MODUL MATEMATIKA 2

(IND 124)

MODUL SESI 7

DERET TAK TERHINGGA (LANJUTAN)

DISUSUN OLEH

SEPTIAN RAHMAT ADNAN, S.Si.,M.Si

UNIVERSITAS ESA UNGGUL

2020

Pokok Bahasan : DERET TAK TERHINGGA (Lanjutan)
Sub Pokok Bahasan :

- Deret positif : Uji Integral
- Deret Positif : Uji-uji lainnya

Tujuan Instruksional Umum :
Agar mahasiswa dapat memahami dan menyelesaikan soal dan aplikasi yang berkaitan dengan deret tak terhingga

Tujuan Instruksional Khusus :
Agar mahasiswa mampu menjelaskan dan dapat menyelesaikan masalah yang terkait dengan :

- Deret positif :Uji Integral
- Deret Positif : Uji-uji lainnya

A. Deret Positif : Uji Integral

Kita telah mempelajari beberapa konsep penting pada modul sebelumnya. Tetapi kita hanya mengilustrasikannya terutama untuk dua jenis deret yang sangat khusus yaitu deret geometrid an deret mngecil. Untuk kedua deret ini, kita dapat membuat rumus-rumus eksak untuk jumlah parsial Sn. Sesuatu yang sebenarnya jarang kita lakukan untuk kebanyakan jenis deret lainnya. Tugas kita selanjutnya adalah mulai mempelajari deret takterhingga yang sangat umum.

Jika kita membicarakan deret, maka selalu ada dua pertanyaan penting yang biasanya diajukan

1. Apakah deret tersebut konvergen ?
2. Jika konvergen, berapa jumlahnya ?

Bagaimana kita menjawab kedua pertanyaan ini ? seseorang bisa saja menjawab bahwa kita bisa menggunakan computer untuk menyelesaikan persoalan ini. Untuk menjawab pertanyaan pertama, kita tinggal menjumlahkan suku-suku deret tersebut secara terus menerus, dan melihat hasil yang diperoleh sebagai jumlah parsial. Jika bilangan-bilangan ini berakhir pada suatu bilangan tetap S, maka deret terakhir tersebut konvergen. Dalam hal ini, S adalah jumlah deret tersebut, yang menjawab pertanyaan kedua. Tetapi jawaban ini jelas salah untuk pertanyaan pertama, dan hanya sebagian memadai untuk pertanyaan kedua. Marilah kita lihat mengapa demikian.

Perhatikan deret harmonic :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$$

yang telah kita pelajari pada subbab sebelumnya dan kita bahas pada beberapa contoh. Kita mengetahui bahwa deret ini adalah deret divergen tetapi program computer tidak akan membantu untukmengungkapkan fakta ini. Jumlah parsial S_n dari deret ini bertambah tanpa batas, tetapi pertambahan sangan perlahan ddan memerlukan lebih dari 272 juta suku untuk mencapai S_n sana dengan 20 dan lebih dari 10^{43} suku untuk mencapai S_n sama dengan 100.

Adanya keterbatasan yang melekat pada jumlah digit yang dapat ditampilkan, mengakibatkan computer akhirnya menyajikan perulangan nilai Sn, yang sayangnya memberikan kesimpulan yang salah bahwa deret tersebut konvergen. Apa yang benar untuk deret harmonic jugabenar untuk deret yang divergen secara lambat. Kita dapat menegaskan hal ini : computer tidak bisa menggantikan uji matematis untuk konvergensi atau divergensi, subjek yang akan kita kaji sekarang.

Pada subbab ini dan subbab berikutnya kita akan membatasi perhatian kita pada deret-deret dengan suku-suku positif. Dengan batasan ini, kita akan menyusun uji-uji konvergensi yang sangat sederhana. Uji-Uji untuk deret dengan tanda sembarang akan disajikan pada subbab berikutnya.

