MODUL MATEMATIKA 2

(IND 124)

MODUL SESI 6

DERET TAK TERHINGGA

DISUSUN OLEH

SEPTIAN RAHMAT ADNAN, S.Si.,M.Si

UNIVERSITAS ESA UNGGUL

2020

Pokok Bahasan : DERET TAK TERHINGGA
Sub Pokok Bahasan :

- Barisan Tak Terhingga
- deret tak terhingga
- deret positif :Uji Integral
- Deret Positif : Uji-uji lainnya

Tujuan Instruksional Umum :
Agar mahasiswa dapat memahami dan menyelesaikan soal dan aplikasi yang berkaitan dengan deret tak terhingga

Tujuan Instruksional Khusus :
Agar mahasiswa mampu menjelaskan dan dapat menyelesaikan masalah yang terkait dengan :

- Barisan Tak Terhingga
- deret tak terhingga
- deret positif :Uji Integral
- Deret Positif : Uji-uji lainnya

A. BARISAN TAK TERHINGGA

dalam bahasa yang sederhana, barisan :

$$a_1, a_2, a_3, a_4, ...$$

adalah susunan bilangan-bilangan real yang teratur, satu untuk setiap bilangan bulat positif. Lebih tepatnya, barisan takterhingga adalah fungsi yang daerah asal (domain)-nya adalah himpunan bilangan bulat positif dan daerah hasil nya dalah himpunan bilangan real. Kita dapat menotasikan sebuah barisan dengan a_1, a_2, a_3, a_4, ... dengan

$$\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$$

atau secara sederhana dengan

$$\left\{a_n\right\}$$

kadangkala kita juga dapat sedikit memperluas batasan tersebut dengan membuat daerah asalnya terdiri dari seluruh bilangan bulat yang lebih besar atau sama dengan bilangan bulat tertentu, seperti b_1, b_2, b_3, b_4, ... dan dengan c_1, c_2, c_3, c_4, ... yang masing-masing dilambangkan dengan

$$\left\{b_n\right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\left\{c_n\right\}_{n=1}^{\infty}$$

sebuah barisan dapat ditentukan dengan memberikan suku awal yang cukup untuk membentuk sebuah pola, seperti pada

1,4,7,10,13, ...

dengan rumus eksplisit untuk suku ke n, seperti pada :

$$a_n = 3n - 2$$

saat :

$$n \geq 1$$

atau dengan rumus rerkursi :

$$a_n = a_{n-1} + 3$$

perlu dicatat bahwa ketiga rumus ini melukiskan barisan yang sama. Berikut ini adalah empat rumus eksplisit dan beberapa suku pertama dari barisan yang dihasilkannya

$$(1)\, a_n = 1 - \frac{1}{n}$$

dengan n ≥ 1

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...$$

$$(2)\, b_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n}$$

dengan n ≥ 1

$$0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\ldots.$$

$$(3)\, c_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

dengan n ≥ 1

$$0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{4}{5}, \ldots\ldots.$$

$$(4)\, d_n = 0,999$$

dengan n ≥ 1

$$0.999, 0.999, 0.999, 0.999 \ldots\ldots..$$

Konvergensi

Definisi

barisan a_n dikatakan konvergen menuju L dan ditulis sebagai

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

Jika untuk tiap bilangan positif ε terdapat sebuah bilangan positif N yang bersesuaian, sedemikian rupa sehingga

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

barisan yang tidak konvergen menuju bilangan terhingga terhingga L sembarang dikatakan divergen atau menyebar.

