MODUL 7 ONLINE
ESA 153 STATISTIK 1

Materi 9

PROBABILITAS 2

Disusun Oleh
TIM DOSEN

UNIVERSITAS ESA UNGGUL
2018

PROBABILITAS 2

1. Probabilitas Marjinal

Di dalam praktik, kita sering kali menjumpai suatu kejadian yang terjadi bersamaan dengan kejadian lainnya, di mana kejadian lainnya tersebut dipengaruhi kejadian yang pertama. Sebagai ilustrasi sederhana, misalkan kita memproduksi suatu jenis baterai di tiga pabrik yang peralatan dan karyawannya berbeda. Produksi mingguan pabrik pertama (S_1 = 500), pabrik kedua (S_2 = 2000), dan pabrik ketiga (S_3 = 1500).

Selanjutnya, misalkan diketahui besarnya nilai probabilitas barang rusak dari pabrik pertama, $P(R/S_1)$ adalah 0.020, probabilitas barang rusak dari pabrik kedua, $P(R/S_2)$ adalah 0.015, dan dari pabrik ketiga $P(R/S_3)$ adalah 0.030. baterai yang diproduksi pabrik tersebut digunakan untuk menyuplai pabrik mobil. Dengan demikian, pabrik mobil setiap minggunya menerima suplai baterai sebanyak 4000, dari $S_1 + S_2 + S_3$ (ingat, S adalah ruang sampel). Jika satu baterai dipilih secara acak, maka:

$P(S_1) = \frac{500}{4000}$ probabilitas bahwa baterai berasal dari pabrik pertama,

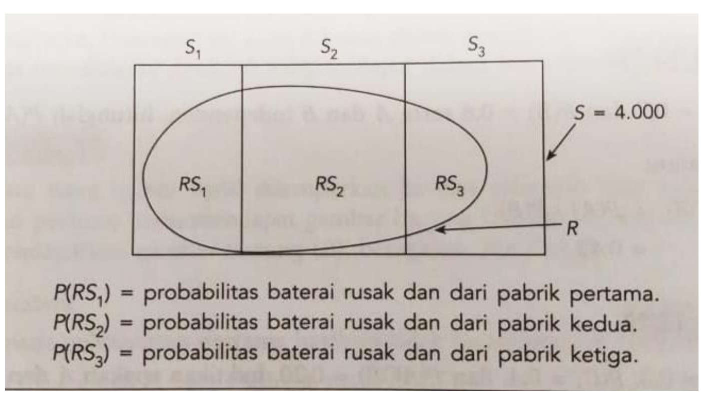
$P(S_2) = \frac{2000}{4000}$ probabilitas bahwa baterai berasal dari pabrik kedua, dan

$P(S_3) = \frac{1500}{4000}$ probabilitas bahwa baterai berasal dari pabrik ketiga.

Apabila pemilik pabrik tersebut mengambil 1 batrai secara acak, berapa probabilitasnya bahwa baterai yang diambil tersebut rusak.

$P(R)$ = probabilitas barang rusak, disebut probabilitas marjinal.

Baterai yang rusak tersebut dapat berasal dari pabrik pertama, kedua, atau ketiga. Untuk menjawab pertanyaan itu, perhatikan peraga berikut:



Gambar 1: Diagram Venn kejadian bersyarat

Dari gambar dapat dilihat bahwa R = $RS_1 \cup RS_2 \cup RS_3$, jadi, P(RS_1) + P(RS_2) + P(RS_3), menurut definisi apabila R merupakan suatu kejadian sedemikian rupa sehingga salah satu kejadian -kejadian yang saling meniadakan S_1, S_2, …. S_k, harus terjadi bersama (*joint*) dengan salah satu kejadian dari R, sehingga P(*R*) disebut probabilitas marjinal, dan nilai P(R) ditentukan dengan aturan sebagai berikut:

$$P(R) = \sum_{i=1}^{k} P(RS_1)$$

Karena P(RS_1) = P(S_1)P(R/S_1) kita peroleh rumus berikut:

$$\text{Probabilitas Marjinal} = P(R) = \sum P(S_1)P(R/S_1) \qquad (1)$$

Dengan rumus tersebut, kita dapat menghitung probabilitas bahwa baterai yang dipilih secara acak rusak, yaitu:

$$P(R) = P(S_1)P(R/S_1) + P(S_2)P(R/S_2) + P(S_3)P(R/S_3)$$

$$= \frac{500}{4000}\ x\ 0.020 + \frac{2000}{4000}\ x\ 0.015 + \frac{1500}{4000}\ x\ 0.030$$

$$= 0.0213$$

Perhatikan: banyaknya produksi baterai tiap pabrik dipergunakan untuk menghitung P(S_1), P(S_2), dan P(S_3). Apabila tidak diperhitungkan, P(S_1) = P(S_2) = P(S_3) = $\frac{1}{3}$

Contoh 1:

Suatu Universitas mempunyai siswa sebanyak 1000 orang yang terdiri dari 4 fakultas, yatu: FE = 400 mahasiswa, FH = 200 mahasiswa, FT = 150 mahasiswa, FK = 250 mahasiswa. Dari mahasiswa tersebut ada yang menjadi anggota menwa(resimen mahasiswa). Dari FE = 200, FH = 50, FT = 25, FK = 150 orang, jika suatu saat kita bertemu dengan salah seorang mahasiswa (anggap sebagai kejadian yang acak), berapa probabilitas bahwa mahasiswa tersebut seorang anggota Menwa?

