

MODUL ONLINE 1 ESA143 - MATEMATIKA

Materi 2

HUBUNGAN & FUNGSI

Disusun Oleh

TEAM DOSEN



Universitas

Esa Unggul

Bahan 3.1.

**PENGERTIAN
GARIS (LINES) DAN TITIK (POINTS) ,
PASANGAN BERURUTAN (ORDERED PAIRS),
KUADRAN (HYPERPLANES) SERTA TITIK (POINTS)**

A. GARIS (LINES) DAN BILANGAN RIIL (THE REAL NUMBERS)

1. Atas dasar Bahan 2.1 sebelumnya, setiap garis lurus (the real line) menyatakan :
 - a. Himpunan semua bilangan riil (dengan notasi R) – the set of all real numbers, karena garis lurus memuat semua bilangan riil (the real numbers) yang terdiri dari :
 - Bilangan rasional (rasional numbers) yang terdiri dari :
 - ★ Bilangan bulat (integers)
 - ★ Bilangan pecahan (fractions).
 - Bilangan irasional (irrational numbers).
 - b. Suatu variabel, karena variabel adalah sesuatu yang dapat dinyatakan dengan angka atau nilai dari bilangan riil.
2. Setiap bilangan riil merupakan titik di atas garis lurus (the real line).

B. PASANGAN BERURUTAN (ORDERED PAIRS)

1. Pasangan tidak berurutan (unordered pairs)

Set $\{a, b\} = \{b, a\} \rightarrow$ merupakan dua set yang sama karena mempunyai elemen yang sama (atas dasar Bahan 2.5. sebelumnya tentang sets), tetapi tanpa memperdulikan kesamaan urutan atau order elemen masing-masing set. Pasangan elemen setiap set itu disebut pasangan variabel yang tidak berurutan (**unordered pairs**).

S1-MATEMATIKA I (MATEMATIKA EKONOMI)

2. Pasangan berurutan (ordered pairs)

Set $\{a, b\} \neq \{b, a\} \rightarrow$ merupakan dua set yang tidak sama (walaupun memiliki elemen yang sama), karena urutan atau order elemen masing-masing set tidak sama, kecuali apabila $a = b$.
Pasangan elemen pada setiap elemen itu disebut pasangan variabel yang berurutan (**ordered pairs**).

3. Contoh :

- Menyebut anggota dalam suatu pertandingan tanpa urutan (unordered pairs). Tetapi menyebut pemenang 1, 2, dan seterusnya harus berurutan (ordered pairs).
- Untuk set dengan elemen ordered pair, dimana elemen pertama untuk umur dan elemen kedua untuk berat, tentu akan beda antara set $\{45, 60\}$ dan $\{60, 45\}$.
- Pasangan bilangan (koordinat) pada 4 kuadran atau disebut the Cartesian Product.

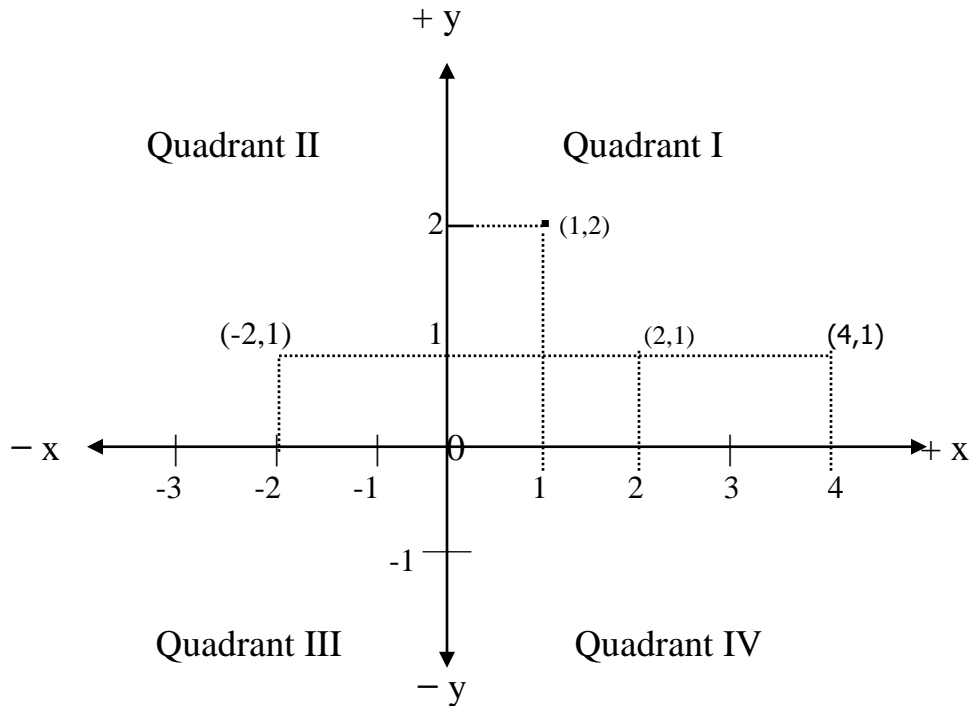
Catatan : Pengertian ordered pairs dan unordered pairs di atas, juga berlaku untuk elemen set lebih dari dua variabel, yaitu dengan sebutan ordered and unordered triples (3 elemen), quadruples (4 elemen), quintuples (5 elemen), dan seterusnya.

