MODUL MATEMATIKA 2

(IND 124)

MODUL SESI 8

DERET BERGANTI TANDA

DISUSUN OLEH

SEPTIAN RAHMAT ADNAN, S.Si.,M.Si

UNIVERSITAS ESA UNGGUL

2020

Pokok Bahasan : DERET BERGANTI TANDA
Sub Pokok Bahasan :

- Deret Berganti tanda,konvergensi mutlak dan konvergensi bersyarat
- Deret Pangkat

Tujuan Instruksional Umum :
Agar mahasiswa dapat memahami dan menyelesaikan soal dan aplikasi yang berkaitan dengan deret berganti tanda

Tujuan Instruksional Khusus :
Agar mahasiswa mampu menjelaskan dan dapat menyelesaikan masalah yang terkait dengan :

- Deret Berganti tanda,konvergensi mutlak dan konvergensi bersyarat
- Deret Pangkat

A. DERET BERGANTI TANDA, KONVERGENSI MUTLAK DAN KONVERGENSI BERSYARAT

Pada dua subbab sebelumnya kita telah mempelajari deret dengan suku-suku negative. berikut ini kita akan meniadakan batasan tersebut, dengan memmungkinkansuatusuku mempunyai nilai negative. secara khusus, kita akan mempelajari deret bergantitanda (alternatis series), yaitu deret berbentuk :

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

dimana $a_n > 0$ untuk seluruh m. Sebuah contoh yang penting adalah deret harmonic berganti tanda.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\dots.$$

kita telah melihat bahwa deret harmonic divergen, tetapi berikut ini kita akan melihat bahwa deret harmonic berganti tanda bersifat konvergen.

UJI KONVERGENSI

Andaikan barisan $[a_n]$ menurun, yaitu $a_{n+1} < a_n$ untuk seluruh n. Misalkan pula S_n mempunyai makna seperti biasa. Jadi, untuk suatu deret berganti tanda

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

kita mempunyai

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 - a_2 = S_1 - a_2$$

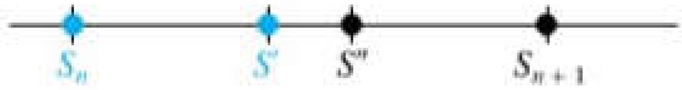
$$S_3 = a_1 - a_2 + a_3 = S_2 - a_3$$

$$S_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = S_3 - a_4$$

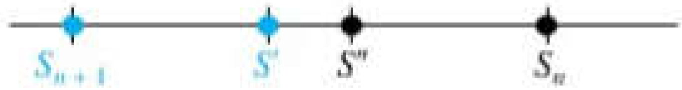
dan seterusya. Interpretasi geometric dari jumlah-jumlah parsial ini ditunjukan pada gambar di bawah ini :

$$\left| S'' - S' \right| \leq \left| S_{n+1} - S_n \right| = a_{n+1}$$

Perhatikan bahwa suku-suku genap S_2, S_4, S_6, ... meningkat dan mempunyai batas-atas, sehingga pasti konvergen menuju sebuah limit. Katakanlah S'. Demikian pula, suku-suku ganjil S_1, S3, S_5, ... menurun dan mempunyai batas-bawah. Deret ini juga konvergen, katakanlah S". Baik S, maupun S,, berada di antara S_n dan S_{n+1} untuk seluruh n (Lihat gambar di bawah ini) *n* even



n odd



$$\left|S''-S'\right| \le \left|S_{n+1}-S_n\right| = a_{n+1}$$

Jadi, syarat $a_{n+1} \to 0$ ketika $n \to 0$ akan menghasilkan bahwa S′ = S″ dan konsekuensinya. Deret tersebut konvergen menuju nilai yang sama, yang kita sebut S. Akhirnya kita mencatat bahwa, karena S berada di antara S_n dan S_{n+1}

$$\left|S''-S'\right| \le \left|S_{n+1}-S_n\right| = a_{n+1}$$

dalam hal ini kesalahan yang dibuat denagn menggunakan Sn sebagai hampiran jumlah S dari seluruh deret tidak lebih dari besaran suku pertama yang diabaikan. Ini merupakan pembuktian dan teorema berikut ini.