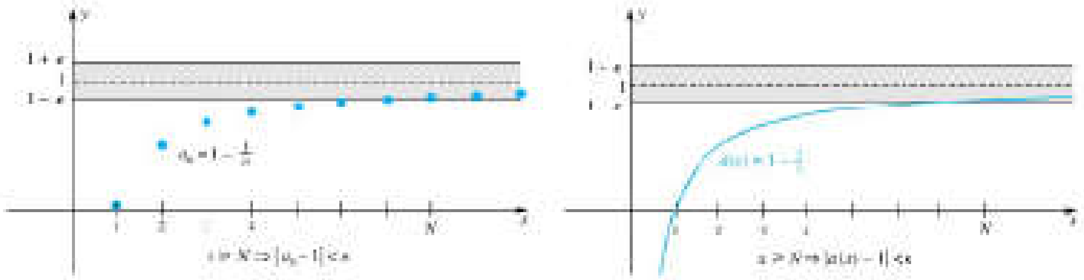
Untuk melihat hubungan dengan limit takterhingga perhatikan pada grafik $a_n = 1 - 1/n$ dan a(x) = 1 – 1/x/ (gambar di bawah ini) satu-satunya perbedaan adalah bahwa pada kasus barisan daerah asalnya dibatasi pada bilangan bulat positif. Pada kasus pertama, kita menulis

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 1$$

dan pada kasus kedua bentuk limit :

$$\lim_{n \to \infty} a(x) = 1$$

perhatikan interpretasi dari € dan N pada diagram-diagram pada gambar.



Contoh 1.
Tunjukkan bahwajika p adalah bilangan bulat positif, maka :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$$

Solusi :
Hal ini relatif jelas dari pembahasan sebelumnya , tetapi disini kita dapat mendemonstrasikannya secara lebih formal. Misalkan diberikan sebarang € > 0. Pilihlah N sebagai sembarang bilangan yang lebih besar dari

$$\sqrt[p]{1/\varepsilon}$$

maka, n ≥ N mengimplikasikan bahwa :

$$|a_n - L| = \left|\frac{1}{n^p} - 0\right| = \frac{1}{n^p} \le \frac{1}{N^p} < \frac{1}{\left(\sqrt[\varepsilon]{1/\varepsilon}\right)^p} = \varepsilon$$

seluruh teorema limit yang telah kita kenal berlaku pula untuk barisan – barisan konvergen.

Teorema A. Sifat-sifat limit pada barisan
Misalkan (a_n) dan (b_n) adalah barisan-barisan konvergen dan k adalah konstanta, maka :

$$1).\lim_{n\to\infty} k = k$$

$$2).\lim_{n\to\infty} ka_n = k\lim_{n\to\infty} a_n$$

$$3).\lim_{n\to\infty}\left(a_n + b_n\right) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$4).\lim_{n\to\infty}\left(a_n . b_n\right) = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$5).\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}, \lim_{n\to\infty} b_n \ne 0$$

Contoh 2.

Tentukan solusi dari limit di bawah ini :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{7n^2+1}$$

Solusi :
Untuk memutuskan apa yang terjadi pada hasil bagi dari dua polynomial dalam n ketika n emakin besar, lebih baik kita membagi pembilang dan penyebut dengan pangkat n yang terbesat yang terdapat pada penyebut. Hal ini akan membenarkan langkah pertama kita berikut ini dan selebihnya akan dibenarkan dengan mengambil pernyataan dari teorema A sebagai berikut :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{7n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{7+(1/n^2)}$$

$$\boxed{5} \Rightarrow \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3}{\lim\limits_{n\to\infty}\left[7+(1/n^2)\right]} =$$

$$\boxed{3} \Rightarrow \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3}{\lim\limits_{n\to\infty} 7 + \lim\limits_{n\to\infty} 1/n^2} =$$

$$\boxed{1} \Rightarrow \frac{3}{7+\lim\limits_{n\to\infty} 1/n^2} = \frac{3}{7+0} = \frac{3}{7}$$

sejauh ini teorema limit sudah begitu akrab bagi kita sehingga dalam solusi di atas, kita melompat dari tahap awal langsung ke hasil akhir.

Contoh 3.
Apakah barisan

$$\left\{\left(\ln n / e^n\right)\right\}$$

konvergen, jika ya, menuju bilangan berapa ?