C. ORDERED PAIRS PADA KUADRAN (THE XY PLANE)

Dua variabel, misal variabel x dan y , yang dinyatakan oleh dua garis lurus atau sumbu yang berpotongan, yaitu sumbu/garis horizontal untuk variabel x dan sumbu vertikal untuk variabel y , menciptakan (lihat Diagram 3.1.1. di bawah) :

1. 4 (empat) kuadran (quadrant) I, II, III, IV, atau disebut *the xy plane*, dimana :
 - Kuadran I dimana terdapat jumlah tak terbatas dari ordered pairs dengan urutan $+x$ (angka x positif) dan $+y$ (angka y positif).
2. Kuadran II dimana terdapat jumlah tak terbatas dari ordered pairs dengan urutan $-x$ (angka x negatif) dan $+y$.

Diagram 3.1.1
THE (COORDINATE) XY PLANE ATAU
THE CARTESIAN PRODUCT



- Kuadran III dimana terdapat jumlah tak terbatas dari ordered pairs dengan urutan $-x$ dan $-y$ (angka y negatif).
 - Kuadran IV dimana terdapat jumlah tak terbatas dari ordered pairs dengan urutan $+x$ dan $-y$.
3. Titik-titik kombinasi dari titik x pada sumbu/garis x dan titik y pada sumbu/garis y secara berurutan, disebut *the xy ordered pairs*.
Misal, titik kombinasi atau the xy ordered pair $(2,4)$ berbeda dengan the xy ordered pair $(4,2)$.
4. **Himpunan ordered pairs (the set of all ordered pairs) pada kuadran (the xy plane atau the rectangular coordinate plane atau disebut the Cartesian product) bersifat tak terbatas.**

Set ordered pairs pada kuadran atau the plane itu disebut *the Cartesian product (named after Descartes)*.

S1-MATEMATIKA I (MATEMATIKA EKONOMI)

The Cartesian product juga disebut *direct product*, karena elemennya berupa ordered pairs yang merupakan produk dari set x dan set y (dengan notasi $x * y$, atau (x, y)), dimana set x dan y adalah set dari bilangan riil,

Dengan kata lain, setiap set pada the Cartesian product merupakan ordered pairs, dengan elemen pertama dari variabel x dan elemen kedua dari variabel y , atau ditulis (x, y) . Oleh karena itu, orderd pair $(1, 2)$ beda dengan $(2, 1)$.

Produk dari set x dan set y dimaksud mempunyai jumlah yang tak terbatas, sehingga the Cartesian product atau the xy plane itu merupakan suatu set bersifat tak terbatas dari ordered pair atau titik pada kuadran (an infinite set of points or ordered pairs).

Notasi dari the Cartesian product sebagai berikut :

- The Cartesian product dengan set (ordered pairs) atau titik pada kuadran yang memiliki 2 elemen (2 dimensi) dari set x dan set y , mempunyai notasi the Cartesian product adalah $\mathbf{R * R}$ atau $\mathbf{R^2}$:

$$\mathbf{x * y = \{(1, 2), (2, 1), (4, 1)\}}$$

atau

$$\mathbf{x * y = \{a, b \mid a \in x \text{ dan } b \in y\}}$$

dimana a dan b adalah elemen dari bilangan riil (real numbers) yang diberi notasi R , sehingga lebih umum lagi menjadi

$$\mathbf{x * y = \{a, b \mid a \in R \text{ dan } b \in R\}}$$

dimana x dan y adalah set dari R

- The Cartesian product dengan set (ordered pairs) atau titik yang memiliki 3 elemen (3 dimensi) dari sumbu x , sumbu y dan sumbu z , mempunyai notasi the Cartesian product adalah $\mathbf{R * R * R}$ atau $\mathbf{R^3}$:

$$\mathbf{x * y * z = \{a, b, c \mid a \in x, b \in y, c \in z\}}$$

atau

$$\mathbf{x * y * z = \{a, b, c \mid a \in R, b \in R, c \in R\}}$$

- The Cartesian product dengan ordered pairs atau titik pada kuadran dengan n elemen (n dimensi) mempunyai notasi $\mathbf{R^n}$.