TEOREMA A UJI JUMLAH TERBATAS

Deret

$$\sum a_k$$

dengan suku-suku taknegatif akankonvergen jika dan hanya jika jumlah-jumlah parsialnya mempunyai batas atas.

Bukti :
Seperti biasa, misalkan :

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

karena $a_k \geq 0$ maka $S_{n+1} \geq S_n$; dalam hal ini (Sn) adalah barisan tak menurun.

Dengan demikian menurut toerema pada modul sebelumnya barisan (S_n) akan konvergen asalakan terdapat sebuah bilangan U, sedemikian rupa sehingga $S_n \leq U$ untuk seluruh n. Jika tidak S_n akan bethambah tanpa batas, dimana (S_n) divergen.

Contoh 1
Tunjukan bahwa deret

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...$$

konvergen

Solusi
kita bermaksud menunjukan bahwa jumlah-jumlah parsial S_n mempunyai batas atas. Pertama-tama perhatikan bahwa :

$$n! = 1 \bullet 2 \bullet 3 \ldots n \geq 1 \bullet 2 \bullet 2 \bullet\bullet\bullet 2 = 2^{n-1}$$

sehingga $1/n! \leq 1/2^{n-1}$. Jadi,

$$S_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

$$\leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Suku-suku yang terakhir ini berasal dari sebuah deret geometrik dengan r = ½. Suku-suku tersebut dapat dijumlahkan dengan menggunakan sebuah rumus dalam contoh 1. Kita memperoleh :

$$S_n \leq \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] < 2$$

DERET dan INTEGRAL TAKWAJAR
TEOREMA B UJI INTEGRAL

misalkan f adalah fungsi yang kontinu, positif dab takmenurun pada selang [1,∞] dan andaikan ak = f(k) untuk seluruh bilangan bulat positif k. Maka deret tak terhingga :

$$\sum a_k$$

konvergen jika dan hanya jika integral tak wajar

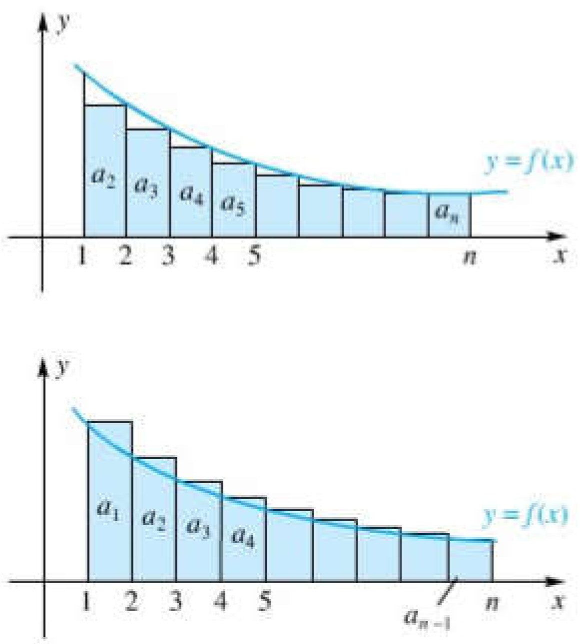
$$\int_1^\infty f(x)dx$$

konvergen

kita mencatat bahwa bilangan bulat 1 dapat digantikan dengan sembarang bolangan bulat positif M dengan menggunakan teorema ini.

Bukti

Digram-diagramini pada gambar di bawah ini menunjukkan bagaimana kita dapat menginterpretasikan jumlah-jumlah parsial dari deret



sebagai luas daerah dan kemudian menghubungkan deret tersebut dengan integral yang bersesuaian. Perthatikan bahwa luas tiap persegi panjang sana dengan tingginya karena lebarnya adalah 1. Dari diagram tersebut dengan mudah kita dapat melihat bahwa :

$$\sum_{k=2}^{n} a_k \leq \int_1^\infty f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