Solusi :
disini dan pada banyak soal barisan lainnya, akan lebih mudah jika kita menggunakan fakta yang nyaris nyata berikut ini

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(n) = L$$

cara ini relative mudah karena kita dapat menerapkan aturan L'Hopital pada soal peubah kontinu khususnya, dengan menggunakan atusan L'Hopital :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{e^x} = 0$$

Jadi,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{e^n} = 0$$

dalam hal ini {(ln/e^n)} konvergen menuju 0.

Berikut iniadalah sebuah teorema lain yang telah kita lihat sebelumnya dalam bentuk yang agak berbeda

TEOREMA B Teorema Apit
Andaikan (a_n) dan (c_n) keduanya konvergen menuju L dan $a_n \le b_n \le c_n$ untuk $n \ge K$ K bilangan bulat tetap (fixed integer). Maka, (b_n) juga konvergen menuju L.

Contoh 4
Tujukkan bahwa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin^3 n}{n} = 0$$

Solusi
untuk $n \ge 1$, $-1/n \le (\sin^3 n)/n \le 1/n$, Karena

$$\lim_{n\to\infty} \left(-1/n\right) = 0$$

dan

$$\lim_{n\to\infty} \left(1/n\right) = 0$$

maka hasilnya sesuai dengan teorema apit

TEOREMA C
Jika

$$\lim_{n\to\infty} \left|a_n\right| = 0$$

maka

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Bukti
Karena

$$-\left|a_n\right| \le a_n \left|a_n\right|$$

maka hasilnya sesuai dengan teorema apit.
Apa yang terjadi dengan bilangan-bilangan di dalam barisan ($0,999^n$) ketika $n \to \infty$? anda dipersilahkan untuk menghitung $0,999^n$ untuk n = 10, 100, 1000 dan 10.000 dengan menggunakan kalkulator untuk membuat sebuah dugaan yang baik. Kemudian, perhatikan contoh berikut

Contoh 5

Tunjukkan bahwa jika -1 < r < 1, maka :

Solusi :
Jika r = 0, maka hasilnya tidak berarti (trivial), jadi diandaikan yang sebaliknya. Maka 1/(r) > 1, dan sehingga 1/(r) = 1 + p, untuk beberapa bilangan p > 0. Berdasarkan rumus binomial :

$$\frac{1}{|r|^n} = (1+p)^n = 1 + pn + (sukupositif) \geq pn$$

jadi,

$$0 \leq |r|^n \leq \frac{1}{pn}$$

karena

$$\lim_{n\to\infty}(1/pn) = (1/p)\lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$$

maka sesuai teorema apit diperoleh

$$\lim_{n\to\infty}|r|^n = 0$$

atau, secara ekuivalen

$$\lim_{n\to\infty}|r|^n = 0$$

berdasarkan teorema C

$$\lim_{n\to\infty}|r|^n = 0$$

Bagaimana jika r > 1, misalnya r = 1,5?, maka r^n akan bergerak ke arah ∞. Dalam kasus ini, kita menuliskan

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \infty, r > 1$$

meskipun demikian, kita mengatakan bahwa barisan (r^n) divergen. Agar menjadi konvergen, sebuah barisan harus mendekati sebuah limit terhingga. Barisan (r^n) juga divergen ketika r ≤ -1.

TEOREMA D Teorema barisan Monotonik
Jika U adalah batas atas untuk barisan takmenurun (a_n), maka barisan tersebut akan konvergen menuju limit A yang kurang dari atau sama dengan U. Demikian pula, jika L adlah batas bawah untuk barisan takmeningkat (b_n), maka barisan (b_n) tersebut akan konvergen menuju limit B yang lebih besar dari atau sama dengan L.

Istilah barisan monotonik digunakan untuk menjelaskan baik barisan tak menurun maupun barisan takmeningkat, yang juga merupakan nama untuk teorema ini.