Penyelesaian:

M = ME∪MH∪MT∪MK = Menwa dari FE, FH, FT, FK.

P(ME) = P(E)P(M/E) = $\frac{200}{1000}$

P(MH) = P(H)P(M/H) = $\frac{50}{1000}$

P(MT) = P(T)P(M/T) = $\frac{25}{1000}$

P(MK) = P(K)P(M/K) = $\frac{150}{1000}$

Maka: $P(M) = P(ME) + P(MH) + P(MT) + P(MK)$

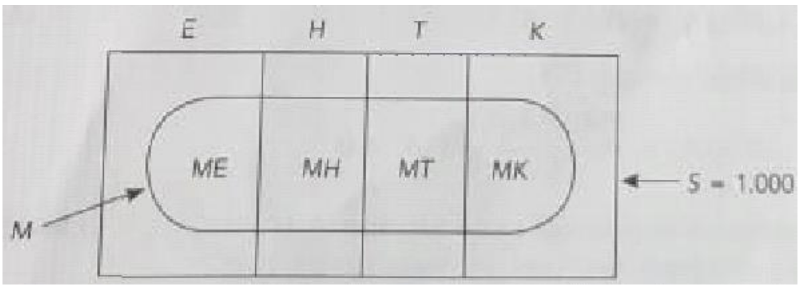
$= P(E)P(M/E) + P(H)P(M/H) + P(T)P(M/T) + P(K)P(M/K)$

$= \frac{200+50+25+150}{1000} = 0.425$

Atau: $P(M) = \frac{M}{S}$

$= \frac{ME+MH+MT+MK}{S}$

$= 0.425$



Gambar 1: Probabilitas Mahasiswa Menwa dari empat fakultas M = ME∪MH∪MT∪MK

2. Teorema Bayes

Thomas Bayes (1702-1761) mengembangkan teori untuk menghitung probabilitas tentang sebab-akibat (*cause*) dari suatu kejadian berdasarkan pengaruh yang dapat diperoleh sebagai hasil observasi. "*Bayesian decision theory*" yaitu teori keputusan berdasarkan perumusan Thomas Bayes yang bertujuan untuk memecahkan masalah pembuatan keputusan yang mengandung ketidakpastian (*decision making under uncertainly*).

Misalkan suatu himpunan lengkap mengenai berbagai kejadian yang terbagi habis (*a set of complete and mutually exclusive events*) A_1, A_2, …. A_i,…. A_k, (*i = 1,2,… k*). terjadi salah satu kejadian, katakanlah A_i, merupakan salah satu syarat yang diperlukan untuk terjadinya kejadian lainya, misalnya A yang sudah diketahui sebagai hasil observasi (misalnya bola yang terpilih = M), $P(A/A_i)$ dan $P(A_i)$ diketahui. *The posterior probability* kejadian A_i dengan syarat bahwa A sudah atau akan terjadi dapat dihitung berdasarkan rumus Bayes berikut:

$$P(A_i/A) = \frac{P(A_i)P(A/A_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(A/A_i)} \qquad (2)$$

Bukti:

$$P(A_i \cap A) = P(A_i)P(A/A_i) = P(A)P(A_i/A),\ P(A_i) \neq 0,\ P(A) \neq 0$$

Dengan demikian,

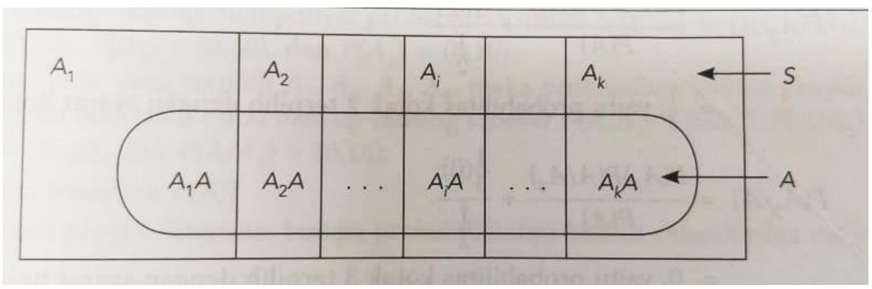
$$P(A)P(A_i/A) = P(A_i)P(A/A_i),$$

Sekarang dibagi dengan P(A)

$$P(A_i/A) = \frac{P(Ai)P(A/Ai)}{P(A)},\ P(A) \neq 0$$

Agar kejadian A terjadi, salah satu kejadian A_i (i = 1,2,…,k) harus terjadi. Sekarang perhatikan diagram yang terdapat pada gambar 2:

$$A = (A_1A \cup A_2A \cup \ldots \cup A_kA)$$



Gambar 2: Probabilitas kejadian bersyarat $P(A_i \cap A)$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1A \cup A_2A \ldots \cup A_kA) \\ &= P(A_1A) + P(A_2A) + \ldots P(A_kA) \\ &= P(A_1)P(A/A_1) + P(A_2)P(A/A_2) + \ldots\ldots + P(A_k)P(A/A_k) \\ &= \Sigma\ P(A_1)P(A/A_1) \end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned} P(A_1/A) &= \frac{P(A_1A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A_1)P(A/A_1)}{\Sigma\ P(A_1)P(A/A_1)} \qquad \text{(terbukti)} \end{aligned}$$

Contoh 2:

Suatu daftar pertanyaan dikirimkan kepada para responden untuk mengetahui penggunaan mobil keluarga. Kita anggap suatu nilai *"a priori probability"* bahwa daftar pertanyaan tersebut akan diisi oleh keluarga yang tinggal dijakarta adalah 0.5, probabilitas bahwa daftar pertanyaan diisi oleh mereka yang berpenghasilan tinggi adalah 0.3, berdasarkan pengalaman, probabilitas bahwa daftar pertanyaan yang dikirim kepada penduduk luar Jakarta diisi oleh mereka yang berpenghasilan tinggi sama dengan 0.2, kita gunakan symbol berikut:

A_1 = keluarga yang tinggal di luar jakarta

A_2 = keluarga yang tinggal di jakarta

A_3 = keluarga perpenghasilan tinggi

$P(A_1)$ = 0.5

$P(A_2) = P(\bar{A}_1) = 1 – P(A_1) = 1 – 0.5 = 0.5$

A_2 merupakan komplemen A_1 (lihat rumus 2)

$P(A)$ = 0.3

$P(A/A_1) = 0.2$

Misalkan daftar pertanyaan yang sudah diisi sudah kita terima, sedangkan kode mengenai tempat tinggal responden sudah dihapus. Dengan demikian, kita tidak mengetahui apah responden tersebut tingal di luar Jakarta atau di Jakarta. Kalau daftar pertanyaan tersebut diisi oleh keluaarga tersebut bertempat tinggal di luar Jakarta, $P(A_1/A)$?

Penyelesaian:

$$P(A_1/A) = \frac{\mathrm{P(A1/A)}}{P(A)}$$

$$= \frac{\mathrm{P(A1)P(A/A1)}}{P(A)}$$

$$= \frac{(0.5)(0,3)}{0,3}\,\frac{1}{3}$$

Contoh 2:

Diterima atau tidaknya suatu usul pembuatan jembatan baru di kota Jakarta tergantung kepada hasil pemilihan 4 calon kepala Bapeda DKI Jaya, yaitu calon A_1, A_2, $A_{3,}$ dan A_4, dimana masing-masing mempunyai probabilitas untuk terpilih sebesar $P(A_1) = (0.30)$, $P(A_2) = (0.20)$, $P(A_3) = (0.40)$, dan $P(A_4) = (0.10)$.

Kalau calon yang terpilih $A_{1,}$ A_2, A_3, dan $A_{4.}$ Maka probabilitas bahwa projek tersebut akan disetujui oleh para calon masing-masing sebesar $P(A/A_1) = (0.35)$, $P(A/A_2) = (0.85)$, $P(A/A_3) = (0.45)$, dan $P(A/A_4) = (0.15)$

a) Berapa besarnya P(A) ?
b) Jika usulan proyek diterima, berapa probabilitasnya bahwa calon kedua yang terpilih?

Penyelesaian:

A = proyek disetujui

A = $AA_1 \cup AA_2 \cup AA_3 \cup AA_4 \cup$, yaitu disetujui kalau A_1 terpilih, atau A_2 terpilih, atau A_3 terpilih, atau A_4 terpilih.

a) P(A)

$$= P(AA_1 U\ AA_2 U\ AA_3 U\ AA_4 U)$$
$$= P(AA_1) + P(AA_2) + P(AA_3) + P(AA_4)$$
$$= P(A_1)P(A/A_1) + P(A_2)P(A/A_2) + P(A_3)P(A/A_3) + P(A_4)P(A/A_4)$$
$$= (0.30)(0.35) + (0.20)(0.85) + (0.40)(0.45) + (0.10)(0.15)$$
$$= 0.47$$

b) $P(A_2/A)$

$$= \frac{P(\frac{A2}{A})}{P(A)}$$
$$= \frac{P(A2)P(\frac{A}{A2})}{P(A1)P\left(\frac{A}{A1}\right) + P(A2)P\left(\frac{A}{A3}\right) + P(A3)P\left(\frac{A}{A3}\right) + P(A4)P\left(\frac{A}{A4}\right)}$$
$$= \frac{(0.20)(0.85)}{0.471} = 0.3617$$

Contoh 3:

Suatu pabrik menggunakan 4 mesin untuk memproduksi sejenis barang. Produksi harian dari mesin pertama, kedua, ketiga, dan keempat masing-masing sebesar 1000, 1200, 1800, dan 2000 buah. Produksi dari masing-masing mesin mengalami kerusakan sebanyak 1%, 0.5%, 0.5%, dan 1%. Lalu barang dipilih secara acak, ternyata rusak. Berapa probabilitasnya bahwa barang tersebut rusak dari mesin pertama, kedua, ketiga, dan keempat?

Penyelesaian:

Misalkan R adalah barang yang rusak, dan S = 1000+1200+1800+2000 = 6000 (ruang sampel), maka:

Masing-masing menunjukkan besarnya probabilitas bahwa barang yang dipilih dari mesin 1, 2, 3, dan 4:

$P(M_1) = \frac{1000}{6000} = \frac{1}{6}$

$P(M_2) = \frac{1200}{6000} = \frac{1}{5}$

$P(M_3) = \frac{1800}{6000} = \frac{3}{10}$

$P(M_4) = \frac{2000}{6000} = \frac{1}{3}$

Masing-masing menunjukkan bahwa barang rusak dari mesin 1, 2, 3, dan 4:

$P(R/M_1) = (0.01)$; $P(R/M_2) = (0.005)$; $P(R/M_3) = (0.005)$; $P(R/M_4) = (0.01)$

$P(R) = P(RM_1) + P(RM_2) + P(RM_3) + P(RM_4)$

$= P(M_1)P(R/M_1) + P(M_2)P(R/M_2) + P(M_3)P(R/M_3) + P(M_4)P(R/M_4)$

$P(M_1/R) = \frac{P(M1)P\left(\frac{R}{M1}\right)}{P(R)}$

$= \frac{0.00167}{0.00747}$

= 0.22 (rusak dari mesin pertama)

