MODUL MATEMATIKA 2

(IND 124)

MODUL SESI 10

TURUNAN DALAM RUANG BERDIMENSI - n

DISUSUN OLEH

SEPTIAN RAHMAT ADNAN, S.Si.,M.Si

UNIVERSITAS ESA UNGGUL

2020

Pokok Bahasan : TURUNAN DALAM RUANG BERDIMENSI - n

Sub Pokok Bahasan :

- Fungsi dengan dua peubah atau lebih
- Turunan Parsial

Tujuan Instruksional Umum :

Agar mahasiswa dapat memahami dan menyelesaikan soal dan aplikasi yang berkaitan dengan Fungsi dengan dua peubah atau lebih dan Turunan Parsial

Tujuan Instruksional Khusus :

Agar mahasiswa mampu menjelaskan dan dapat menyelesaikan masalah yang terkait dengan :

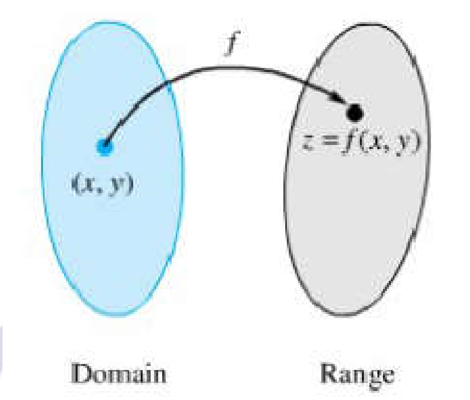
- Fungsi dengan dua peubah atau lebih
- Turunan Parsial

A. FUNGSI DENGAN DUA PEUBAH ATAU LEBIH

Sejauh ini kita membahas dua jenis fungsi. Pertama, fungsi yang dinyatakan dengan f(x) = x^2, menghubungkan bilangan real x dengan bilangan real f(x) lainnya. Kita menyebutnya dengan fungsi bernilai rea; dari peubah ril. Jenis fungsi yang ekdua, diilustrasikan dengan

$$f(x, y) = \left\langle x^3, e^x \right\rangle$$

menghubungkan bilangan real x dengan vektor f(x). Kita menyebutnya dengan fungsi bernilai vektor dari peubah real



Sekarang kita arahkan perhatian kita pada sebuah fungsi bernilai real dengan dua peubah real, yaitu fungsi f(gambar 1) yang menghubungkan setiap pasangan berurutan (x,y) pada suatu himpunan D dalam suatu bidang dengan sebuah bilangan real dari f(x,y). Misalnya

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2$$

$$g(x, y) = 2x\sqrt{y}$$

perhatikan bahwa f(-1,4) = $(-1)^2 + 3(4)^2 = 49$ dan g(-1,4) = 2(-1) $(4)^{1/4}$

Himpunan D disebut daerah asal (domain) suatu fubgsi. Jika tidak dinyatakan secara spesifik, kita dapat menyatakan D sebagai daerah asal alami, yaitu himpunan seluruh titik (x,y) pada suatu bidang dimana fungsi tersebut masuk akal dan mengahsilkan bilangan real. Untuk

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2$$

daerah asal alaminya adalah seluruh bidang untuk

$$g(x, y) = 2x\sqrt{y}$$

daerah asalnya adalah

$$\{(x, y) : x \varepsilon R, y \geq 0\}$$

Daerah hasil dari sebuah fungsi adalah himpunan dari nilai-nilainya. Jika Z = f(x,y) maka kita menyebut x dan y sebagai peubah bebas da z sebagai peubah takbebas. Seluruh hal yang diuraikan diatas berlaku untuk fungsi bernilai real dengan tiga peubah real. Kita akan menggunakan fungsi-fungsi seperti di atas dengan bebas

Contoh 1

Pada bidang xy, sketsalah daerah asal alami untuk

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{y-x^2}}{x^2+(y-1)^2}$$

Solusi

Agar rumus ini menjadi masuk akal, kita harus mengeluarkan $\{(x,y) : y<x^2\}$ dan titik (0,1). Daerah asal yang dihasilkan dapat dilihat pada gambar

