



MODUL VII MATEMATIKA

Judul	TURUNAN FUNGSI MATEMATIKA	
Penyusun	Distribusi	Perkuliahan
Nixon Erzed	PAMU UNIVERSITAS ESA UNGGUL	Pertemuan – VIII online

Tujuan :

Mahasiswa memahami pengertian turunan fungsi, dan dapat menyelesaikan soal-soal turunan fungsi

Materi:

- A. Pengertian Turunan Fungsi
- B. Rumus-Rumus Turunan
- C. Turunan Fungsi Trigonometri
- D. Dalil Rantai Untuk Menentukan Turunan
- E. Garis Singgung Pada Kurva
- F. Fungsi Naik Dan Fungsi Turun
- G. Nilai Stasioner
- H. Menggambar Grafik Fungsi

TURUNAN FUNGSI

A. PENGERTIAN TURUNAN FUNGSI

Definisi turunan : Fungsi $f : x \rightarrow y$ atau $y = f(x)$ mempunyai turunan yang dinotasikan $y' = f'(x)$ atau $\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$ dan di definisikan :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{atau}$$

$$y' = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Notasi diatas disebut notasi Leibniz.

Contoh 1:

Tentukan turunan dari $f(x) = 4x - 3$

Jawab

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x - 3 \\ f(x + h) &= 4(x + h) - 3 \\ &= 4x + 4h - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sehingga: } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4x + 4h - 3) - (4x - 3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4x + 4h - 3 - 4x + 3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Contoh 2

Tentukan turunan dari $f(x) = 3x^2$

Jawab :

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 \\ f(x+h) &= 3(x+h)^2 \\ &= 3(x^2 + 2xh + h^2) \\ &= 3x^2 + 6xh + 3h^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sehingga : } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3x^2 + 6xh + 3h^2) - 3x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6xh + 3h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 6x + 3h \\ &= 6x + 3 \cdot 0 \\ &= 6x \end{aligned}$$

Contoh 3

Tentukan turuna dari $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Jawab

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2} \\ f(x+h) &= \frac{1}{(x+h)^2} \\ &= \frac{1}{(x^2 + 2xh + h^2)} \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x^2 + 2xh + h^2)} - \frac{1}{x^2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{(x^2 + 2xh + h^2) \cdot x^2} - \frac{(x^2 + 2xh + h^2)}{x^2 \cdot (x^2 + 2xh + h^2)}}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 - (x^2 + 2xh + h^2)}{(x^2 + 2xh + h^2) \cdot x^2} \cdot \frac{1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 - x^2 - 2xh - h^2}{(x^2 + 2xh + h^2) \cdot x^2 \cdot h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2xh - h^2}{(x^2 + 2xh + h^2) \cdot x^2 \cdot h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(-2x - h)}{(x^2 + 2xh + h^2) \cdot x^2 \cdot \cancel{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2x - h)}{(x^2 + 2xh + h^2) \cdot x^2} \\ &= \frac{(-2x - 0)}{(x^2 + 2x \cdot 0 + 0^2) \cdot x^2} \\ &= \frac{-2x}{x^2 \cdot x^2} \\ &= \frac{-2}{x^3} = -\frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

Latihan

Dengan definisi di atas tentukan nilai turunan berikut:

1. $f(x) = 6 - 2x$
2. $f(x) = 5x^2 + 2x$
3. $f(x) = \frac{1}{3x^2}$
4. $f(x) = \sqrt{x}$
5. $f(x) = 2x^3$

B. RUMUS-RUMUS TURUNAN

1. Turunan $f(x) = ax^n$ adalah $f'(x) = anx^{n-1}$ atau $\frac{dy}{dx} = a.n.x^{n-1}$

2. Untuk u dan v suatu fungsi, c bilangan Real dan n bilangan Rasional berlaku:

a. $y = v \pm u \rightarrow y' = v' \pm u'$

b. $y = c.u \rightarrow y' = c.u'$

c. $y = u.v \rightarrow y' = u'v + u.v'$

d. $y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

e. $y = u^n \rightarrow y' = n. u^{n-1}.u'$

Contoh:

Soal ke-1

Jika $f(x) = 3x^2 + 4$ maka nilai $f'(x)$ yang mungkin adalah

Pembahasan

$$f(x) = 3x^2 + 4$$

$$f'(x) = 3.2x$$

$$= 6x$$

Soal ke-2

Nilai turunan pertama dari $f(x) = 2x^3 + 12x^2 - 8x + 4$ adalah ...