$P(M_2/R) = \frac{P(M2)P\left(\frac{R}{M2}\right)}{P(R)}$

$= \frac{0.001}{0.00747}$

= 0.13 (rusak dari mesin kedua)

$P(M_3/R) = \frac{P(M3)P\left(\frac{R}{M3}\right)}{P(R)}$

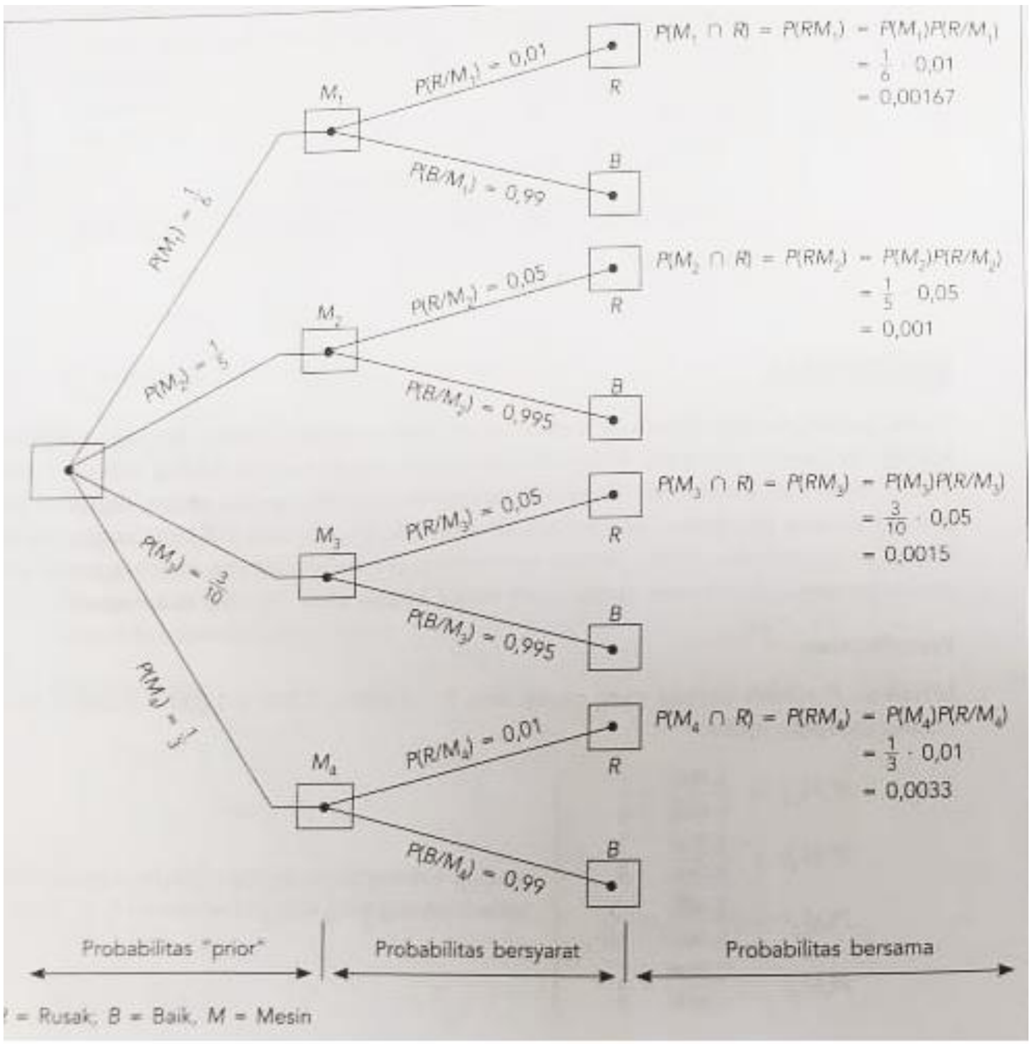
$= \frac{0.0015}{0.00747}$

= 0.20 (rusak dari mesin ketiga)

$$P(M_4/R) = \frac{P(M4)P\left(\frac{R}{M4}\right)}{P(R)}$$

$$= \frac{0.0033}{0.00747}$$

= 0.44 (rusak dari mesin keempat)

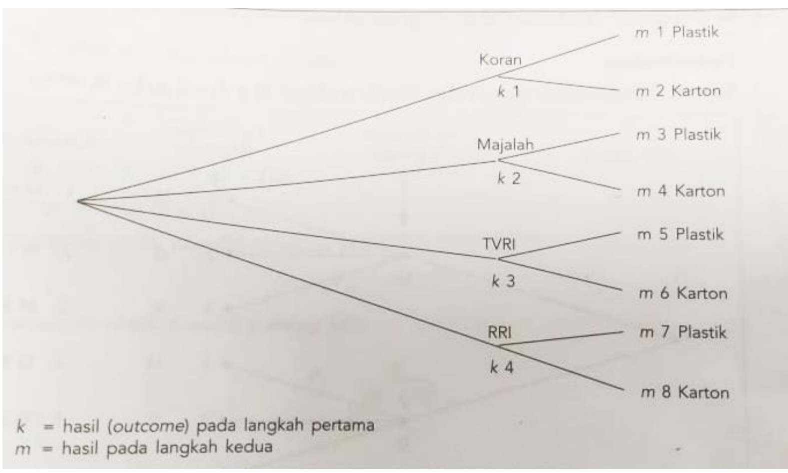


Gambar 3: Diagram pohon probabilitas kerusakan barang dari mesin 1, 2, 3, dan 4.

