MODUL MATEMATIKA 2

(IND 124)

MODUL SESI 5

BENTUK TAK TENTU DAN INTEGRAL TAK LAZIM (Lanjutan)

DISUSUN OLEH

SEPTIAN RAHMAT ADNAN, S.Si.,M.Si

UNIVERSITAS ESA UNGGUL

2020

Pokok Bahasan : BENTUK TAK TENTU DAN INTEGRAL TAK LAZIM (Lanjutan)

Sub Pokok Bahasan :

- Integral tak wajar : limit tak terhingga dari integral
- Integral tak wajar : integral tak terhingga

Tujuan Instruksional Umum :
Agar mahasiswa dapat memahami menyelesaikan soal-soal terkait dengan integral tak wajar

Tujuan Instruksional Khusus :
Agar mahasiswa mampu menjelaskan dan dapat menyelesaikan masalah yang terkait dengan :

- Integral tak wajar : limit tak terhingga dari integral
- Integral tak wajar : integral tak terhingga

A. INTEGRAL TAKWAJAR : LIMIT TAKTERHINGGA DARI INTEGRAL

Pada definisi

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x}dx$$

diasumsikan bahwa selang [a,b] adalah terhingga. Tetapi dalam sejumlah aplikasi pada bidang fisika, ekonomi dan statistika peluang, kita bermaksud untuk mengubah a dan b (atau keduanya) menjadi ∞ atau -∞. Dengan demikian, kita harus menemukan cara untuk member makna bagi simbol-simbol seperti :

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x}dx$$

$$\int_\infty^{-1} xe^{-x^2}dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}dx$$

integral-integral di atas disebut integral tak wajar (improper integral) dengan limit-limit takterhingga.

Sebuah limit takterhingga Grafik f(x) = e^{-x} pada (0, ∞) diperlihatkan pada gambar di bawah ini

DEFINISI

$$\int_\infty^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

Jika limit-limit di ruaskanan ada dan mempunyai nilai terhingga, maka kita mengatakan bahwa integral-integral takwajar yang berhubungan akan konvergen dan memiliki nilai-nilai tersebut. Jika yang terjadi sebaliknya, maka integral-integral tersebut dikatakan divergen.

Contoh 1
Tentukan Solusi dari soal berikut :

$$\int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2}dx$$

Solusi :

$$\int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{a}^{-1} e^{-x^2}\left(-2xdx\right) = \left[\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_a^{-1}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-1^2} - \frac{1}{2}e^{-a^2}$$

Jadi

$$\int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{2}e^{-1^2} - \frac{1}{2}e^{-a^2}\right] = -\frac{1}{2e}$$

Contoh 2

Tentukan Solusi dari soal berikut :

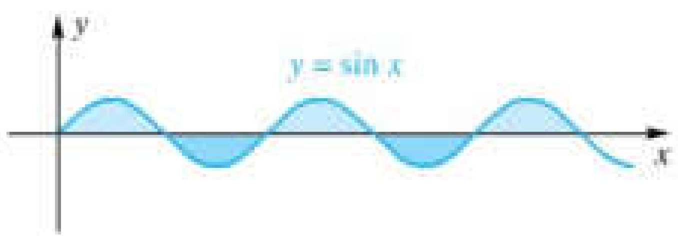
$$\int_0^{\infty} \sin x dx$$

Solusi :

$$\int_0^{\infty} \sin x dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \sin x dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\cos x\right]_0^b$$

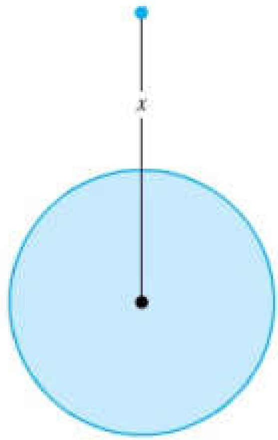
$$= \lim_{b\to\infty}\left[1-\cos b\right]$$

limit yang terakhir tidak memilki solusi, sehingga kita menyimpulkan bahwa integral tersebut divergen. Dengan menggunakan pengertian geometric dari integral sin x dx maka kita akan daparkan kurva dari sin x seperti berikut