Pembahasan

$$f(x) = 2x^3 + 12x^2 - 8x + 4$$

$$f'(x) = 2.3x^2 + 12.2x - 8$$

$$= 6x^2 + 24x - 8$$

Soal ke-3

Turunan ke-1 dari $f(x) = (3x-2)(4x+1)$ adalah ...

Pembahasan

$$f(x) = (3x-2)(4x+1)$$

$$= 12x^2 + 3x - 8x - 2$$

$$= 12x^2 - 5x - 2$$

$$f'(x) = 24x - 5$$

Soal ke- 4

Jika $f(x) = (2x - 1)^3$ maka nilai $f'(x)$ adalah ...

Pembahasan

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x - 1)^3 \\ f'(x) &= 3(2x - 1)^2 (2) \\ &= 6(2x - 1)^2 \\ &= 6(2x - 1)(2x - 1) \\ &= 6(4x^2 - 4x + 1) \\ &= 24x^2 - 24x + 6 \end{aligned}$$

Soal ke- 5

Turunan pertama dari $f(x) = (5x^2 - 1)^2$ adalah ...

Pembahasan

$$\begin{aligned} f(x) &= (5x^2 - 1)^2 \\ f'(x) &= 2(5x^2 - 1)(10x) \\ &= 20x(5x^2 - 1) \\ &= 100x^3 - 20x \end{aligned}$$

Soal ke- 6

Turunan pertama dari $f(x) = (3x^2 - 6x)(x + 2)$ adalah ...

Pembahasan

$$f(x) = (3x^2 - 6x)(x + 2)$$

Cara 1:

Misal : $U = 3x^2 - 6x$

$$U' = 6x - 6$$

$$V = x + 2$$

$$V' = 1$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} f'(x) &= U'V + UV' \\ &= (6x - 6)(x+2) + (3x^2-6x).1 \\ &= 6x^2 + 12x - 6x - 12 + 3x^2 - 6x \\ &= 9x^2 - 12 \end{aligned}$$

Cara 2:

$$\begin{aligned}f(x) &= (3x^2 - 6x)(x + 2) \\ &= 3x^3 + 6x^2 - 6x^2 - 12x \\ &= 3x^3 - 12x \\ f'(x) &= 9x^2 - 12\end{aligned}$$

Latihan soal.

Tentukan turunan dari:

1. $f(x) = 2x^3$
2. $f(x) = \frac{3}{x^5}$
3. $f(x) = 4\sqrt{x^3}$
4. $f(x) = 4x^2 + x^{\frac{2}{3}} - \sqrt{x}$
5. $f(x) = (2x + 1)(3x - 2)$
6. $f(x) = \frac{(x+2)^2}{\sqrt{x}}$
7. $f(x) = (x^2 + 3)^{\frac{4}{3}}$
8. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x}$

C. TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI

Dengan menggunakan definisi turunan (notasi Leibniz) kita bisa menentukan turunan dari :

1. Turunan dari $f(x) = \sin x$

yaitu :

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x + h) = \sin(x + h)$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) + \sin(-x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{(x+h+(-x))}{2} \cdot \cos \frac{(x+h-(-x))}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cdot \cos \frac{2x+h}{2}}{h}$$

$$= 2 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{h} \cdot \cos \frac{(2x+h)}{2}$$

$$= 2 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{h} \cdot \left(\frac{1/2}{1/2} \right) \cdot \cos \frac{(2x+h)}{2}$$

$$= 2 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{h \cdot (1/2)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{(2x+h)}{2}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{h/2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos \frac{(2x+h)}{2}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos \frac{(2x+h)}{2}$$

$$= \cos x$$

Gunakan rumus-rumus berikut :

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

2. Turunan $f(x) = \cos x$

yaitu :

$$f(x) = \cos x$$

$$f(x + h) = \cos (x + h)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{1}{2}(2x+h) \sin \frac{1}{2}h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(-2 \sin \frac{1}{2}(2x+h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{2}h}{h} \right) \\ &= -2 \sin \frac{1}{2}(2x) \cdot \frac{1}{2} \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ \cos A - \cos B &= -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \end{aligned}$$

Jadi diperoleh rumus turunan fungsi trigonometri :

1. a. $f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$
 b. $f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$
2. a. $f(x) = \sin(ax + b) \rightarrow f'(x) = a \cos(ax + b)$
 b. $f(x) = \cos(ax + b) \rightarrow f'(x) = -a \sin(ax + b)$

dan jika u suatu fungsi maka:

3. a. $f(x) = \sin u \rightarrow f'(x) = u' \cos u$
 b. $f(x) = \cos u \rightarrow f'(x) = -u' \sin u$

Contoh :

Tentukan turunan dari:

- a. $f(x) = 3 \sin x + 2 \cos x$
- b. $f(x) = \sin (5x - 2)$
- c. $f(x) = \tan x$

Jawab:

a. $f(x) = 3 \sin x + 2 \cos x$
 $f'(x) = 3 \cos x - 2 \sin x$

b. $f(x) = \sin (5x - 2)$
 $f'(x) = 5 \cos (5x - 2)$

c. $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

missal : $u = \sin x \rightarrow u' = \cos x$
 $v = \cos x \rightarrow v' = -\sin x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \sec^2 x \end{aligned}$$

Latihan soal :

Tentukan turunan dari fungsi berikut :

- 1. $f(x) = \sin x - 3 \cos x$
- 2. $f(x) = \sin 3x$
- 3. $f(x) = \cos (3x + \pi)$
- 4. $f(x) = \tan \left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} \right)$
- 5. $f(x) = \sec x$
- 6. $f(x) = \sin x \cdot \cos x$
- 7. $f(x) = \cos^2 x$
- 8. $f(x) = \frac{x}{\sin 2x}$

D. DALIL RANTAI UNTUK MENENTUKAN TURUNAN

Apabila $y = f(g(x))$ maka $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Dari rumus $y = f(g(x)) \rightarrow y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Jika $g(x) = u \rightarrow g'(x) = \frac{du}{dx}$ dan $f(g(x)) = f(u)$

$$\text{Atau } y = f(u) \rightarrow \frac{dy}{du} = f'(u) = f'(g(x))$$

Maka $f'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ dapat dinyatakan menjadi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Dan bentuk tersebut dapat dikembangkan jika $y = f(u(v))$ maka:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

Contoh:

Dengan dalil rantai tentukan turunan dari :

a. $y = (x^2 - 3x)^{\frac{4}{3}}$

b. $y = \cos^5\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$

Jawab:

a. $y = (x^2 - 3x)^{\frac{4}{3}}$

missal : $u = x^2 - 3x \rightarrow \frac{du}{dx} = 2x - 3$

$$\begin{aligned} y = u^{\frac{4}{3}} &\rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{4}{3} u^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{4}{3} (x^2 - 3x)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Sehingga :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{4}{3} (x^2 - 3x)^{\frac{1}{3}} \cdot (2x - 3)$$

$$= \left(\frac{8}{x} - 4\right) (x^2 - 3x)^{\frac{1}{3}}$$

b. $y = \cos^5 \left(\frac{\pi}{3-2x} \right)$

Misal: $v = \frac{\pi}{3} - 2x \rightarrow \frac{dv}{dx} = -2$

$$u = \cos v \rightarrow \frac{du}{dv} = -\sin v = -\sin \left(\frac{\pi}{3} - 2x \right)$$

$$y = u^5 \rightarrow \frac{dy}{du} = 5u^4 = 5(\cos v)^4$$

Sehingga :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = 5(\cos v)^4 \cdot -\sin \left(\frac{\pi}{3} - 2x \right) \cdot -2 \\ &= 10 (\cos v)^4 \sin \left(\frac{\pi}{3} - 2x \right) \\ &= 10 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} - 2x \right) \right)^4 \sin \left(\frac{\pi}{3} - 2x \right) \end{aligned}$$

Latihan soal :

1. Dengan rumus turunan $y = f(g(x))$ adalah $f'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Tentukan turunan dari:

a. $y = (4x + 5)^{\frac{3}{2}}$

b. $y = \sin \left(3x - \frac{\pi}{3} \right)$

2. Dengan notasi Leibniz tentukan turunan fungsi berikut :

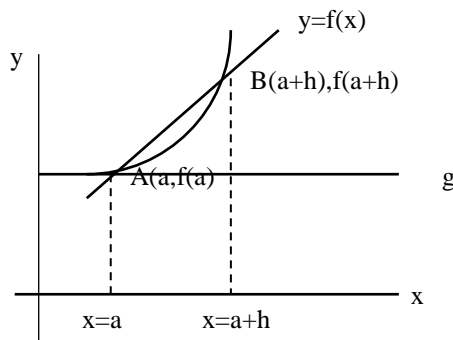
a. $y = (6 - x^2)^3$

b. $y = \cos(4x - \pi)$

c. $y = \sin^{-3} \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)$

E. GARIS SINGGUNG PADA KURVA

1. Gradien garis singgung



Perhatikan gambar di samping
Gradien garis AB adalah

$$\begin{aligned}
 m_{AB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
 &= \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} \\
 &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h}
 \end{aligned}$$