3. Permutasi dan Kombinasi

Seperti telah kita ketahui, suatu eksperimen akan memberikan hasil eksperimen (outcome). Setiap hasil eksperimen dapat dianggap sebagai suatu titik, sehingga kumpulan hasil ekperiman tersebut dinamakan titik-titik sampel (*sample point*). Setiap titik tadi disebut *elemen*, sedangkan seluruh elemen disebut ruang sampel (*sample space*). Kejadian sebetulnya terdiri dari kumpulan elemen tersebut. Kejadian yang terdiri dari satu elemen disebut kejadian *elementer* (*elementary event*). Pada dasarnya, salah satu hasil dari suatu eksperimen disebut kejadian elementer, di dalam suatu eksperimen mungkin dua kejadian atau lebih dapat terjadi, dimana kejadian-kejadian itu sering merupakan kombinasi terjadinya kejadian-kejadian elementer. Untuk menghitung probabilitas seperti itu, sering diperlukan informasi mengenai banyaknya kejadian-kejadian elementer yang membentuk kejadian tersebut. Hal ini sering terjadi kalau eksperimen dilakukan berkali-kali.

Suatu eksperimen yang dilakukan dalam beberapa langkah (steps), dimana setiap langkah menghasilkan berbagai kemungkinan hasil (outcome) yang berbeda, diperlukan suatu cara atau aturan untuk menghitung seluruh hasil. Apabila langkah pertama dari suatu eksperimen dapat menghasilkan *k* hasil (outcome) yang berbeda sedangkan langkah kedua menghasilkan *m* hasil yang berbeda, maka keseluruhan eksperimen yang terdiri dari 2 langkah tersebut akan menghasilkan $k \bullet m$ hasil.

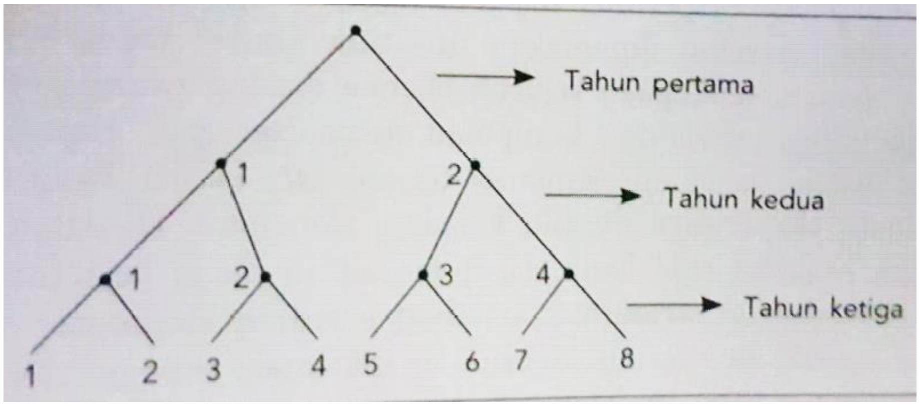


Gambar 4: Diagram pohon probabilitas alternative

Misalkan seorang direktur pemasaran mempunyai 4 alternatif didalam memasang iklan (Koran, majalah, TVRI, RRI) dan 2 kemungkinan rancangan pembungkus (*packaging design*), yaitu memakai botol plastic dan kotak karton. Banyaknya kombinasi iklan dan rencana pembungkusan = $k \bullet m = 4 \times 2 = 8.$ Kalau dinyatakan dalam diagram pohon, gambarnya dapat dilihar pada peraga 10. Apabila pada salah satu langkah dalam eksperimen menghasilkan *m* hasil yang berbeda dan langkah ini terjadi sampai *k* kali, maka banyaknya hasil adalah:

$m \times m \times . . . \times m = m^k$ (*m* pangkat *k*)

misalnya seorang pemegang saham setelah menerima keuntungan selama setahun mempunyai 2 alternatif, yaitu menghabiskan uang keuntungan itu untuk keperluan konsumsi atau akan menanamkan uangnya kembali. Selama 3 tahun dia akan dihadapkan kepada alternative sebanyak $2^3 = 8$. Perhatikan diagram pohon berikut:



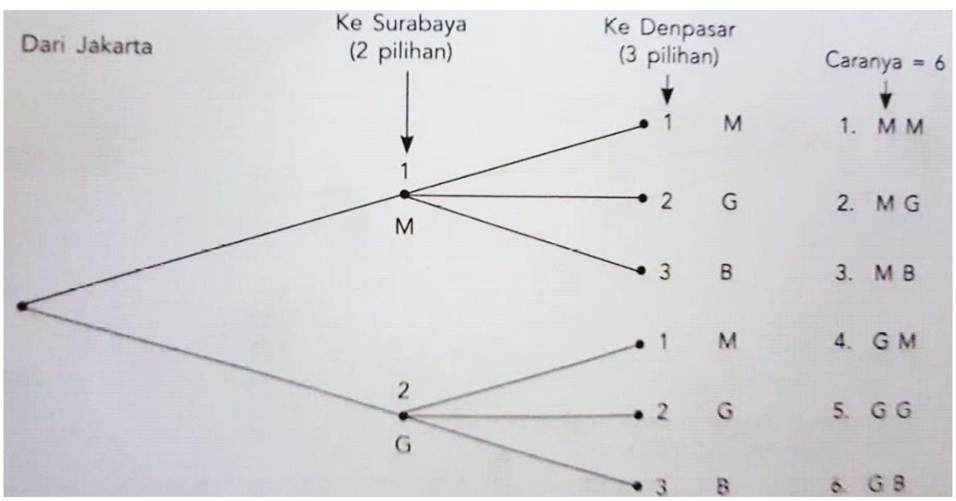
Gambar 5: Diagram pohon kemungkinan hasil dari tiga langkah eksperimen

