MATRIKS

BAHAN KULIAH

DRA SURYARI PURNAMA, MM

Universitas Esa Unggul

2018

Matriks

Pokok Bahasan : Pendahuluan Matriks

Sub Pokok Bahasan : A. Pengertian Matriks
B. Operasi Matriks
1. Penjumlahan dan pengurangan
2. Perkalian skalar/bilangan dengan matriks
3. Transpose Matriks
4. Perkalian antar matriks
5. Jenis-jenis matriks

Tujuan Instruksional Umum : Agar mahasiswa dapat memahami apa yang dimaksud dengan matriks.

Tujuan Instruksional Khusus : Agar mahasiswa mampu menjelaskan dan dapat menyelesaikan masalah yang terkait dengan :
A. Pengertian Matriks
B. Operasi Matriks
1. Penjumlahan dan pengurangan
2. Perkalian skalar/bilangan dengan matriks
3. Transpose Matriks
4. Perkalian antar matriks
5. Jenis-jenis matriks

Jumlah Pertemuan : 1 (satu)

Minggu 9

Matriks

A. Pengertian :

Matriks adalah susunan bilangan-bilangan riil atau kompleks yang diatur dalam baris-baris dan kolom-kolom berbentuk persegi panjang. Bilangan-bilangan tersebut disebut elemen matriks. Cara penulisan kolom matriks adalah sebagai berikut (dengan angka) :

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ -3 & 7 & \sqrt{6} \end{bmatrix} \text{ atau } \begin{Vmatrix} 4 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ \sqrt{3} & \frac{1}{5} & 7 & 2 \end{Vmatrix}$$

Matriks dinyatakan dalam huruf besar A, B, P atau huruf yang lainnya. Atau secara lengkap ditulis A = (a_{ij}), artinya matriks A mempunyai elemen a_{ij}, dimana indeks i menyatakan baris ke-i dan indeks j menyatakan kolom ke-j dari elemen a_{ij}.

Secara umum, matriks A ditulis : A = (a_{ij})

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$i = 1,2,3...,n$$
$$j = 1,2,3...,m$$

Matriks A mempunyai baris sebanyak n dan kolom sebanyak m. Pada matriks A = (a_{mxn}), dikatakan ordo matriks A adalah m x n.

Apabila matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ maka matriks A mempunyai ordo 2x2.

Apabila Matriks B = $\begin{bmatrix} 4 & 7 & 4 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ maka matriks A mempunyai ordo 2x3.

Apabila matriks C = $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ maka matriks C ber ordo 5x1.

Apabila Matriks A dan matriks B berordo sama, dan a_{ij} = b_{ij} untuk semua i=1,2,..,n dan j=1,2,..m maka matriks tersebut sama.

Contoh :

A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, maka A = B

B. Operasi Matriks

Dalam operasi matriks terdapat beberapa sifat matriks jika matriks A, B dan C berordo sama dan λ scalar, maka berlaku sifat-sifat berikut:

a. A + B = B + A (sifat komutatif)

b. (A + B) + C = A + (B + C); (sifat asosiatif)

c. λ(A + B) = λA + λB; (sifat distributif)

1. Operasi penjumlahan dan pengurangan

   Jumlah matriks A dan B jika ditulis A + B adalah sebuah matriks baru C, C = A + B dengan elemen C_{ij} = a_{ij} +b_{ij}, i = 1,2,…,m dan j = 1,2,…,n dengan syarat A dan B mempunyai ordo sama. Jadi matriks C = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).

Contoh :

$A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, maka A + B = $\begin{bmatrix} 2+2 \\ -1+2 \\ 3+(-1) \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

atau jika

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

1). A + B = $\begin{bmatrix} 3+0 & 1+2 \\ 4+1 & 2+3 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

2). 2A + 3B =

$$\begin{bmatrix} 2x3 & 2\text{x}1 \\ 2x4 & 2\text{x}2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3x0 & 3\text{x}2 \\ 3x1 & 3\text{x}3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+0 & 2+6 \\ 8+3 & 4+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 11 & 13 \end{bmatrix}$$

Untuk Operasi pengurangan,

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$,

maka A – B =

= $\begin{bmatrix} 3-0 & 1-(-2) \\ 4-(-1) & 2-(-3) \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

3A – B =

$$\begin{bmatrix} 3.3 & 3.1 \\ 3.4 & 3.2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-0 & 3+2 \\ 12+1 & 6+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 13 & 9 \end{bmatrix}$$

2. Perkalian Skalar / bilangan dengan matriks

   Bila λ suatu bilangan dan a = a_{ij} maka perkalian λ dengan A ditulis A = $\lambda(a_{ij})$ = (λa_{ij}), atau dengan kata lain matriks λA diperoleh dari perkalian semua elemen A dengan λ.