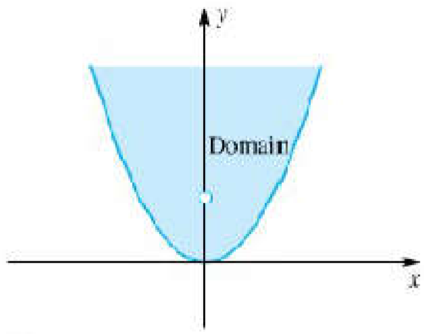


Figure 2

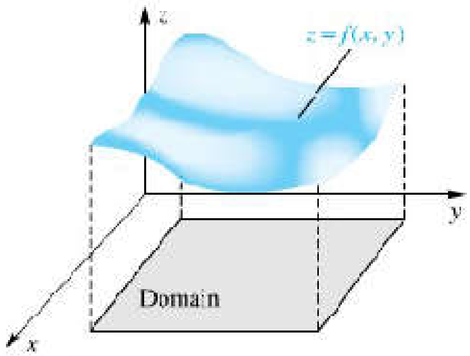


Figure 3

B. TURUNAN PARSIAL

Andaikan f adalah fungsi dua peubah x dan y. Jika y dijaga agar tetap konstan, misalnya y = y_0 maka f (x,y_0) adalah fungsi dengan peubah tunggal x. Turunannya di x = x0 disebut turunan parsial f terhadap x di (x_0,y_0) dan dinyatakan sebagai $f_x(x_0,y_0)$ jadi

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

Dengan cara yang serupa, turunan parsial f terhadap y di (x_0,y_0) dinyatakan dengan $fx(x_0,y_0)$ dan dirumuskan dengan

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

daripada menghitung $f_x(x_0,y_0)$ dan $f_y(x_0,y_0)$ secara langsung dari rumus di dalam kotak di atas, biasanya kita dapat menentukan $f_x(x_0.y_0)$ dan $f_x(x_0.y_0)$ dengan menggunakan aturan-aturan standar turunan, kemudain kita mensubtitusikan $x=x_0$ dan $y = y_0$

Contoh 1

Tentukan $f_x(1,2)$ dan $f_y(1,2)$ jika $f(x,y) = f(x,y) = x^2y + 3y^3$

Solusi

Untuk menentukan $f_x(x.y)$ kita anggap y sebagai konstanta dan mendifensialkannya terhadap x, menghasilkan

$$f_x(1,2) = 2xy + 0$$

jadi,

$$f_x(1,2) = 2.1.2 = 4$$

dengan cara yang sama kita anggap x sebagai konstanta dan mendiferensialkannya terhadap y dan menghasilkan

$$f_y(x,y) = 2xy + 0$$

jadi

$$f_y(1,2) = 1^2 + 9.2^2 = 37$$

jika z = f(x,y) kita menggunakan notasi-notasi alternatif berikut

$$f_x(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

$$f_x(x_0,y_0)=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$$

$$f_x(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

$$f_x(x_0,y_0)=\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$$

simbol ∂ bersifat khusus di dalam matematika dan disebut tanda turunan parsial simbol-simbol $\frac{\partial}{\partial x}$ dan $\frac{\partial}{\partial y}$ merepresentasikan operator-operator linear, sama seperti operator linear D_x dan $\frac{d}{dx}$ yang kita jumpai pada bab sebelumnya

Contoh 2
Jika

$$z=x^2\sin(xy^2)$$

tentukan

$$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$$

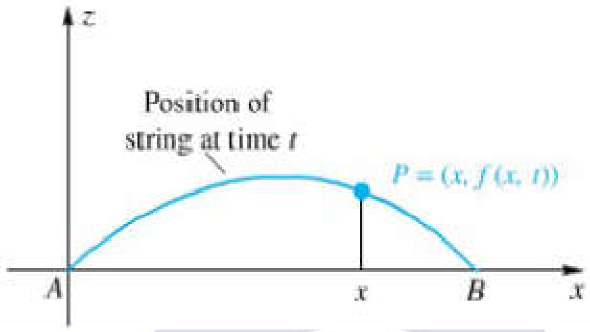
Solusi

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= x^2\frac{\partial}{\partial x}[\sin(xy^2)]+\sin(xy^2)\frac{\partial}{\partial x}(x^2)\\ &= x^2\cos(xy^2)\frac{\partial}{\partial x}(xy^2)+\sin(xy^2)\cdot 2x\\ &= x^2\cos(xy^2)\cdot y^2+2x\sin(xy^2)\\ &= x^2y^2\cos(xy^2)+2x\sin(xy^2)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\cos(xy^2)\cdot 2xy=2x^3y\cos(xy^2)$$

Interpretasi Geometrik dan Interpretasi Fisis
Tinjaulah permukaan yang mempunyai persamaan z = f(x,y). Bidang y = y0 memotong permukaan ini pada kurva bidang QRP (Gambar 1) dan nilai dari $f_x(x_0,y_0)$ adalah kemiringan garis singgung terhadap kurva ini di $P(x_0,y_0, f(x_0,y_0))$. Demikian pula, bidang $x = x_0$ memotong permukaan tersebut di kurva bidang LPM (Gambar 2) dan $f_y(x_0,y_0)$ adalah kemiringan garis singgung dengan kurva ini di P