Contoh 4:

Seorang pedagang naik pesawat terbang dari Jakarta ke Surabaya dan dilanjutkan ke denpasar. Ada 2 pesawat dari Jakarta ke Surabaya yaitu merpati (M) dan garuda (G), sedangkan dari Surabaya ke denpasar ada 3 pesawat yatu merpati, garuda, dan bouraq (B). ada berapa cara pedagang tersebut terbang dari Jakarta ke Denpasar? Nyatakan dalam diagram pohon.

Penyelesaian:

Seperti diperlihatkan pada peraga berikut, terdapat *m x k = 2 x 3 = 6* cara.



Gambar 6: Diagram pohon kemungkinan hasil dari dua langkah eksperimen

PERMUTASI adalah suatu pengaturan atau urutan beberapa elemen atau objek (misalnya hasil suatu eksperimen), dimana urutan itu penting, maksudnya 123 tidak sama dengan 213, ABC ≠ BCA, dan seterusnya.

Banyaknya permutasi dari *m* elemen adalah junlah maksimum cara-cara yang berbeda dalam mengatur atau membuat urutan dari *m* elemen tersebut. Misal ada 3 objek ABC, ini bisa diatur menjadi urutan-urutan yang berbeda, yaitu ABC, ACB, BCA, BAC, CAB, dan CBA. Seluruhnya terdiri atas 6 cara berbeda.

Permutasi sangat berguna untuk perhitungan probabilitas. Khususnya yang berhubungan dengan ranking dari suatu himpunan slemen atau objek, misalnya kesebelasan dan lain sebagainya. Sebagai contoh, misalnya kita tertarik kepada persoalan untuk mengetahui ada berapa cara 3 orang calon gubernur DKI diberi nilai oleh penduduk DKI yang diberi kesempatan untuk itu. Dalam hal ini, akan kita peroleh 6 permutasi atau ranking yang berbeda. Ranking atau penilaian dimulai dengan angka 1 sampai 3, yaitu dimulai dengan yang terbaik dengan dukungan penuh, sampai pada calon yang dinilai kurang. Perhatikan table berikut:

Tabel 1 (Permutasi dari 3 ranking)

Permutasi / **Rank**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	A	A	B	B	C	C
2	B	C	A	C	A	B
3	C	B	C	A	B	A

Perhatikan ada 3 cara/alternatif untuk mengisi rank yang pertama untuk menentukan siapa-siapa yang akan memperoleh rank pertama tesebut, yaitu A, B, dan C. misalnya A mendapat rank pertama, sehingga rank kedua hanya akan ada 2 alternatif buat B dan C saja. Sedangkan jika B sudah mendapatkan rank yang kedua, rank ketiga hanya ada satu cara saja. Jadi, banyaknya permutasi merupakan hasil kali dari 3 x 2 x 1 = 6. Kalau ada 4 calon banyaknya permutasi adalah 4 x 3 x 2 x 1 = 24. Terakhir, jika ada *n* elemen (objek), ada n cara untuk mengisi posisi utama, ada ($n - 1$) cara untuk mengisi posisi kedua, dan seterusnya.

Banyaknya permutasi = $n(n-1)(n-2)\ldots(1)$ (3)

Dimana n = banyaknya elemen

$n!$ = n factorial, $n \geq 0$

$3!$ = 3 x 2 x 1 = 6

$4!$ = 4 x 3 x 2 x 1 = 24

$5!$ = 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120

Menurut definisi 0! = 1! = 1

Permutasi *n* objek diambil setiap *n* setiap kali:

$$ {}_{n}P_{n} = n! \qquad (4) $$

Permutasi *m* objek diambil *x* setiap kali:

$$ {}_{n}P_{x} = \frac{n!}{(n-x)!} \qquad (5) $$

Contoh 5:

Misalnya suatu dafter memuat 10 rencana investasi yang dikemukakan oleh direksi perusahaan kepada suatu dewan komisaris, dimana setiap anggota dewan komisaris diminta untuk memberikan penilaian terhadap 5 rencana investasi tersebut yang dianggal feasible. Ada berapa cara ranking dari 10 rencana investasi tersebut kalau diambil 5 setiap kali?