Bahan 3.2.

**HUBUNGAN (RELATIONS)
DAN
FUNGSI (FUNCTION)**

**A. HUBUNGAN (RELATIONS)
PADA THE CARTESIAN PRODUCT**

Sebagaimana dibahas pada Bahan 3.1. di atas, pada kuadran atau the xy plane atau The Cartesian product, setiap ordered pair (x, y) atau $x * y$ merupakan satu titik, atau sebaliknya.

Jadi terdapat hubungan yang bersifat unik atau satu-satu dan timbal balik (double uniqueness).

Dengan demikian, terdapat hubungan satu-satu (one-to-one correspondence) antara set ordered pairs (the set of ordered pairs) dan set titik (the set of points) pada the Cartesian product.

Setiap titik atau ordered pair pada the xy plane atau the Cartesian product menunjukkan terjadi hubungan (relation) :

Antara setiap bilangan riil atau titik pada garis atau variabel x dengan bilangan riil atau titik pada garis atau variabel y ,

jadi,

terdapat set (x, y) atau ordered pair atau titik pada the xy plane sebagai dari hasil hubungan (asosiasi) atas dasar suatu aturan dari setiap bilangan atau angka dari x dengan bilangan atau angka dari y .

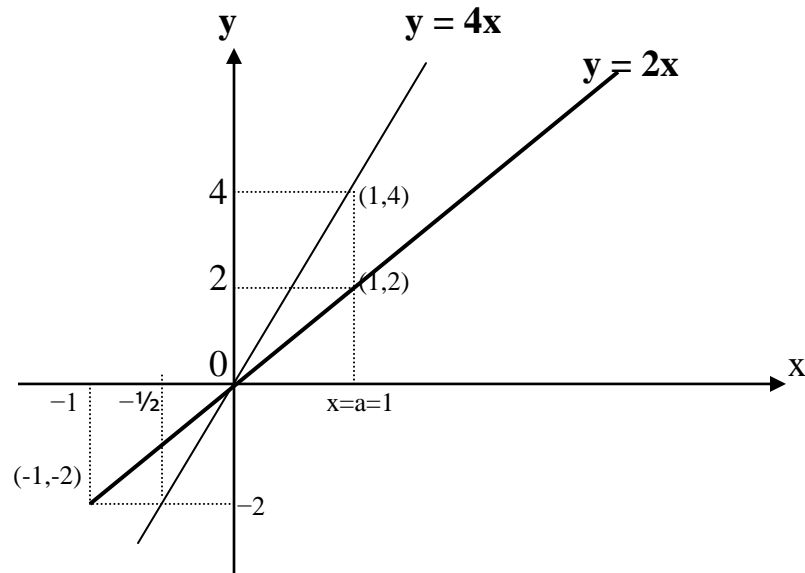
Misal pada Diagram 3.1.1. di atas :

Titik $(x, y) = (1, 2)$ di kuadran I, menunjukkan bahwa atas dasar suatu aturan, maka untuk $x = 1$ mempunyai hubungan dengan $y = 2$.

Juga titik $(x, y) = (-2, 1)$ di kuadran II menunjukkan hubungan $x = -2$ dengan $y = 1$ berdasarkan suatu aturan.

**B. SIFAT HUBUNGAN :
SATU-SATU (ONE-TO-ONE) ATAU BUKAN**

**Diagram 3.2.1
HUBUNGAN (RELATION) DAN FUNGSI (FUNCTION)**



Berapa bilangan atau angka atau nilai dari set y hasil dari hubungan dengan setiap bilangan atau angka atau nilai dari x ?

Penentunya adalah suatu aturan, yang akan menentukan salah satu diantara dua jenis hubungan :

1. Hubungan bukan bersifat satu-satu atau kausal.

Dengan hubungan ini, maka atas dasar suatu aturan satu bilangan dari set x akan berhubungan atau menghasilkan lebih dari satu bilangan dari set y . Jadi hubungan tidak bersifat kausal atau satu-satu (one-to-one relation).

Suatu aturan dimaksud hanya disebut sebagai **hubungan** (relation atau a multivalued function).