TEOREMA A UJI DERET BERGANTI TANDA
Misalkan

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

adalah deret berganti tanda dengan

$$a_n > a_{n+1} > 0$$

Jika

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

maka deret tersebut konvergen. Disamping itu, kesalahan yang dibuat dengan menggunakan jumlah S_n dari n suku pertama untuk menghampiri jumlah S dari deret tersebut tidak lebih dari

$$a_{n+1}$$

Contoh 1
Tunjukan bahwa deret harmonic berganti tanda

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.......$$

konvergen. berapa banyakkah suku dari deret ini yang diperlukan agar memperoleh jumlah parsial S_n yang sangat mendekati 0,01 dari jumlah Sdari seluruh deret ?

Solusi

harmonic berganti tanda memenuhi hipotesis Teorema A sehingga deret tersebut konvergen. Kita menghendaki agar

$$\left|S-S_n\right|\leq 0,01$$

dan hal ini akan terpenuhi jika an ≤ 0,01 . karena a_n+1 = 1/(n+1), kita memerlukan 1/(n+1) ≤ 0,01, yang terpenuhi jika n ≥ 99. Jadi kita harus mengambil 99 suku untuk memastikan bahwa kita telah mencapai tingkat akurasi yang diharapkan. Hal ini memberikan gambaran kepada anda seberapa lambat deret harmonic berganti tanda akan konvergen.

Contoh 2

Tunjukan bahwa

$$\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+.......$$

konvergen, Hitunglah S_5 dan perkirakan kesalahan (error) yang dibuat dengan menggunakan S_5 ini sebagai nilai untuk jumlah seluruh deret.

Solusi

Uji deret berganti tanda berlaku dan menjamin konvergensi.

$$S_5=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{24}+\frac{1}{120}=0,6333$$

$$\left|S-S_5\right|\leq a_6=\frac{1}{6!}=0,0014$$

Contoh 3

Tunjukan bahwa

$$\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{2^n}$$

konvergen

Solusi

untuk lebih memahami deret ini, kita tulis saja beberapa suku pertamanya :

$$\frac{1}{2}-1+\frac{9}{8}-1+\frac{25}{32}-\frac{56}{64}+.....$$

deret ini berganti tanda dan

$$\lim_{n\to\infty} n^2/2^n$$

Tetapi sayangnya suku-suku itu tidak menurun pada bagian awalnya. Meskipun demikian, suku-suku tersebut mulai mengecil setelah dua suku pertama. Hal ini cukup baik karena apa yang terjadi di awal satu deret tidak pernah mempengaruhi konvergensi atau divergensinya.Untuk menunjukan bahwa barisan $\{n^2/2^n\}$ menurun dimulai dari suku ketiga, marilah kita melihat fungsi

$$f(x)=\frac{x^2}{2^x}$$

Perhatikan bahwa jika x ≥ 3, turunanya :

$$f'(x)=\frac{2x.2^n-x^2 2^n\ln 2}{2^{2x}}=\frac{x2^x\left(2-x\ln 2\right)}{2^{2x}}$$

$$=\frac{x\left(2-0,69x\right)}{2^x}<0$$

Jadi, f menurun di [3,∞) demikian pula $\{n^2/2^n\}$ menurun ketikan n ≥ 3.

KONVERGENSI MUTLAK

Apakah deret seperti ini :

$$1+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\frac{1}{36}+.....$$

dimana terdapat pola dua suku positif diikuti oleh satusuku negative, konvergen datau divergen ? Uji deret bergantitanda tidak berlaku. Meskipun demikian, karena deret yang bersesuaian yang seluruhnya terdiri dari suku-suku positif

$$1+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\frac{1}{36}+.....$$

konvergen (deret p dengan p = 2), tampaknya dapat diterima bahwa deret yang sama dengan beberapa suku negative juga akan konvergen. ini merupakan esensi dari teorema berikut :

TEOREMA B UJI KONVERGENSI MUTLAK

Jika

$$\sum |u_n|$$

konvergen, maka

$$\sum u_n$$

konvergen

TEOREMA C UJI RASIO MULTAK

Misalkan

$$\sum u_n$$

adalah deret dengan suku-suku taknol dan andaikan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\rho$$

1. Jika p < 1 maka deret tersebut konvergen mutlak (sehingga konvergen)
2. Jika p > 1 maka deret tersebut divergen
3. Jika p = 1 maka uji ini tidak memberikan kesimpulan

Contoh 4

Tunjukan bahwa

$$\sum (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n!}$$

konvergen mutlak

Solusi

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{3^n}{n!}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{3}{n+1} = 0$$

Contoh 5
Ujilah konvergensi atau divergensi dari

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{n^2}$$

Solusi
Jika anda menuliskan 100 suku pertama dari deret ini, anda akan menjumpai bahwa tanda-tanda sukunya bervariasi secara acak. Deret ini relative agak sulit untuk di analisis secara langsung. Meskipun demikian,

$$\left| \frac{\cos(n!)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

sehingga deret tersebut konvergen mutlak berdasarkan uji perbandingan biasa.