Teorema D menjelaskan sebuah sifat yang sangat mendasar tentang sistem bilangan real, dimana dalam bahasa yang sederhana menyatakan bahwa garis bilangan real tidak “berlubang”. sifat inilah yang membedakan garis bilangan asli dengan garis bilangan rasional (yang penuh lobang). Masih banyak hal yang dapat diungkapkan mengenai topic ini, kami berharap Teorema D ini dapat menggugah intuisi anda, dan anda dapat menerimanya dengan yakin.

Contoh 6

Tunjukkan bahwa barisan $b_n = n^2/2^n$ konvergen dengan menggunakan teorema D.

Solusi :

beberapa suku pertama dari barisan ini adalah :

$$\frac{1}{2},1,\frac{9}{8},1,\frac{25}{32},\frac{36}{64},\frac{49}{128},......$$

untuk n ≥ 3, barisan tersebut akan menurun ($b_n > b_n+1$) sebuah fakta yang akan kita bahas saat ini. Setiap ketidaksamaan berikut ini ekuivalen satu sama lain.

$$\frac{n^2}{2^n} > \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$$

$$n^2 > \frac{(n+1)^2}{2}$$

$$2n^2 > n^2 + 2n + 1$$

$$n^2 - 2n > 1$$

$$n(n-2) > 1$$

Ketidaksamaan yang terakhir sudah pasti benar untuk n ≥ 3. Karena barisan tersebut menurun dan memiliki batas bawah.

LATIHAN SOAL

Tentukan Solusi Pertanyaan di Bawah Ini

1. $a_n = \dfrac{n}{3n-1}$

2. $a_n = \dfrac{3n+2}{n+1}$

3. $a_n = \dfrac{4n^2+2}{n^2+3n-1}$

4. $a_n = \dfrac{3n^2+2}{2n-1}$

5. $a_n = \dfrac{n^3+3n^2+3n}{(n+1)^3}$

6. $a_n = \dfrac{\sqrt{3n^2+2}}{2n+1}$

7. $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+2}$

8. $a_n = \dfrac{n\cos(n\pi)}{2n-1}$

9. $a_n = \dfrac{\cos(n\pi)}{n}$

10. $a_n = e^{-n}\sin n$

11. $a_n = \dfrac{e^{2n}}{n^2+3n-1}$

12. $a_n = \dfrac{e^{2n}}{4^n}$

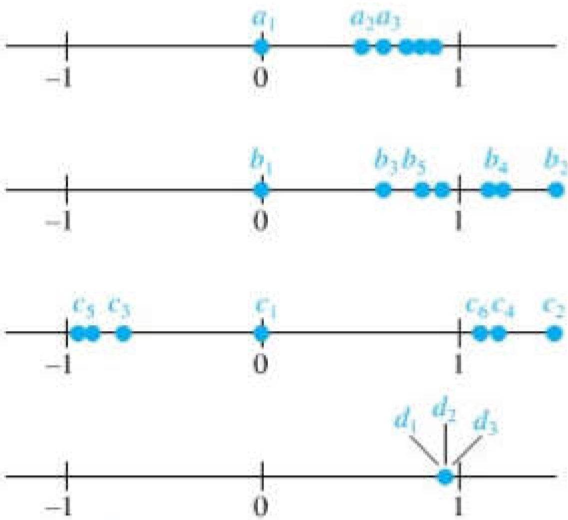
13. $a_n = \dfrac{(-\pi)^n}{5^n}$

14. $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + 3^{n/2}$

B. Deret Tak terhingga

dalam sebuah paradox yang terkenal sekita 2400 tahun yang lalu, Zeno dari Elea mengatakan bahwa seorang pelari tidak dapat menyelesaikan sebuah pertandingan karena pelari tersebut pertama harus menuntaskan setengah jarak, kemudian setengah jaraksisanya, kemudian setengan dari jaraknya masih ada dan seterusnya selamanya. Karena waktu tempuh pelari adalah takterhingga. Meskipun demikian, kita mengetahui bahwa kenyataanya pelari-pelari dapat menyelesaikan pertandingan.