Penyelesaian:

Dari soal diketahui *n* = 10, dan *x* = 5, maka:

$$ {}_{10}P_{5} = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10!}{5!} $$

$$ = \frac{10\ .\ 9\ .\ 8\ .\ 7\ .\ 6\ .\ 5!}{5!} $$

= 10 x 9 x 8 x 7 x 6

= 30240 cara untuk ranking

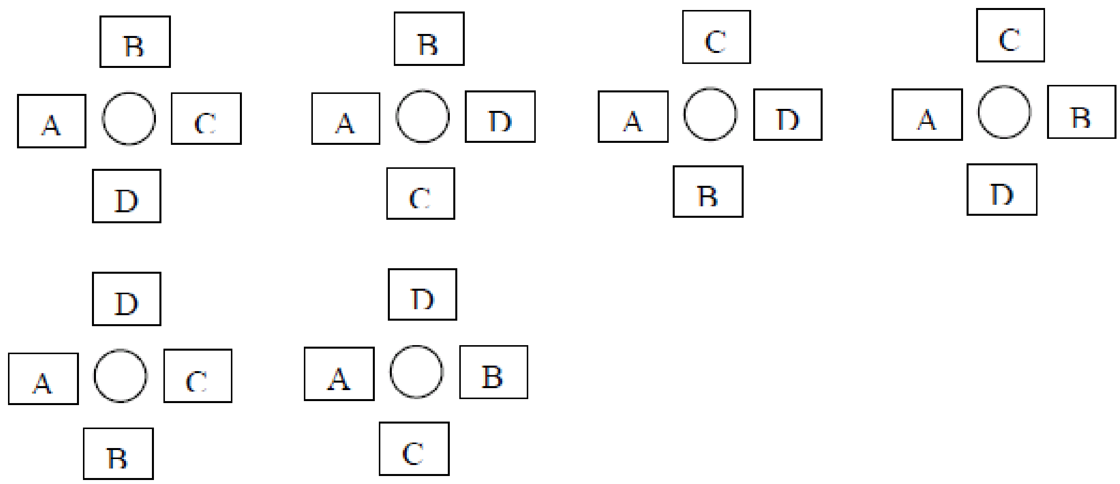
Perhatikan bahwa dalam permutasi ini urutan elemen/objek sangat penting, sebab walaupun objeknya sama tetapi urutannya tidak sama, dianggap permutasinya lain. ABC tidak sama dengan ACB, BAC. Juga nama LUCY (urutan huruf dimulai dari L) tidak sama dengan UCYL (urutan huruf dimulai U).

PERMUTASI SIKLIS didefinisikan sebagai banyaknya permutasi *n* objek yang disusun secara melingkar adalah (*n* – *1*)!.

Contoh 6:

4 orang duduk mengelilingi meja bundar, maka susunan melingkar 4 orang tersebut adalah?

Jawab:



Gambar 7: Permutasi Susunan melingkar 4 orang mengelilingi meja bundar

Permutasi dengan beberapa unsur yang sama:

$$nPn_1,\ n_2,\ n_3 \quad = \frac{n!}{n1!+n2!+n3!}, n1+n2+n3+\ldots< n$$

Contoh 7:

Berapakah banyaknya susunan berbeda yang dapat dibuat dari huruf-huruf “PENDIDIK”?

Penyelesaian:

Diketahui: jumlah huruf (n = 8)

Huruf yang sama “D” = $n_1 = 2$; “I” = $n_2 = 2$

Maka:

$${}_8P_{2.2} = \frac{8!}{2!.2!} = \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{2.1.2.1} = 10080 \text{ susunan}$$

Berbeda dengan permutasi, dalam **KOMBINASI** urutan elemen tidak penting. Walaupun urutannya berbeda kalau elemen-elemennya sama, namun mempunyai kombinasi yang sama. Jadi, ABC sama dengan ACB, BCA, dan LUCY = UCYL. Jadi, kombinasi adalah susunan dari beberapa elemen dimana urutan tidak diperhatikan.

Banyaknya kombinasi dari n objek diambil x setiap kali, diberi symbol ${}_nC_x$ yaitu jumlah maksimum himpunan yang berbeda-beda dan terdiri dari x elemen yang berasal dari n elemen. Karena dalam kombinasi urutan elemen tidak penting, maka dari itu banyaknya kombinasi lebih sedikit daripada banyaknya permutasi. Kombinasi *n* objek diambil *x* setiap kali:

$$ {}_{n}C_{x} = P_{x}^{n}/x! = \frac{n!}{x!(n-x)!} \qquad (6) $$

Contoh 8:

Suatu populasi terdiri *N* elemen: $X_1, X_2, \ldots X_N$ untuk menyelidiki karakteristik dari populasi tersebut diambil sampel yang dipilih secara acak sebanyak *n* elemen: $X_1, X_2, \ldots X_n$ berapa banyaknya sampel yang dapat diperoleh dari populasi ini jika N = 3 dan *n* = 2? Jika *N = 10* dan *n* = 3?

Penyelesaian:

$$ {}_{N}C_{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} $$

Jika, N = 3, n = 2, maka:

$$ {}_{3}C_{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{(3)(2)(1)}{(2)(1)(1)} = 3 $$

3 sampel tersebut ialah : $X_1, X_2; X_1, X_3$ *dan* X_2, X_3.

Jika N = 10, n = 3, maka:

$$ {}_{10}C_{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{(10)(9)(8)(7)!}{(2)(1)(1)(7)!} = 120 \text{ sampel.} $$

Contoh 9:

Suatu kotak berisi 8 bola merah (8*M*), 3 putih (3*P*), dan 9 biru (9*B*), apabila 3 bola dipilih secara acak, hitung probabilitas bahwa:

a) Ketiganya merah ($M_1 M_2 M_3$)
b) Ketiganya putih ($P_1 P_2 P_3$)
c) Dua merah, satu putih
d) Paling sedikit satu putih
e) Masing-masing warna diwakilu
f) Hasilnya mempunyai urutan: merah, putih, biru ($M_1 P_2 B_3$)

Penyelesaian:

a) Cara pertama:

M_1, M_2, M_3 = pengambilan pertama, kedua , ketiga semua bola merah

$$ P(M_1 M_2 M_3) = P(M_1)P(M_2/M_1)P(M_3/M_1M_2) = \frac{8}{20} \bullet \frac{7}{19} \bullet \frac{6}{18} = \frac{14}{285} $$

Cara kedua:

$P(M_1\ M_2\ M_3) = \dfrac{banyaknya\ kombinasi\ 3\ dari\ 8\ merah}{banyaknya\ kombinasi\ 3\ dari\ 20\ bola}$

$= {}_8C_3/{}_{20}C_3$

$= \frac{14}{285}$

b) $P(P_1\ P_2\ P_3) = P(P_1)P(P_2/P_1)P(P_3/P_1P_2)$

$= \frac{3}{20} \bullet \frac{2}{19} \bullet \frac{1}{18}$

$= \frac{1}{20\ x\ 19\ x\ 3}$

$= \frac{1}{1140}$

$= {}_3C_3/{}_{20}C_3$

$= \frac{1}{1140}$

c) P(2 merah dan 1 putih) $= \dfrac{{}_8C_2\ {}_3C_1}{{}_{20}C_3}$

$= \frac{7}{95}$

d) P(tak ada yang putih) $= \dfrac{{}_{17}C_3}{{}_{20}C_3}$

$= \frac{34}{57}$

P(Paling sedkit 1 putih) $= 1 - \frac{34}{57}$

$= \frac{23}{57}$

e) P (setiap warna diwakili) $= \dfrac{{}_8C_1\ {}_3C_1\ {}_9C_1}{{}_{20}C_3}$

$= \frac{18}{95}$

f) $P(M_1P_2B_3) = P(M_1)P(P_2/M_1)P(B_3/M_1M_2)$

$= \frac{8}{20} \bullet \frac{3}{19} \bullet \frac{9}{18}$

$= \frac{3}{95}$

$P(M_1P_2B_3) = \frac{1}{3!}\ P$(setiap warna diwakili)

$= \frac{1}{6} \bullet (\frac{18}{95})$

$= \frac{9}{35}$

Contoh 10:

Seorang penembak mempunyai probabilitas sebesar 0.8 untuk mengenai sasaran yang dituju.

$P(S) = 0.8$ (S = tembakan mengenai sasaran)

$P(\overline{S}) = 1 - 0.8 = 0.2$ ($\overline{S}$ = tembakan tidak mengenai sasaran / meleset)

Jika tembakan dilakukan 7 kali, berapa probabilitasnya bahwa 4 diantaranya mengenai sasaran?

Penyelesaian:

Jika tembakan yang ke – *i* meleset, kejadian diberi symbol $\overline{S}$, dan jika mengenai sasaran diberi symbol S_i.

$$P(S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \cap \overline{S}_5 \cap \overline{S}_6 \cap \overline{S}_7) = 0.8 \times 0.8 \times 0.8 \times 0.8 \times 0.2 \times 0.2 \times 0.2$$

$$= (0.8)^4 (0.2)^3$$

Karena dilakukan 7 tembakan (*m* = 7) dan 4 diantaranya mengenai sasaran (*x* = 4), maka kombinasi 7 elemen diambil 4 setiap kali adalah sebagai berikut:

$$_7C_4 (0.8)^4 (0.2)^3 = \frac{7!}{4!(7-4)!} (0.8)^4 (0.2)^3$$

$$= 35(0.8)^4 (0.2)^3$$

$$= 0.1147$$

Apabila variable *x* adalah banyaknya tembakan yang mengenai sasaran dari 7 tembakan, maka P(*x=4*) atau probabilitas bahwa 4 tembakan mengenai sasaran adalah 0.1147, dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa P(*x=2*) = 0.0043; P(*x=6*) = 0.3670; dan seterusnya. Apabila probabilitas dari setiap nilai variable *x* (= 0,1,2,3,4,5,6,7) dihitung sehingga diketahui nilainya, akan kita peroleh apa yang disebut dengan *distribusi probabilitas* untuk *x*.

Perbedaan Permutasi dan Kombinasi

Salah satu perbedaan antara Permutasi dan Kombinasi adalah jika Permutasi maka perbedaan urutan menjadikan perbedaan makna, sementara di Kombinasi perbedaan urutan tidak akan menjadikan perbedaan makna. Contoh: {a,b,c} pengambilan 2 unsur dari 3 unsur jika menggunakan **permutasi** maka akan diperoleh hasil ab, ba, ac, ca, bc, cb. Tetapi jika menggunakan **kombinasi** hasil yang diperoleh adalah ab, ca, bc

Rangkuman

Probabilitas Marjinal

P(R) = $\sum P(S_1)P(R/S_1)$

Teorema Bayes

$$P(A_i/A) = \frac{P(A_i)P(A/A_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(A/A_i)}$$

Permutasi

$_nP_n = n!$ permutasi *n* objek diambil *n* setiap kali

$_nP_x = \frac{n!}{(n-x)!}$ permutasi *n* objek diambil *x* setiap kali

Kombinasi

$_nC_x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ Kombinasi *n* objek diambil *x* setiap kali

Referensi

- J. Supranto, Statistik, Teori dan Aplikasi, Jilid 1, Penerbit Erlangga, 2016
- https://vidyagata.wordpress.com/
- Ronald EW, Pengantar statistika, Edisi ke 3,
- Yanti Budiasih, Statistika Deskriptif untuk Ekonomi dan Bisnis, Jelajah Nusa, 2012
- Sugiyono, Statistika untuk Penelitian, Penerbit Alfabeta Bandung, 2010