Contoh :

Pada Diagram 3.2.1. di atas, terdapat set $\{x, y \mid y \leq x\}$ yang antara lain termasuk pairs atau titik $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,-4)$, sehingga untuk satu bilangan $x = 1$ menghasilkan hubungan dengan 3 bilangan y yaitu $y = 0$, $y = 1$ dan $y = -4$.

S1-MATEMATIKA I (MATEMATIKA EKONOMI)

Dengan set atau aturan $y \leq x$ dimaksud, maka hubungan y terhadap x bukan bersifat satu-satu atau kausal, jadi hanya merupakan hubungan saja.

Area dari set dimaksud di bawah garis $y = 2x$.

2. Hubungan merupakan **fungsi** yaitu hubungan bersifat satu-satu atau kausal (one-to-one relation or correspondence, atau unique relation)

Dengan hubungan ini, maka atas dasar suatu aturan satu bilangan dari set x akan berhubungan atau menghasilkan hanya satu bilangan dari set y . Jadi hubungan bersifat kausal atau satu-satu (one-to-one relation).

Suatu aturan dimaksud disebut sebagai **fungsi** (function) atau a single-valued function.

Contoh ;

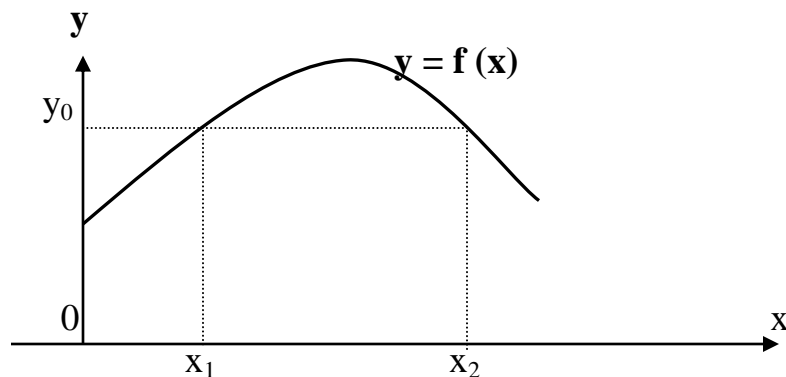
Pada Diagram 3.2.1. di atas, set $\{(x, y) \mid y = 2x\}$ adalah suatu set ordered pairs termasuk $(1,2)$, $(0,0)$ dan $(-1, -2)$, menghasilkan hubungan satu-satu atau kausal, dimana untuk $x = 1$ hanya menghasilkan $y = 2$, $x = 0$ hanya menghasilkan $y = 0$, $x = -1$ hanya menghasilkan $y = -2$.

Dengan set atau aturan $y = 2x$ dimaksud, maka hubungan y terhadap x bersifat satu-satu atau kausal (one-to-one relation or correspondence).

3. Fungsi juga berbentuk hubungan satu bilangan y terhadap lebih dari satu x

Diagram 3.2.2. di bawah menunjukkan hubungan bersifat **fungsi**, tetapi dimana lebih dari satu bilangan x menentukan hanya satu nilai y . Hubungan ini tetap bersifat satu-satu atau kausal (one-to-one relation) antara x menentukan y .

Diagram 3.2.2.
Fungsi Dengan Angka y Lebih Dari Satu



C. PENGERTIAN DAN PENULISAN FUNGSI

1. Definisi fungsi

Berdasarkan uraian pada butir B. di atas, maka definisi fungsi sebagai berikut :

Fungsi adalah set dari ordered pairs (x, y) dimana setiap bilangan x menentukan hanya satu bilangan y .
Seperti dikemukakan dalam buku Chiang and Wainwright (Book 1) halaman 17 :
A function is therefore a set of ordered pairs with the property that any x value uniquely determines a y value.
This definition of function corresponds to what would be called a single-valued function in the older terminology. What was formerly called a multivalued function is now referred to as a relation or correspondence.

Dalam ilmu ekonomi fungsi umumnya menyatakan fungsi persamaan tingkah laku (behavioral equation functions).

2. Penulisan (notasi) fungsi

Fungsi, misalnya untuk 2 variabel x dan y , ditulis dengan notasi $y = f(x) \rightarrow$ baca y adalah fungsi dari x (y is said to be a function of x , atau y equals of x).

Jadi y sebagai variabel ditentukan (**dependent variable**, atau juga disebut **endogeneous variable**), sedangkan x adalah variabel penentu (independent variable, atau juga disebut **exogeneous variable**) terhadap y .

