrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{matrix}$

= -36 -10

= -46

$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)} = \frac{1}{-46} \begin{matrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{matrix} = \begin{matrix} 9/23 & 11/46 & 5/23 \\ -1/23 & -7/23 & 2/23 \\ -2/23 & -5/46 & 4/23 \end{matrix}$