KONVERGENSI BERSYARAT
kesalahan yang sering terhadi adalah ketika seseorang mencoba untuk membalik Teorema B. Kita tidak dapat mengatakan bahwa konvergensi tersebut mengimplikasikan konvergensi mutlak. Hal ini sepenuhnya salah, berdasarkan deret harmonic berganti tanda. Kita sudah mengetahui bahwa

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.......$$

tetapi

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+.......$$

divergen. Deret

$$\sum u_n$$

dikatakan konvergen bersyarat jika

$$\sum u_n$$

konvergen tetapi

$$\sum |u_n|$$

divergen. Deret harmonic berganti tanda adalah contoh utama dari deret konvergen bersyarat, tetapi masih banyak contoh lainnya.

Contoh 6
Tunjukan bahwa

$$\sum (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

konvergen bersyarat

Solusi

$$\sum (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

konvergen menurut uji deret berganti tanda, meskipun demikian.

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$$

divergen, karena deret ini adalah deret p dengan p = ½

TEOREMA D TEOREMA SUSUN ULANG
Suku-suku dari deret konvergen mutlak dapat disusun ulang dapat disusun uang tanpa mempengaruhi baik konvergensi maupun jumlah deretnya

Sebagai contoh, deret

$$1+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}-\frac{1}{81}+.....$$

konvergen mutlak, penyusunan ulang

$$1+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}-\frac{1}{36}+.....$$

membuat deret ini menjadi konvergen dan mempunyai jumlah yang sama dengan deret semula.

LATIHAN SOAL A

TUNJUKAN DARI DERET DI BAWAH INI MERUPAKAN KONVERGEN DENGAN NILAI YANG BERUBAH-UBAH

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{3n+1}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n$
8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n\sqrt{n}}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{e^n}$
11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)}$
12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n!}$

B. DERET PANGKAT
Sejauh ini,kita telah mempelajari apayang disebut deret konstanta,yaitu deret yang berbentuk

$$\sum u_n$$

dimana setiap u_n adalah bilangan. Sekarang , kita akan meninjau deret fungsi yaitu deret yang terbentuk

$$\sum u_n(x)$$

Sebuah contoh khas dari deret seperti ini adalah

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 3x}{9} + ...$$

Tentunya, begitu kita mensubtitusikan sebuah nilai untuk x, berarti kita kembali lagi ke wilayah yang sudah kita kenal yaitu deret konstanta.

Terdapat dua pertanyaan penting yang dapat diajukan mengenaik deret fungsi :

1. Untuk x yang bagaimanakah deret tersebut akan konvergen ?
2. Untuk fungsi yang bagaimanakan deret tersebut akan konvergen dalam hal ini berapakah jumlah S(x) dari deret tersebut ?

Situasi umum deret fungsi adalah pokok bahasan yang dibahas dalamkuliah kalkulus lanjut.Meskipun demikian di dalam kalkulus dasar kita dapat mempelajari deret khusus yang disebut deret pangkat. Deret pangkat dalam x :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + ax + ax^2 + ax^3 + ...$$

Contoh 1
Untuk x yang bagaimanakah deret pangkat

$$s(x)=\frac{a}{1-x},-1<x<1$$

akan konvergen dan berapakah jumlahnya ? asumsikan a ≠ 0

Solusi

Kita sebenarnya telah mempelajari deret ini pada sbubbab sebelumnya (dengan r mrngantikan posisi x) dan disebut deret geometrik. Deret ini konvergen untuk -1 < x < 1dan mempunyai jumlah S(x) yang dinyatakan dengan

$$s(x)=\frac{a}{1-x},-1<x<1$$

saat -1 < x < 1

Contoh 2

Bagaimakah himpunan konvergensi untuk

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)2^n}+1+\frac{1}{2}\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\frac{x^2}{2^2}+\frac{1}{4}\frac{x^2}{2^3}+.....$$

Solusi

Perhatikan bahwa beberapa suku bisa negative (jika x negative). Marilah kita lakukan uji konvergensi mutlak dengan menggunakan Uji Rasio Mutlak

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{x^{n+1}}{(n+2)2^{n+1}}+\frac{x^n}{(n+1)2^n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{2}.\frac{n+1}{n+2}=\frac{|x|}{2}$$

Deret tersbut konvergen mutlak (berarti konvergen) ketika p =[x]/2 < 1 dan divergen ketika [x]/2 > 1. Konsekuensinya deret tersebut konvergen ketika [x] < 2 dan divergen saat [x] > 2.