   Contoh :

$$B = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 21 \\ 9 & 0 & -3 \end{bmatrix},\ \lambda = \frac{1}{3}$$

maka $\lambda B = \begin{bmatrix} \frac{12}{3} & \frac{9}{3} & \frac{21}{3} \\ \frac{9}{3} & \frac{0}{3} & \frac{-3}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

3. Transpose Matriks

   Bila matriks A = (a_{ij}), berordo (mxn), maka transpose dari matriks A ditulis A^t adalah matriks yang diperoleh dari A dengan menukar semua baris matriks A menjadi kolom matriks A^t. Maka matriks A^t akan berordo nxm.

   Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}, A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

4. Operasi Perkalian

Bila A = (a_{ij}) berorodo (pxq) dan matriks B = (b_{ij}) berordo (qxr), maka perkalian matriks A dan B ditulis AxB, adalah matriks C = AxB = (c_{ij}) berordo (pxr), dimana $c_{ij} = a_{11}b_{ij} + a_{12}b_{2j} + \ldots\ldots + a_{1q}b_{qr}$

Syarat agar matriks A dan B bisa dikalikan adalah banyaknya kolom matriks A harus sama dengan banyaknya baris matriks B.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

maka **A (2x3) x B (3x3) = C (2x3)**

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3\cdot 3 + 2\cdot 2 + 0\cdot 1 & 3\cdot 1 + 2\cdot 1 + 0\cdot 0 & 3\cdot 4 + 2\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 3 + 3\cdot 2 + 1\cdot 1 & 1\cdot 1 + 3\cdot 1 + 1\cdot 0 & 1\cdot 4 + 3\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 5 & 12 \\ 10 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

5. Jenis-jenis Matriks

   i. Matriks bujur sangkar, apabila suatu matriks memiliki jumlah baris dan kolom sama, atau berordo nxn.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$, bujur sangkar ordo 2

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$, bujur sangkar ordo 3

ii. Matriks nol, adalah matriks yang semua elemennya sama dengan nol.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ dan seterusnya

iii. Matriks diagonal, adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen diluar diagonal utama sama dengan nol.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

iv. Matriks satuan (identitas), ditulis dengan I adalah matriks bujur sangkar yang elemen diagonalnya semua sama dengan 1, dan elemen yang lain sama dengan 0.

Contoh :

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

v. Matriks simetris, adalah matriks yang transposenya sama dengan dirinya sendiri atau A = A^t.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ Maka } A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

vi. Matriks segitiga bawah adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen diatas diagonal utama adalah 0.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ matriks segitiga bawah}$$

dan sebaliknya.

Latihan Soal :

1. Matriks P dan matriks Q sebagai berikut

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix}$$

Tentukan matriks PQ

Pembahasan
Perkalian dua buah matriks

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix}$$

$$PQ = \begin{pmatrix} a + 2b & x + 2y \\ 3a + 4b & 3x + 4y \end{pmatrix}$$

2. Tentukan nilai a + b + x + y dari matriks-matriks berikut ini

$$P = \begin{pmatrix} 9 & 2x \\ y & 10 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 3a & 12 \\ 2 & 2b \end{pmatrix}$$

Diketahui bahwa P = Q

Pembahasan
Kesamaan dua buah matriks, terlihat bahwa

$$\begin{pmatrix} 9 & 2x \\ y & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 12 \\ 2 & 2b \end{pmatrix}$$

3a = 9 → a = 3
2b = 10 → b = 5
2x = 12 → x = 6
y = 6
y = 2

Sehingga:
a + b + x + y = 3 + 5 + 6 + 2 = 16

3. Diketahui persamaan matriks $\begin{pmatrix} a & 4 \\ -1 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & b \\ d & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   Nilai a + b + c + d =….