Apabila garis AB diputar pada titik A maka titik B akan bergerak mendekati titik A ($h \rightarrow 0$) maka tali busur AB menjadi garis singgung (g) pada kurva $y = f(x)$ di titik A ($a, f(a)$) dengan gradient

$$m_g = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$m_g = f'(a)$$

Sehingga persamaan garis singgung pada kurva $y = f(x)$ di titik A ($a, f(a)$) atau A (x_1, y_1) adalah

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

Contoh :

Diketahui kurva $y = x^2 - 3x + 4$ dan titik A (3,4)

- Tentukan gradient garis singgung di titik A.
- Tentukan persamaan garis singgung di titik A.

Jawab:

$$y = x^2 - 3x + 4$$

$$y' = 2x - 3$$

- Gradien di titik A (3,4)
 $m = y'_{x=3} = 2.3 - 3 = 6 - 3 = 3$

- Persamaan garis singgung di titik A (3,4)

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

$$y - 4 = 3 (x - 3)$$

$$y - 4 = 3x - 9$$

$$y = 3x - 5$$

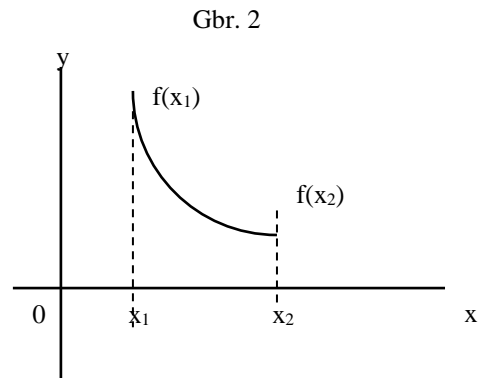
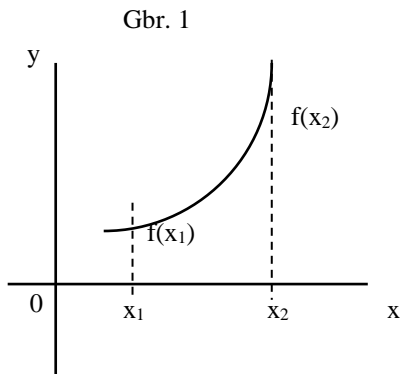
Latihan soal

1. Tentukan gradien garis singgung pada kurva:
 - a. $y = x^2 - 6x$ di titik $(-1, 7)$
 - b. $y = \sin 2x$ di titik $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$

2. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva
 - a. $y = x^2 - 2x - 3$ di titik $(3, 1)$
 - b. $y = x - 2x^2$ di titik dengan absis 1
 - c. $y = (2-x)(2x + 1)$ di titik dengan ordinat 8

3. Suatu garis singgung pada kurva $y = 3 + 2x - x^2$ sejajar dengan garis $4x + y = 3$, tentukan :
 - a. Titik singgung
 - b. persamaan garis singgung

F. FUNGSI NAIK DAN FUNGSI TURUN



1. Fungsi $f(x)$ disebut fungsi naik pada interval $a \leq x \leq b$, jika untuk setiap x_1 dan x_2 dalam interval $a \leq x \leq b$ berlaku :

$$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1) \quad (\text{gbr. 1})$$

2. Fungsi $f(x)$ disebut fungsi turun pada interval $a \leq x \leq b$, jika untuk setiap x_1 dan x_2 dalam interval $a \leq x \leq b$ berlaku :

$$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1) \quad (\text{gb. 2})$$

3. Fungsi f disebut fungsi naik pada titik dengan absis a , jika $f'(a) > 0$

4. Fungsi f disebut fungsi turun pada titik dengan absis a , jika $f'(a) < 0$

Contoh

Tentukan pada interval mana fungsi $f(x) = x^3 + 9x^2 + 15x + 4$ merupakan :