Bayangkan sebuah lintasan pertandingan yang mempunyai jarak sepanjang 1 mil. Maka segnem-segmen dari argument Zeno akan mempunyai jarak sepanjang 1 mil. Maka segmen-segmen dari argument Zeno akan mempunyai panjang ½ mil, ¼ mil, 1/8 mil, dan seterusnya seperti pada gambar :



Dalam bahasa matematika menyelesaikan pertandingan tersebut akan merupakan jumlah dari perhitungan :

yang mungkin terlihat mustahil. Tetapi, tunggu dulu. Hingga saat ini, istilah jumlah hanya didefinisikan sebagai penambah suku-suku yang terhingga banyaknya. Istilah “Jumlah takterhingga” tak mempunyai makna bagi kita.

Perhatikan jumlah-jumlah parsial berikut ini

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^3} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Tampak jelas, jumlah-jumlah parsial tersebut semakin mendekat menuju 1. Kenyataan,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

jumlah takterhingga kemudian didefinisikan sebagai limit dari jumlah parsial Sn.
Lebih umum lagi, perhatikan deret takterhingga (infinite series)

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots$$

yang juga dilambangkan dengan

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

atau

$$\sum a_k$$

Maka jumlah parsial ke-n, dapat dinyatakan dengan

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

kita berikan definisi formal berikut :

DEFINISI
Deret tak terhingga

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

konvergen dan mempunyai jumlah (sum) Sjika barisan jumlah-jumlah parsial (Sn) konvergen menuju S. Jika Sn divergen, maka deret tersebut divergen. Deret divergen tidak mempunyai jumlah.

Deret Geometrik
Deret berbentuk

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots$$

di mana a ≠ 0 disebut deret geometric

Contoh 1
Tunjukkan bahwa deret geometrik konvergen dengan jumlah S = a/(1 - r) jika (r) < 1, tetapi divergen jika (r) ≥ 1.

Solusi :
Misalkan Sn = a + ar + ar^2 + ……. +ar^{n-1}. Jika r =1, S_n = na yang akan bertambah tanpa batas, sehingga S_n divergen. Jika r ≠ 1. Kita dapat menuliskan

$$S_n - rS_n = a\left(a + ar + \ldots\ldots + ar^{n+1}\right) - \left(a + ar + \ldots\ldots + ar^n\right)$$

$$= a - ar^n$$

sehingga

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{a}{1 - r} r^n$$

Jika (r) < 1, maka

$$S_n = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1 - r}$$

jika (r) > 1 atau r = -1, maka barisan (r^n) divergen, demikian pula dengan (S_n).

Contoh 2
Gunakan hasil pada contoh 1untuk menentukan jumlah dari dua deret geometric berikut :

$$(a).\frac{4}{3}+\frac{4}{9}+\frac{4}{27}+\frac{4}{31}+.....$$

$$(b).0,515151.....=\frac{51}{100}+\frac{51}{10000}+\frac{51}{1000000}+.....$$

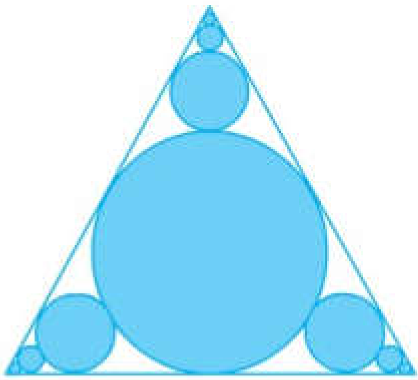
Solusi :

$$(a).S=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}=2$$

$$(b).S=\frac{\frac{51}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{\frac{51}{100}}{\frac{99}{100}}=\frac{51}{99}=\frac{17}{33}$$

Secara kebetulan prosedur pada bagian b menyerankan bagaimana caranya untukmenunjukkan bahwa pengulangan bilangan tertentu merepresentasikan sebuah bilangan rasional.