Sekarang andaikan

$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

adalah konvergen. Maka, berdasarkan ketidaksamaan ruas kiri di atas,

$$S_n = a_1 \sum_{k=2}^{n} a_k \leq a_1 + \int_1^{n} f(x)dx \leq \int_1^{\infty} f(x)dx$$

dengan demikian, berdasarkan uji jumlah terbatas

$$\sum a_k$$

adalah konvergen

dipihak lain, andaikan

$$\sum a_k$$

konvergen, maka berdasakan ketidaksamaan ruaskanan di atas, jika 1 ≤ n.

$$\int_1^{t} f(x)dx \leq \int_1^{n} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

karena

$$\int_1^{t} f(x)dx$$

meningkat seiring dengan t dan menpunyai batas-batas, maka :

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^{t} f(x)dx$$

harus ada : yaitu :

$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

konvergen

Kesimpulan untuk Teorema B seringkali dinyatakan sebagai berikut : Deret

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

dan integral takwajar :

$$\int_1^\infty f(x)dx$$

konvergen atau divergen secara bersamaan. Anda selayaknya dapat melihat bahwa hal ini ekuivalen dengan pernyataan kita di atas.

Contoh 2
Uji deret p, Deret

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots$$

di mana p adalah konstanta, disebut sebuah deret p (p-series). Tunjukan bahwa :

1. Deret p konvergen, jika p > 1
2. Deret p divergen jika p ≤ 1

Solusi
Jika p ≥ 0, maka fungsi f(x) = $1/x^n$ adalah kontinu, positif dan tidak meningkat pada [1,∞] dab f(k) = $1/k^n$. Jadi menurut uji integral,

$$\sum \left(1/k^p\right)$$

konvergen jika dan hanya jika

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-p} dx$$

ada (sebagai bilangan terhingga). Jika p ≠ 1

$$\int_1^t x^{-p} dx = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^t = \frac{t^{1-p} - 1}{1-p}$$

Jika p = 1

$$\int_1^t x^{-t} dx = \left[\ln x\right]_1^t = \ln t$$

Karena

$$\lim_{t\to\infty} t^{1-p} = 0$$

p > 1 dan

$$\lim_{t\to\infty} t^{1-p} = \infty$$

jika p < 1dan karena

$$\lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$$

kita dapat menyimpulkan bahwa deret p konvergen jika p > 1 dan divergen jika 0 ≤ p ≤ 1.

Contoh 3

Apakah deret di bawah ini konvergen atau divergen ?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1,001}}$$

Solusi

menurut uji deret p,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1,001}}$$

konvergen. Menyisipkan atau menghilangkan sejumlah terhingga suku-suku di dalamsebuah deret tidak mempemgaruhi konvergensi atau divergensinya (meskipun mungkin mempengaruhi jumlahnya).Jadi deret tersebut konvergen.

Contoh 4

Apakah deret di bawah ini konvergen atau divergen ?

$$\sum \frac{1}{(k \ln k)}$$

Solusi

Hipotesis uji integral akan terpenuhi untuk f(x) = 1/(x lnx) pada [2,∞). Bahwa selangnya adalah [2,∞). dan bukannya [1,∞) bukan merupakan konsekuensinya (tidak berhubungan), sebagaimana yang telah kita catat setelAH Teorema B selanjutnya,

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{t\to\infty} \int_2^{t} \frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{x} dx\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[\ln \ln x\right]_2^t = \infty$$

Jadi

$$\sum \frac{1}{(k \ln k)}$$

adalah divergen

Contoh 5.