Contoh 3

Tentukan himpunan konvergensi untuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Solusi

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^n}{n!}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0$$

Kita menyimpulkan dari Uji Rasio Mutlak bahwa deret tersebut konvergen untuk seluruh x

Contoh 4
Tentukan himpunan konvergensi untuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$$

Solusi

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)x^{n+1}}{n!x^n}\right] = \lim_{n\to\infty}(n+1)|x| = \begin{cases} 0,(jika x=0) \\ \infty,(jika \neq 0) \end{cases}$$

Kita menyimpulkan bahwa deret tersebut konvergen hanya di x = 0 seperti pada gambar di bawah ini
……….

TEOREMA A
Himpunan konvergensi untuk deret pangkat

$$\sum a_n x^n$$

selalu berupa sebuah selang dari ketiga jenis tersebut :

I. Titik tunggal x = 0

II. Selang (-R, R) ditambahkan kemungkinan salah satu atau kedua titik ujungnya

III. Seluruh garis bilangan ril

Didalam (i), (ii), (iii) deret tersebut dikatakan mempunyai jari-jari konvergensi masing-masing 0, R dan ∞

TEOREMA B

Deret pangkat

$$\sum a_n x^n$$

konvergen mutlak pada bagian dalam dari selang konvergensinya

Tentu saja deret tersebut bahkan mungkin konvergen mutlak pada titik-titik ujung dari selang konvergensinya

Contoh 5

Tentukan himpunan konvergensi dari

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)^2}$$

Solusi

Kita dapat menerapkan uji rasio mutlak

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+2)^2} + \frac{(x-1)^n}{(n+1)^2}\right] = \lim_{n\to\infty}|n+1|\frac{(x-1)}{(n+2)}$$

$$= |x+1|$$

Jadi deret tersebut konvergen jika [x – 1] < 1 yaitu jika 0 < x < 2 deret tersebut divergen jika [x -1] > 1. Deret tersebut juga konvergen, baik pada titik-titik ujung 0 maupun 2

Contoh 6

Tentukan himpunan konvergensi untuk

$$\frac{(x+2)^2 \ln 2}{2.9} + \frac{(x+2)^3 \ln 3}{3.27} + \frac{(x+2)^4 \ln 4}{4.81} + ...$$

Solusi
Suku ke – n nya adalah

$$u_n = \frac{(x+2)^n \ln n}{n.3^n}, n \geq 2$$

Jadi,

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(x+2)^{n+1}\ln(n+1)}{(n+1)3^{n+1}} .+ \frac{n3^n}{(x+2)^n \ln n}\right]$$

$$= \frac{|x+2|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{|x+2|}{3}$$

kita mengetahui bahwa deret tersebut konvergen ketika p < 1 yaitu ketika [x + 2] < 3 atau secara ekuivalen -5 < x < 1 tetapi kita harus memeriksa titik-titik ujung -5 dan 1. Ketika x = -5

$$u_n = \frac{(-3)^n \ln}{n.3^n} = (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

dan

$$\sum (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

konvergen dengan menggunakan uji deret berganti tanda.(alternating series test). ketika x = 1, U_n= (ln n)/n dan

$$\sum (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

divergen menurut perbandingan dengan deret harmonic. Kita menyimpulkan bahwa deret tersebut konvergen pada selang -5 ≤ x ≤1

LATIHAN SOAL B
Tentukan himpunan konvergensi dari deret pangkat berikut
Petunjuk : Terlebih dahulu tentukan rumus untuksuku ke- n kemudian gunakan Uji Rasio Mutlak

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n^2}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!}$

DAFTAR PUSTAKA

- **Varberg, Purcell, Rigdon, ,KALKULUS, edisi kesembilan , Erlangga, Jakarta, 2011**
- **Murray R.Spieqel,CALCULUS LANJUT, edisi kedua, Erlangga, Jakarta, 2008.**