Turunan-turunan parsial juga dapat diinterpretasikan sebagai laju perubahan. andaikan sebuah senar biola terbentang diantara titik A dan B dan bergetar pada bidang xz. Gambar 3 menunjukan posisi senar tersebut pada waktu t. Jika z = F(x,t) menyatakan tinggi senar di titik P dengan absis x pada waktu t, maka $\partial z/\partial x$ adalah kemiringan senar di P dan $\partial z/\partial t$ adalah laju waktu dari perubahan ketinggian dari P di sepanjang garis vertikal yang diketahui. Dengan kata lain $\partial z/\partial t$ adalah kecepatan vertikan dari P

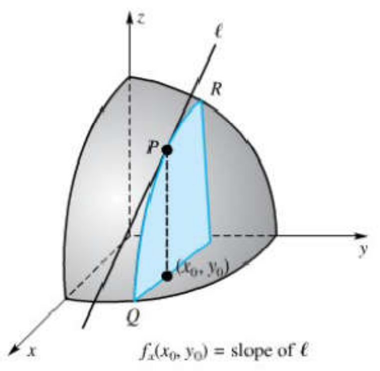


Gambar 3

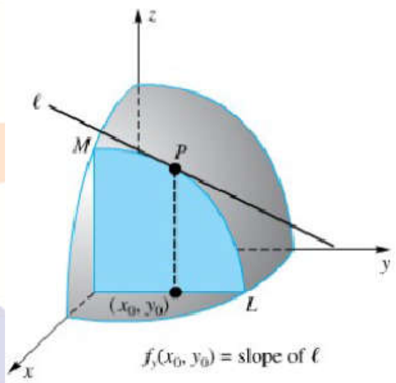
Contoh 3
Permukaan

$$z = f(x, y) = \sqrt{9 - 2x^2 - y^2}$$

dan bidang y = 1 berpotongan dalam sebuah kurva seperti pada gambar 1. Tentukan persamaan-persamaan parametrik untuk garis singgung $(\sqrt{2},1,2)$



Gambar 1



Gambar 2

Solusi

$$f_x(x, y) = \tfrac{1}{2}(9 - 2x^2 - y^2)^{-1/2}(-4x)$$

sehingga

$$f_x\left(\sqrt{2},1\right) = -\sqrt{2}$$

Bilangan ini adalah kemiringan garis singgung terhadap kurva di $(\sqrt{2},1,2)$ dalam hal ini $-\sqrt{2}/1$ adalah rasio kenaikan terhadap penambahan disepanjang garis singgung tersebut. Hasilnya bahwa garis ini mempunyai bilangan-bilangan arah $\left(1, 0, -\sqrt{2}\right)$ dan karena garis ini melalui $-\sqrt{2}/1$ maka

$$x = \sqrt{2} + t, \qquad y = 1, \qquad z = 2 - \sqrt{2}t$$

menghasilkan persamaan-persamaan parametrik yang diinginkan

Contoh 4
Volume gas tertentu berhubungan dengan suhu T dan tekanan P nya berdasarkan hukum gas PV = 10T, dimana V diukur dalam suatu inci kubik, P dalam satuan pon per inci kuadrat, dan T dalam derajat Kelvin (K). Jika V dijaga agar tetap konstan pada nilai 50, berapakah laju perubahan tekanan terhadap suhu ketika T = 200 ?

Solusi
Karena P = 10T/V.

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{10}{V}$$

Jadi

$$\left.\frac{\partial P}{\partial T}\right|_{T=200,\, V=50} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

Dengan demikian tekanan bertambah dengan laju 1/5 pon per inci kuadrat per derajat Kelvin.

Turunan Parsial yang Lebih Tinggi
Karena turunan parsial dari satu fungsi x dan y, secara umum adalah sebuah fungsi lain dari dua peubah yang sama tersebut, maka turunan tersebut dapat didiferensialkan secara parsial terhadap sumbu x atau y, menghasilkan empat buah turunan parsial kedua (second partial derivative) dari f.

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} \qquad f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$$

Contoh 5

Tentukan empat turunan parsial kedua dari

$$f(x, y) = xe^y - \sin(x/y) + x^3y^2$$

Solusi

$$f_x(x, y) = e^y - \frac{1}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 3x^2y^2$$

$$f_y(x, y) = xe^y + \frac{x}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 2x^3y$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{1}{y^2}\sin\left(\frac{x}{y}\right) + 6xy^2$$

$$f_{yy}(x, y) = xe^y + \frac{x^2}{y^4}\sin\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{2x}{y^3}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 2x^3$$

$$f_{xy}(x, y) = e^y - \frac{x}{y^3}\sin\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 6x^2y$$

$$f_{yx}(x, y) = e^y - \frac{x}{y^3}\sin\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 6x^2y$$