Contoh 3

Menurut hukum kusdrst invers Newton, gaya yang dikerahkan bumi terhadap sebuah pesawat ruang angkasa adalah $-k/x^2$, dimana x adalah jarak (misalnya dalam mil) dari pesawat tersebut ke titik pusat bumi (seperti pada gambar). Maka, gaya F(x) yang diperlukan untuk mengangkat pesawat tersebut adalah $F(x) = k/x^2$. Berapa besarkah gaya yang diperlukan untuk mengangkat pesawat seberat 1000 pon agar keluar dari medan gravitasi bumi ?



Solusi
Kita dapat menghitung nilai k dengan memperhatikan bahwa ketika x = 3960 mil (jari-jari bumi) F= 1000 pon. Ini berarti $k= 1000\ (3960)^2 = 1,568 \times 10^{10}$. Jadi, gaya (dalam mil-pon) yang dibutuhkan adalah

$$1,568\times10^{10}\int_{3960}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to\infty}1,568\times10^{10}\left[-\frac{1}{x}\right]_{3960}^{b}$$

$$=\lim_{b\to\infty}1,568\times10^{10}\left[-\frac{1}{b}+\frac{1}{3960}\right]$$

$$=\frac{1,568\times10^{10}}{3960}=3,96\times10^{6}$$

Kedua limit takterhingga
Sekarang kita bisa memberikan definisi untuk limit :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

DEFINISI
Jika

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$$

dan

$$\int_{0}^{\infty} f(x)dx$$

keduanya konvergen, maka :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

dikatakan konvergen dan mempunyai nilai :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx$$

Jika sebaliknya

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

Contoh 4
Tentukan solusi dari persamaan berikut :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$$

solusi :

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\tan^{-1} x\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\tan^{-1} b - \tan^{-1} 0\right]_0^b = \frac{\pi}{2}$$

dengan demikian :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

FUNGSI KERAPATAN PELUANG

Banyak fenomena melibatkan peluang atau sesuatu yang acak, Jika kita melempar sebuah koin, kita bisa mendapatkan bagian sisi angka atau gambar. Jika kita melempar koin sebanyak tiga kali, maka kita dapat menghitung jumlah N dari angka dan kita memperoleh 0,1,2 atau 3. Atau kita dapatmelempar koin hingga muncul sisi gambar, sehingga jumlah lemparan N adalah angka himpunan (1,2,3,….) Peubah M dan N disebut peubah acak (random variable) karena nilai-nilainya berubah dari satu peristiwa ke peristiwa lainnya. Peubah acak dimana hasil-hasil yang mungkin dapat disusun dalam suatu daftar disebut peubah acak diskret.

Fenomena lainnya melibatkan sebuah hasil yang dapat melibatkan nilai tertentudalam suatu selang. Sebagai contoh kita dapat melakukan pengamatan terhadap sebuah bola lampu yang dihubungkan dengan sebuah rangkaian listrik dan mengamati beberapa lampu tersebut dapat menyala atau kita dapat mengukurseberapa kuat suatu pegaw dapat ditekan ketka kita membebaninnya dengan massa seberat 2 Kg. Peubah –peubah acak yang dapat melibatkan nilai tertentu di dalam suatu selang disebut peubah acak kontinu. Fungsi kerapatan peluang untuk peubah acak kontinu X adalah fungsi f yang didefinisikan pada (-∞,∞) dengan sifat-sifat :