3. Fungsi merupakan transformasi atau *mapping*

Fungsi, seperti $y = f(x)$, juga disebut *a mapping or transformation* yang menunjukkan hubungan antara y dengan x , dimana :

- ☑ Notasi f merupakan suatu aturan (a rule) yang mentransformasi (transformed atau mapped) set x ke dalam set y (the set x is mapped or transformed into the set y , yang ditulis dengan notasi :

$$f: x \rightarrow y$$

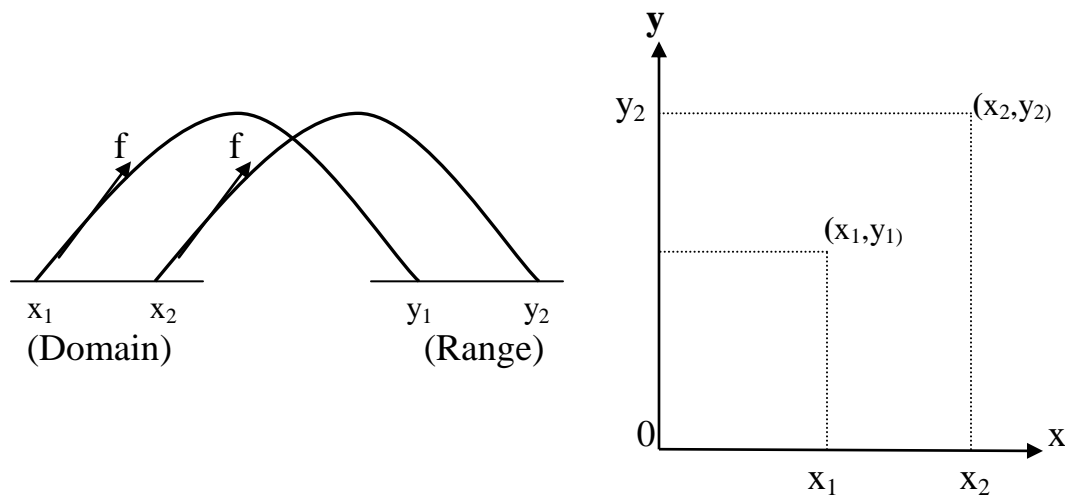
dimana :

- ★ Tanda \rightarrow menyatakan transformasi (mapping atau transforming).

S1-MATEMATIKA I (MATEMATIKA EKONOMI)

- ★ Notasi f menandakan (specification) suatu **aturan (a rule)** dari mapping atau transforming.
Selain huruf kecil f , untuk notasi juga digunakan huruf lain seperti g dan z , huruf besar F dan G , huruf Yunani (Greek) kecil seperti ϕ (phi) ψ (psi) atau huruf besar phi Φ dan psi Ψ .
- ★ Pada fungsi seperti $y = f(x)$, maka :

Diagram 3.2.3. DOMAIN DAN RANGE SERTA RULE f



- ▶ Variabel x disebut *the argument of the function* atau *independent variable* yaitu variabel penentu.
Sedangkan, set dari semua bilangan atau angka dari variabel x disebut *the domain of the function*. Jadi set ini juga merupakan subset dari *the set of all real numbers*. Lihat Diagram 3.2.3. di atas.
- ▶ Variable y disebut *the value of the function* atau *dependent variable* yaitu variable yang ditentukan.
Sedangkan, angka y (the value of y) hasil dari mapping suatu angka (value) x , disebut *the image of that x value*.
Set dari semua images disebut *the range of the function*.
bilangan atau angka dari variabel x disebut *the domain of the function*. Lihat Diagram 3.2.3 di atas.
- ▶ Catatan :
 - ◆ Domain dan range $y = f(x)$ mencerminkan variabel-variabel dan fungsi dalam ilmu ekonomi, yaitu terbatas

S1-MATEMATIKA I (MATEMATIKA EKONOMI)

pada bilangan positif (nonnegative real numbers). Jadi diagram dan kurva digambar pada kuadran I.

- ◆ Dalam buku Henderson and Quandt (Book 3) halaman 363-364 dikemukakan :

*The relation $y = f(x)$ (read "y is a function of x") means that **a rule** exists by which it is possible to associate values of the variable y with values of the variable x.*

Examples are $y = 1/x$; $y = 3x^2$, $y = \ln \sin x$ and $y = 1$ when x is an odd integer and $y = 0$ for any other value of x.

In each case, values of y correspond to given values of x according to the rule of association specified in the form of the function.

A function may not be defined for all possible values of x. Examples :

$y = 1/x$ cannot be evaluated for $x = 0$.

$y = x^2$, it has all the real numbers as its domain.