Dengan menggunakan integral takwajar, tentukan batas atas untuk kesalahn dalam penggunaan jumlah lima suku pertama dari deret konvergen berikut :

untuk menghampiri jumlah deret tersebut

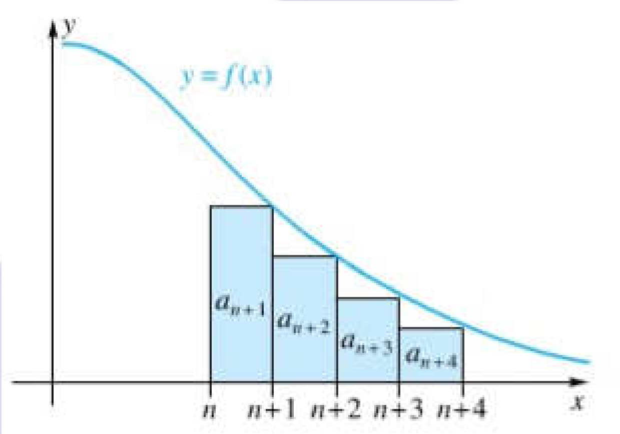
Solusi
Kesalah (error) E adalah

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$$

fungsi

$$f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}$$

kontinu, positif, dantak meningkat pada [5,∞) seperti pada gambar di bawah ini.



Jadi :

$$E = \sum_{n=6}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}} < \int_5^{\infty} xe^{-x^2}\, dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) \int_5^t e^{-x^2} \left(-2xdx\right)$$

$$== \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(e^{-x^2}\right)_5^t = \frac{1}{2} e^{-25} = 6,94 \times 10^{-12}$$

LATIHAN SOAL A

TENTUKAN SOLUSI DARI SOAL-SOAL DI BAWAH INI :

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+3}$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2k-3}$

3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k^2+3}$

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2k^2+1}$

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{\sqrt{k+2}}$

6. $\sum_{k=100}^{\infty} \frac{3}{(k+2)^2}$

7. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{7}{4k+2}$

8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{e^k}$

9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{(4+3k)^{7/6}}$

10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1000k^2}{1+k^3}$

11. $\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-3k^2}$

12. $\sum_{k=5}^{\infty} \frac{1000}{k(\ln k)^2}$

B. DERET POSITIF UJI-UJI LAINNYA

Kita telah menganalisis secara keseluruhan konvergensi dari dua deret, yaitu deret geometric dan deret p :

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$$

konvergen jika -1 < r < 1, divergen jika yang lainnya

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

konvergen jika p > 1, divergen jika yang lainnya

Pada bagian pertama, kita telah menjumpai bahwa deret tersebut konvergenmenuju suatu nilai asalkan deret tersebut konvergen, sedangkan pada bagian kedua kita tidak mempunyai hal ini. Deret-deret tersebut menyediakan standar-standar, atau model-model dimana kita dapat mengukur deret lainnya. perlu diingat bahwa kita masih harus mempertimbangkan deret yang mempunyai suku-suku positif

MEMBANDINGKAN SUATU DERET DENGAN DERET LAINNYA

Sebuah deret dengan suku-suku yang lebih kecil dari suku-suku deret konvergen yang bersesuaian akan bersifat konvergen, sebuah deret dengan suku-suku yang lebih besar dari suku-suku deret divergen yang bersesuaian akan bersifat divergen.

TEOREMA A. Uji Perbandingan Biasa (Ordinary Comparison Test)

andaikan $0 \leq a_n \leq b_n$ untuk $n \geq N$

(i). Jika

$$\sum b_n$$

konvergen, demikian pula

$$\sum a_n$$

(ii). Jika

$$\sum a_n$$

divergen, demikian pula

$$\sum b_n$$

Contoh 1

Apakah

$$\sum \frac{n}{5n^2 - 4}$$

konvergen atau divergen

Solusi
suatu tebakan yang jitu akan mengatakan bahwa deret ini divergen, karena suku ke – n menunjukan sifat seperti 1/5n untuk nilai n yang besar. Faktanya ,

$$\frac{n}{5n^2-4} > \frac{n}{5n^2} = \frac{1}{5}.\frac{1}{n}$$

kita mengetahui bahwa

$$\sum \frac{1}{5}.\frac{1}{n}$$

divergen karena ini dakah seperlima darideret harmonic. Jadi berdasarkan uji perbandingan biasa, deret tersebut juga divergen.