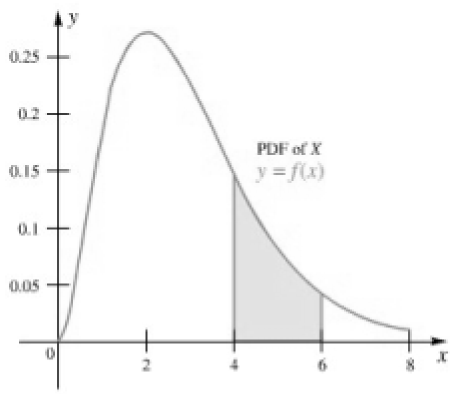
1. f(x) ≥ 0 untuk semua x
2. nilai dari integral fungsi x dx adalah 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Peluang dimana peubah acak X mempunyai nilai diantara a dan b adalah

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

sebagai contoh umur sebuah lampu pijar (dalam ribuan jam) dapat berupa sebuah peubah acak kontinu X yang mempunyai fungsi kerapatan peluang seperti yang ditunjujjan pada gambar di bawah ini :



Peluang bahwa lampu pijar ini akan putus dalam waktu 4000 sampai 6000 jam adalah

$$\int_{4}^{6} f(x)dx$$

(karena lampu pijar tidak mungkin mempunyai umur negatif, maka peluang bahwa nilai X akan berada bahwa fungsi kerapatan peluang akan nol untuk seluruh nilai X negatif). **Rata-rata** (mean) dari sebuah peubah acak yang mempunyai fungsi kerapatan peluang dapat didefinisikan sebagai :

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

Pada subbab sebelumnya kita telah mendefinisikan pust massa dari distribusi massa kontinu di sepanjang sebuah garis akan mempunyai kerapatan :

$$\delta(x)$$

maka :

$$\frac{M}{m} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x\delta(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx}$$

dalam konteks peluang, kita cenderung menggunakan istilah *kerapatan peluang* dibandingkan istilah *kerapatan massa*. Perhatikan pula bahwa jika kita mengganti kerapatan massa δ dengan kerapatan peluang f. maka penyebutnya menjadi :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

berdasarkan sifat 1 dari fungsi kerapatan peluang. Jadi, pusat massa untuk kerapatan peluang adalah :

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx}{1} = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \pi$$

karakterisristik penting lainnya dari sebuah fungsi kerapatan peluang adalah ragam atau varian, dinotasikan dengan δ^2, yang didefinisikan dengan

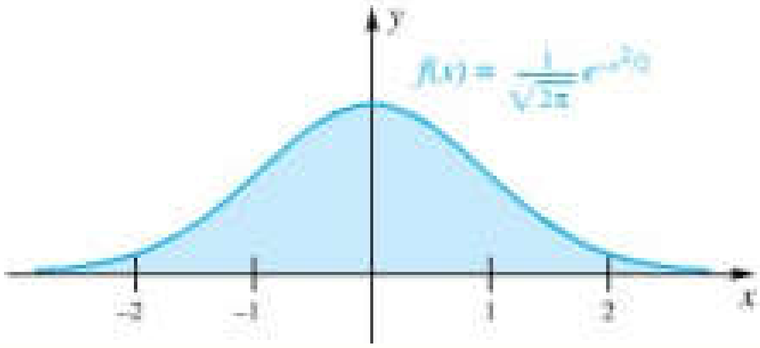
$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

ragam adalah ukuran dari persebaran atau ke tersebaran, ketika δ^2 nilainya kecil, maka distribusi peluang, secara kasar terkelompokkan sangat dekat di sekitar nilai rata-rata dan ketika δ^2 nilainya besar, maka distribusi peluangnya lebih tersebar.

Contoh 5.
Fungsi kerapatan peluang yang paling penting adalah apa yang disebut dengan standar normal, yang didefinisikan sebagai :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

gambar di bawah ini memperlihatkan grafik y = f(x)



adalah hal yang mengejutkan bahwa tidak mudah bagi kita untuk menunjukan bahwa :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} = 1$$

meskipun pada subbab berikutnya kita akan mencoba membuktikan. Kita gunakan fakta ini untuk menunjukan bahwa fungsi kerapatan ini mempunyai rata-rata 0 dan ragam 1; yaitu dengan menunjukan persamaan berikut ini :

$$a). \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2/2} dx = 0$$

$$b). \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2/2} dx = 1$$

Solusi :
(a).