- a. Fungsi naik
- b. Fungsi turun

Jawab:

$$f(x) = x^3 + 9x^2 + 15x + 4$$

$$f'(x) = 3x^2 + 18x + 15$$

a. Syarat fungsi naik

$$f'(x) > 0$$

atau

$$3x^2 + 18x + 15 > 0$$

$$x^2 + 6x + 5 > 0$$

$$(x+1)(x+5) > 0$$

Harga batas

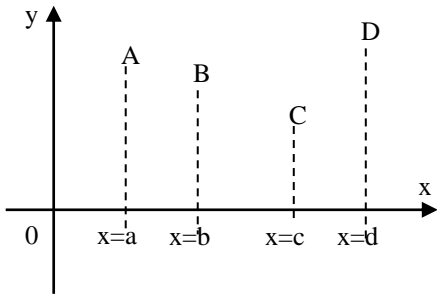
$$x = -1, x = -5$$

$$\frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\quad}} \quad x \ x \ x \ x \quad \sqrt{\sqrt{\sqrt{\quad}}}}}{-5 \qquad \qquad \qquad -1}$$

Jadi fungsi naik pada interval

$$x < -5 \text{ atau } x > -1$$

G. NILAI STASIONER



Perhatikan grafik fungsi $y = f(x)$ disamping pada titik A,B,C dan D dengan absis berturut-turut:

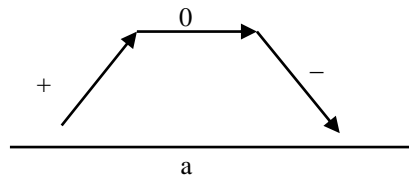
- $x = a,$
- $x = b,$
- $x = c$ dan
- $x = d$

jika untuk $x = a, b, c, d,$ tersebut menyebabkan $f'(x) = 0$ maka $f(a), f(b), f(c)$ dan $f(d)$ merupakan nilai – nilai stasioner.

Jenis – jenis nilai stasioner

1. Nilai stasioner di titik A.

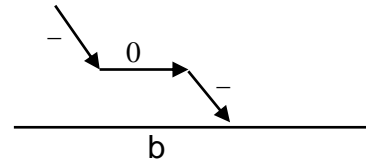
- Pada : $x < a$ diperoleh $f'(x) > 0$
- $x = a$ diperoleh $f'(x) = 0$
- $x > a$ diperoleh $f'(x) < 0$



Fungsi yang mempunyai sifat demikian dikatakan fungsi $f(x)$ mempunyai nilai stasioner maksimum $f(a)$ pada $x = a$ dan titik $(a,f(a))$ disebut titik balik maksimum.

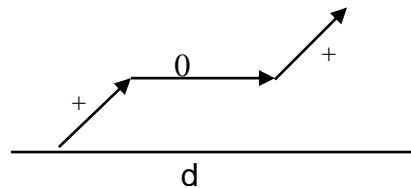
2. Nilai stasioner di titik B dan D.

- a. Pada : $x < b$ diperoleh $f'(x) < 0$
- $x = b$ diperoleh $f'(x) = 0$
- $x > b$ diperoleh $f'(x) < 0$



Fungsi ini mempunyai nilai stasioner belok turun $f(b)$ pada $x = b$ dan titik $(b,f(b))$ disebut titik belok.

- b. Pada : $x < d$ diperoleh $f'(x) > 0$
- $x = d$ diperoleh $f'(x) = 0$
- $x > d$ diperoleh $f'(x) > 0$

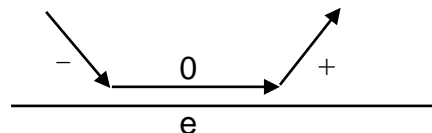


fungsi ini mempunyai nilai stasioner belok turun $f(d)$ pada $x = d$ dan titik $(d,f(d))$ disebut titik belok

Pada titik B atau D sering hanya disingkat nilai stasioner belok.

3. Nilai stasioner di titik E

- Pada : $x < e$ diperoleh $f'(x) < 0$
- $x = e$ diperoleh $f'(x) = 0$
- $x > e$ diperoleh $f'(x) > 0$



Fungsi ini mempunyai nilai stasioner minimum $f(e)$ pada $x = e$ dan titik $(e,f(e))$ disebut titik balik minimum.