   A. − 7
   B. − 5
   C. 1
   D. 3
   E. 7

   Pembahasan
   Jumlahkan dua matriks pada ruas kiri, sementara kalikan dua matriks pada ruas kanan, terakhir gunakan kesamaan antara dua buah matriks untuk mendapatkan nilai yang diminta.

   $$\begin{pmatrix} 2+a & 4+b \\ d-1 & c-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(0)+(-3)(1) & (1)(1)+(-3)(0) \\ (3)(0)+(4)(1) & (3)(1)+(4)(0) \end{pmatrix}$$

   $$\begin{pmatrix} 2+a & 4+b \\ d-1 & c-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$ matematikastudycenter.com

   2 + a = −3
   a = − 5

   4 + b = 1
   b = − 3

   d − 1 = 4
   d = 5

   c − 3 = 3
   c = 6

   Sehingga

   a + b + c + d = −5 − 3 + 6 + 5 = 3

4. Diketahui matriks

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x+y & 2 \\ 3 & y \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Apabila B − A = C^t = transpos matriks C, maka nilai x .y =….

A. 10
B. 15
C. 20
D. 25
E. 30
(UN 2007)

Pembahasan
Transpos C diperoleh dengan mengubah posisi baris ke kolom, B − A adalah pengurangan matriks B oleh A

$$B - A = C^t$$

$$\begin{pmatrix} x+y & 2 \\ 3 & y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^t$$

$$\begin{pmatrix} x+y-2 & 2+1 \\ 3-1 & y-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+y-2 & 3 \\ 2 & y-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Akhirnya, dari kesamaan dua matriks:
y − 4 = 1
y = 5

x + y − 2 = 7
x + 5 − 2 = 7
x + 3 = 7
x = 4

x . y = (4)(5) = 20

5. Jika $\begin{pmatrix} 4^{x+2y} & 0 \\ 1 & 3x-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

maka x + y =….

A. $-\ ^{15}/_{4}$
B. $-\ ^{9}/_{4}$
C. $^{9}/_{4}$
D. $^{15}/_{4}$
E. $^{21}/_{4}$

Pembahasan
Masih tentang kesamaan dua buah matriks ditambah tentang materi bentuk pangkat, mulai dari persamaan yang lebih mudah dulu:
$3x - 2 = 7$
$3x = 7 + 2$
$3x = 9$
$x = 3$

$4^{x + 2y} = 8$
$2^{2(x + 2y)} = 2^3$
$2^{2x + 4y} = 2^3$
$2x + 4y = 3$
$2(3) + 4y = 3$
$4y = 3 - 6$
$4y = -3$
$y = -\ ^{3}/_{4}$

Sehingga:
$x + y = 3 + (-\ ^{3}/_{4}) = 2\ ^{1}/_{4} = \ ^{9}/_{4}$

6. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 4a & 8 & 4 \\ 6 & -1 & -3b \\ 5 & 3c & 9 \end{pmatrix}$, dan $B = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 4 \\ 6 & -1 & -3a \\ 5 & b & 9 \end{pmatrix}$

Jika A = B, maka a + b + c =….
A. − 7
B. − 5
C. − 1
D. 5
E. 7

Pembahasan

Kesamaan dua matriks:
4a = 12
a = 3

3a = − 3b
−3a = − 3b
−3(3) = − 3b
−9 = − 3b
b = 3

3c = b
3c = 3
c = 1

a + b + c = 3 + (3) + (1) = 7

7. Suatu perkalian matriks $\begin{pmatrix} 1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ menghasilkan matriks nol. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan tersebut!

Pembahasan:

$$\begin{pmatrix} 1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 6 - 3x & -2 + x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = 0$$

$$6 - 3x + (-2 + x)x = 0$$

$$x^2 - 2x - 3x + 6 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

8. Diketahui matriks:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} x-1 & 1 \\ 3 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 25 \\ 5 & 28 \end{bmatrix}$$

Nilai x + y adalah ...
a. 2
b. 6
c. 8
d. 10
e. 12

Pembahasan:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} x-1 & 1 \\ 3 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 25 \\ 5 & 28 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x-2 & 2 \\ 6 & 2y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 25 \\ 5 & 28 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x-2-2 & 4x-4+6 \\ 6-2y & 12+6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 25 \\ 5 & 28 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x-4 & 4x+2 \\ 6-2y & 12+6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 25 \\ 5 & 28 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x-2 & 4x+1 \\ 9-2y & 16+6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 25 \\ 5 & 28 \end{bmatrix}$$

2x – 2 = 10
2x = 12
x = 6
9 – 2y = 5
-2y = -4
y = 2

Nilai x + y = 6 + 2 = 8
Jawaban: C