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} xe^{-x^2/2} dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{b} e^{-x^2/2}(-x)dx \right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \right]_0^b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

karena

$$xe^{-x^2/2}$$

adalah sebuah fungsi ganjil,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2/2} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} xe^{-x^2/2} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

dengan demikian :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2/2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2/2}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} xe^{-x^2/2}dx$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0$$

(b). Karena

$$e^{-x^2/2}$$

adalah sebuah fungsi genap dan karena :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}dx = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = \frac{1}{2}$$

kemudian kita menerapkan integral sebagian (parsial) dan aturan L'Hopital

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{b}(-x)(e^{-x^2/2}x)dx\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\left[-xe^{-x^2/2}\right]_0^b + \int_0^b e^{-x^2/2}dx\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[0 + \int_0^{\infty} e^{-x^2/2}dx\right] = \frac{1}{2}$$

karena

$$x^2 e^{-x^2/2}dx$$

adalah sebuah fungsi genap, maka kita memperoleh kontribusi yang serupa di sebelah kiri nol, sehingga :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2}dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

LATIHAN SOAL

Tentukan solusi dari soal-soal di bawah ini :

1. $\int_{100}^{\infty} e^x \, dx$

2. $\int_{-\infty}^{-5} \frac{dx}{x^4}$

3. $\int_{1}^{\infty} 2xe^{-x^2} \, dx$

4. $\int_{-\infty}^{1} e^{4x} \, dx$

5. $\int_{9}^{\infty} \frac{x \, dx}{\sqrt{1 + x^2}}$

6. $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\pi x}}$

7. $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{1.00001}}$

8. $\int_{10}^{\infty} \frac{x}{1 + x^2} \, dx$

9. $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{0.99999}}$

10. $\int_{1}^{\infty} \frac{x}{(1 + x^2)^2} \, dx$

11. $\int_{e}^{\infty} \frac{1}{x \ln x} \, dx$

12. $\int_{e}^{\infty} \frac{\ln x}{x} \, dx$

13. $\int_{2}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

14. $\int_{1}^{\infty} xe^{-x} \, dx$

15. $\int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{(2x - 3)^3}$

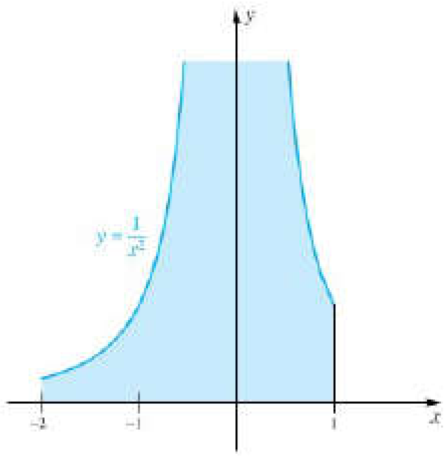
16. $\int_{4}^{\infty} \frac{dx}{(\pi - x)^{2/3}}$

Sub Bab 2. Integral Takwajar : Integral Takterhingga

Dengan memperhatikan pengintegralan-pengintegralan rumit yang telah kita pelajari, berikut ini adalah salah satu pengintegralan yang terlihat cukup sederhana tetapi tidak benar seperti integral berikut :

$$\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-2}^{1} = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

seseorang yang melihat pada gambar di bawah ini akan mengatakan bahwa ada sesuatu yang sangat salah dengan gambar tersebut.



Lalu pertanyaan berikutnya adalah adalah dimanakan letak kesalahanya ? untuk menjawab masalah ini, kita harus kembali ke subbab berikutnya. ingat kembali bahwa untuk sebuah fungsi yang dapat diintegralkan secara standar (atau wajar) harus bersifat terbatas. Fungsi kita tadi, $f(x) = 1/x^2$, bersifat tidak terbatas sehingga tidak dapat diintegralkan secara biasa (wajar).