Contoh :

Tentukan titik stasioner dan jenisnya dari fungsi $f(x) = x^2 + 2x$

Jawab :

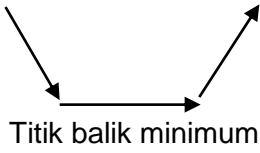
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2x \\ f'(x) &= 2x + 2 \\ &= 2(x + 1) \end{aligned}$$

Nilai stasioner didapat dari $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 2(x + 1) &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$$f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) = -1$$

Jadi diperoleh titik stasioner $(-1, -1)$

	$x = -1^-$	$x = -1$	$x = -1^+$
$f'(x) = 2(x + 1)$ $\rightarrow x + 1$	$-1^- + 1$ $\rightarrow -$ (negative)	$-1 + 1$ $\rightarrow 0$	$-1^+ + 1$ $\rightarrow +$ (positive)
Bentuk grafik	 <p>Titik balik minimum</p>		

Latihan

Tentukan nilai stasioner dan jenisnya pada fungsi berikut :

- $f(x) = x^2 - 6x$
- $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$
- $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$
- $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$
- $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-4}$

H. MENGGAMBAR GRAFIK FUNGSI

Untuk menggambar grafik fungsi $y = f(x)$ ada beberapa langkah sebagai berikut :

1. Tentukan titik-titik potong grafik dengan sumbu x (jika mudah ditentukan), yaitu diperoleh dari $y = 0$.
2. Tentukan titik potong dengan sumbu y, yaitu diperoleh dari $x = 0$.
3. tentukan titik-titik stasioner dan jenisnya.
4. tentukan nilai-nilai y untuk nilai x besar positif dan untuk x yang besar negative.

Contoh :

Diketahui persamaan $y = f(x) = 3x - x^3$, tentukan :

- a. Tentukan titik potong dengan sumbu x dan sumbu y.
- b. Nilai stasioner dan titik stasioner.
- c. Nilai y untuk x besar positif ($+\infty$) dan untuk x besar negative ($-\infty$).
- d. Titik Bantu

Jawab:

- a. i. Grafik memotong sumbu x, bila $y = 0$.

$$Y = 0 = 3x - x^3$$

$$\leftrightarrow 0 = x(3 - x^2)$$

$$\leftrightarrow 0 = x(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)$$

Titik potong sumbu x adalah $(0,0)$, $(\sqrt{3},0)$, $(-\sqrt{3},0)$

- ii. memotong sumbu y, jika $x = 0$

$$y = 3x - x^3$$

$$y = 3 \cdot 0 - 0^3$$

$$y = 0$$

titik potong sumbu y adalah $(0,0)$

- b. Syarat stasioner adalah : $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 3 - 3x^2$$

$$\leftrightarrow 3(1 - x^2)$$

$$\leftrightarrow 3(1 - x)(1 + x)$$

$$x = 1, x = -1$$

$$\text{untuk } x = 1, f(1) = 3(1) - (1)^3 = 2$$

$$x = -1, f(-1) = 3(-1) - (-1)^3 = -2$$

nilai stasionernya : $y = 2$ dan $y = -2$

titik stasioner : $(1,2)$ dan $(-1,-2)$

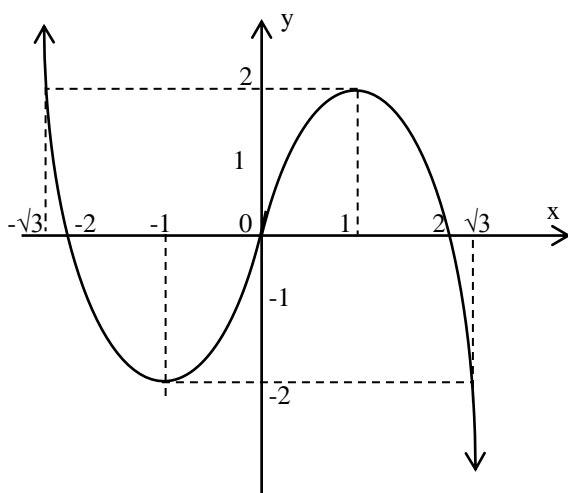
- c. $y = 3x - x^3$, untuk nilai x besar maka bilangan suku $3x$ tidak signifikan jadi dapat diabaikan terhadap x, sehingga $\rightarrow y = -x^3$.

i. Jika $x = +\infty$ maka $y = -\infty$

ii. jika $x = -\infty$ maka $y = +\infty$

d. Titik Bantu

x	-2	2	-3	3	...
y	2	-2	18	-18	...



Soal latihan

Gambarlah grafik :

1. $y = x^2 + 9$
2. $y = x^4 - 2x^2$
3. $y = (x^2 - 1)^2$
4. $x^3(8 - x)$