Contoh 3
Diagram pada gambar berikut merepresentasikan sebuah segitiga sama sisi dimana didalamnya terdapat banyak lingkaran yang tak terhingga yang bersinggungan dengan segitiga dan dengan lingkaran-lingkaran tetangganya, dan mengarah ke sudut-sudut segitiga. Berapa bagiankah luas dari segitiga yang ditempati oleh lingkaran



Solusi
Untuk mempermudah, andaikan bahwa lingkaran terbesar mempunyai jari-jari 1, yang membuat segitiga tersebut mempunyai panjang sisi $2(3)^{1/2}$. Pusatkan perhatian anda pada tumpukan lingkaran-lingkaran vertical, dengan sedikit pemahaman geometri (pusat dari lingkaran besar adalah) duapertiga jarak dari vertex atas kealas segitiga, kita melihat bahwa jari-jari dari lingkaran-lingkaran tersebut adalah 1, 1/3, 1/9, …… da simpulkan bahwa tumpukan lingkaran veryikal tersebut mempunyai luas :

$$\pi\left[1^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\left(\frac{1}{27}\right)^2+\ldots\ldots\right]$$

$$=\pi\left[1^2+\frac{1}{9}+\frac{1}{81}+\frac{1}{729}+\ldots\ldots\right]=\pi\left[\frac{1}{1-\frac{1}{9}}\right]=\frac{9\pi}{8}$$

Luas total dari keseluruhan lingkaran adalah tiga kali bilangan ini dikurangi dua kali luas lingkaran besar,yaitu 27π/8 - 2π atau 11 π/8. Karena segitiga tersebut mempunyai luas $3(3)^{1/2}$, maka bagian dari luas yang ditempati oleh lingkaran-lingkaran tersebut adalah ….

$$\frac{11\pi}{24\sqrt{3}}=0,83$$

TEOREMA A Uji Suku ke-n untuk divergensi
Jika deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konvergen,maka :

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

secara ekuivalen. Jika

$$\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$$

atau jika

$$\lim_{n \to \infty} a_n$$

tidak ada, maka deret tersebut divergen

TEOREMA B Kelinieararan Deret Konvergen

Jika

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n$$

dan

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_n$$

keduanya konvergen danc adalah kosntanta, maka :

$$\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$$

dan

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$$

juga konvergen dan

$$(i). \sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$(ii). \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

TEOREMA C

Jika

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

divergen dan c ≠ 0, maka

$$\sum_{k=1}^{\infty} c a_k$$

adalah divergen

TEOREMA D Pengelompokan Suku-Suku
Suku-suku di dalam deret konvergen dapat dikelompokkan dengan sebarang cara (asalkan urutan suku-suku dipertahankan) dan deret yang baru akan konvergen dan jumlahnya sama dengan jumlah deret semula

LATIHAN SOAL
Tentukan Solusi dari soal-soal di bawah ini :

1. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^{k}$

2. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{-k-2}$

3. $\sum_{k=0}^{\infty}\left[2\left(\frac{1}{4}\right)^{k}+3\left(-\frac{1}{5}\right)^{k}\right]$

4. $\sum_{k=1}^{\infty}\left[5\left(\frac{1}{2}\right)^{k}-3\left(\frac{1}{7}\right)^{k+1}\right]$

5. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-5}{k+2}$

6. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{9}{8}\right)^{k}$

7. $\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k-1}\right)$

8. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{k}$

9. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{100^{k}}$

10. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(k+2)k}$

11. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{e}{\pi}\right)^{k+1}$

12. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^{k+1}}{7^{k-1}}$

13. $\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{3}{(k-1)^{2}}-\frac{3}{k^{2}}\right)$

14. $\sum_{k=6}^{\infty}\frac{2}{k-5}$

DAFTAR PUSTAKA

- **Varberg, Purcell, Rigdon, ,KALKULUS, edisi kesembilan , Erlangga, Jakarta, 2011**
- **Murray R.Spieqel,CALCULUS LANJUT, edisi kedua, Erlangga, Jakarta, 2008.**