Perhatikan bahwa contoh 5 f_{xy}=f_{yx} yang sebenarnya merupakan kasus untuk fungsi dengan duapeubah yang dijumpai pada bab pertama. Kriteria untuk kesamaan ini akan dibahas pada subbab berikutnya

Turunan-turunan parsial ketiga atau lebih dapat didefinisikan secara analogis, dan notasi penulisannya pun serupa. Jadi jika f adalah fungsi dengandua peubah x dan y, maka turunan parsial ketiga f diperoleh dengan mendiferensialkan f secara parsial, pertama terhadap x dan kemudial dua kali terhadap y yang dapat dinyatakan dengan

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\,\partial x} = f_{xyy}$$

Secara keseluruhan, terdapat delapan turunan parsial ketiga

Fungsi dengam Lebih dari dua Peubah

Misalkan f adalah fungsi dengan tiga peubah x,y dan z. Turunan parsial f terhadap x di x,y,z dinyatakan dengan $f_x(x,y,z)$ atau

$$\partial f(x, y, z)/\partial x$$

dan didefinisikan sebagai

$$f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

Jadi, $f_x(x,y,z)$ dapat diperoleh dengan memperlakukan y dan z sebagai konstanta dan mendiferensialkannya terhadap x.

Turunan-turunan parsial terhadap y dan z didefinisikan secara analogis. Turunan-turunan parsial dari fungsi dengan empat peubah atau lebih dapat didefinisikan dengan cara yang sama. Turunan-turunan parsial seperti f_{xy} dan f_{xyz} yang menggunakan pendiferensialan terhadap lebih dari satu peubah disebut turunan parsial campuran

Contoh 6
Jika

$$f(x, y, z) = xy + 2yz + 3zx.$$

Tentukan f_x, f_y,f_z

Solusi
Untuk memperoleh f_x kita anggap y dan z sebagai konstanta dan mendiferensialkannya terhadap peubah x, jadi

$$f_x(x, y, z) = y + 3z$$

untuk mencari f_y, kita akan x dan z sebagai konstanta, dan mendiferensialkannya terhadap peubah y

$$f_y(x, y, z) = x + 2z$$

dengan cara serupa

$$f_z(x, y, z) = 2y + 3x$$

Contoh 7
Jika

$$T(w, x, y, z) = ze^{w^2+x^2+y^2}.$$

Tentukan seluruh turunan parsial pertama dan

$$\frac{\partial^2 T}{\partial w\, \partial x}, \frac{\partial^2 T}{\partial x\, \partial w}, \text{ and } \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

Solusi
Empat turunan parsial pertama adalah

$$\frac{\partial T}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial w}(ze^{w^2+x^2+y^2}) = 2wze^{w^2+x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(ze^{w^2+x^2+y^2}) = 2xze^{w^2+x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(ze^{w^2+x^2+y^2}) = 2yze^{w^2+x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(ze^{w^2+x^2+y^2}) = e^{w^2+x^2+y^2}$$

Turunan parsial lainnya adalah

$$\frac{\partial^2 T}{\partial w\,\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial w\,\partial x}\left(ze^{w^2+x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial w}\left(2xze^{w^2+x^2+y^2}\right) = 4wxze^{w^2+x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial w} = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial w}\left(ze^{w^2+x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2wze^{w^2+x^2+y^2}\right) = 4wxze^{w^2+x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(ze^{w^2+x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(e^{w^2+x^2+y^2}\right) = 0$$

LATIHAN SOAL B
Tentukan seluruh turunan parsial pertama dari setiap fungsi berikut

1. $f(x, y) = (2x - y)^4$
2. $f(x, y) = (4x - y^2)^{3/2}$
3. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$
4. $f(x, y) = e^x \cos y$
5. $f(x, y) = e^y \sin x$
6. $f(x, y) = (3x^2 + y^2)^{-1/3}$
7. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$
8. $f(u, v) = e^{uv}$
9. $g(x, y) = e^{-xy}$
10. $f(s, t) = \ln(s^2 - t^2)$
11. $f(x, y) = \tan^{-1}(4x - 7y)$
12. $F(w, z) = w \sin^{-1}\left(\dfrac{w}{z}\right)$
13. $f(x, y) = y \cos(x^2 + y^2)$
14. $f(s, t) = e^{t^2 - s^2}$
15. $F(x, y) = 2 \sin x \cos y$
16. $f(r, \theta) = 3r^3 \cos 2\theta$

DAFTAR PUSTAKA

- **Varberg, Purcell, Rigdon, ,KALKULUS, edisi kesembilan , Erlangga, Jakarta, 2011**
- **Murray R.Spieqel,CALCULUS LANJUT, edisi kedua, Erlangga, Jakarta, 2008.**