Contoh 2
Apakah

$$\sum \frac{n}{2^n(n+1)}$$

konvergen atau divergen

Solusi
Sebuah tebakan yang jitu akan mengatakan bahwa deret konvergen, karena suku ke-n berperilaku seperti $(1/2)^n$ untuk nilai n yang besar. Untuk membenarkan dugaan kita ini, perlu dicatat bahwa :

$$\frac{n}{2^n(n+1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{n}{n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

karena

$$\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

konvergen (ini adalah deret geometric dengan r = ½) kita dapat menyimpulkan bahwa deret tersebut konvergen.

TEOREMA B UJI PERBANDINGAN LIMIT

Andaikan $a_n \geq 0$; $b_n \geq 0$ dan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

Jika 0 < L < ∞, maka

$$\sum a_n$$

dan

$$\sum b_n$$

adalah konvergen atau divergen secara bersamaan. Jika L = 0 dan

$$\sum b_n$$

konvergen, maka

$$\sum a_n$$

konvergen

CONTOH 3
Tentukan konvergensi atau divergensi dari masing-masing deret berikut :

Solusi
Kita menerapkan uji perbandingan limit, tetapi kita masih harus memutuskan akan membandingkan suku ke-n dengan apa. Kita dapat melihat seperti apa suku ke – n ini untuk nilai n yang besar dengan melihat suku-suku dengan pangkat tertinggi di dalam pembilang dan penyebutnya.
Pada kasus pertama, suku ke-n adalah $3/n^2$dan pada kasus kedua, suku ke-n adalah 1/n.

Contoh 4
Apakah

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

konvergen atau divergen ?
Solusi
Kita harus membandingkan $(\ln n)/n^2$ dengan apa> Jika kita mencoba $1/n^2$ kita akan memperoleh.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2}+\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\ln n=\infty$$

Uji gagal karena syarat tidakterpenuhi. dipihak lain jika menggunakan 1/n, maka kita akan memperoleh

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2}+\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\ln n=0$$

lagi-lagi, uji ini gagal. Kemungkinannya adalah nilai diantara $1/n^2$ dan 1/n akan berhasil, seperti $1/n^{3/2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2}+\frac{1}{n^{3/2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}=0$$

(kesamaan terakhir dihasilkan dari aturan L'hopital. Kita dapat menyimpulkan dari bagian kedua uji perbandingan limit bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$$

konvergen karena

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$$

konvergen

TEOREMA C UJI RASIO

misalkan

$$\sum a_n$$

adalah deret dengan suku-suku positif dan andaikan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$$

(i). Jika ρ < 1, maka deret tersebut konvergen

(ii). Jika ρ > 1 atau jika

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\infty$$

maka deret tersebut divergen

(iii). Jika ρ = 1, maka uji tersebut tidak dapat memberikan kesimpulan.

Contoh 5

Ujilah konvergensi atau divergensi dari

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

Solusi

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

kita dapat menyimpulkan berdasarkan uji rasio bahwa deret tersebut konvergen.

Contoh 6
Ujilah konvergensi atau divergensi dari

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{20}}$$

solusi

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{20}} \frac{n^{20}}{2^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{20} .2 = 2$$

kita dapat menyimpulkan bahwa deret tersebut divergen.

LATIHAN SOAL B
TENTUKAN SOLUSI SOAL-SOAL DI BAWAH INI :

1. Gunakan perbandingan Uji perbandingan limit untuk menentukan konvergen atau divergen

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 2n + 3}$ **2.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n + 1}{n^3 - 4}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n + 1}}$ **4.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n + 1}}{n^2}$

2. Gunakan Uji rasio untuk menentukan konvergen atau divergen

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n!}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{100}}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)!}$

10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k + k}{k!}$

DAFTAR PUSTAKA

- **Varberg, Purcell, Rigdon, ,KALKULUS, edisi kesembilan , Erlangga, Jakarta, 2011**

Murray R.Spieqel,CALCULUS LANJUT, edisi kedua, Erlangga, Jakarta, 2008.