DEFINISI
Misalkan f kontinu pada selang setengah terbuka [a,b) dan andaikan

$$\lim_{x\to b^-} \left| f(x) \right| = \infty$$

maka :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

asalkan limit ini ada dan terhingga, di mana kita mengatakan bahwa integral tersebut bersifat konvergen. Jika sebaliknya, kita mengatakan bahwa integral tersebut bersifat divergen.
Contoh 1
Jika dimungkinkan hitunglah integral tak wajar berikut :

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

Solusi

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{x\to 2^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{x\to 2^-} \left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) \right]_0^t$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \left[\sin^{-1}\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{0}{2}\right) \right] = \frac{\pi}{2}$$

Contoh 2
Jika dimungkinkan hitunglah integral tak wajar berikut :

$$\int_0^{16} \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx$$

Solusi

$$\int_0^{16} \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx = \lim_{x\to 0^+} \int_t^{16} x^{-1/4} dx$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{4}{3} x^{3/4} \right]_t^{16} = \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{32}{3} - \frac{4}{3} t^{3/4} \right] = \frac{32}{3}$$

Contoh 3
Jika dimungkinkan hitunglah integral tak wajar berikut :

$$\int_0^t \frac{1}{x}dx$$

Solusi

$$\int_0^t \frac{1}{x}dx = \lim_{x \to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x}dx$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left[\ln\right]_t^1 = \lim_{x \to 0^+} \left[-\ln t\right] = \infty$$

Contoh 4

Tunjukan bahwa persamaan berikut :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$$

bersifat konvergen jika p < 1 tetapi jika p ≥ 1

Solusi

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 x^{-p}dx$$

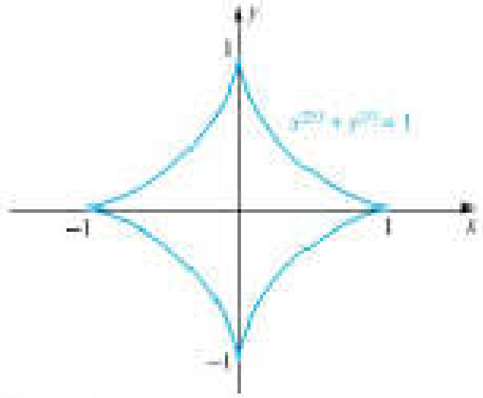
$$= \lim_{t \to 0^+} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_t^1 = \lim_{t \to 0^+} \left[\frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{t^{p-1}}\right]$$

Contoh 5

Sktesa grafik dari hiposkloid yang mempunyai empat btitik taring $x^{2/3}+y^{2/3} = 1$ dan tentukan perimeter(keliling)nya

Solusi

Grafik tersebut ditunjukkan pada gambar di bawah ini. untuk menentukan perimeternya cukup lakuka dengan menentukan panjang L dari porsi kuadran pertama dan mengalikannya dengan empat.



Kita menaksir L lebih besar dari $(2)^{1/2}$ = 1,4. Nilai Eksaknya adalah

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx$$

dengan turunan implisit dari $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, maka kita dapatkan

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}y' = 0$$

atau

$$y' = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

maka kita dapatkan

$$1+\left(y'\right)^2 = 1+\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}} = 1+\frac{1-x^{2/3}}{x^{2/3}} = \frac{1}{x^2}$$

kita dapatkan solusi

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}}\,dx$$

LATIHAN SOAL
Tentukan solusi dari soal-soal di bawah ini :

1. $\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}}$	2. $\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{4/3}}$
3. $\int_3^{10} \frac{dx}{\sqrt{x-3}}$	4. $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{9-x}}$
5. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	6. $\int_{100}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$
7. $\int_{-1}^3 \frac{1}{x^3}\,dx$	8. $\int_5^{-5} \frac{1}{x^{2/3}}\,dx$
9. $\int_{-1}^{128} x^{-5/7}\,dx$	10. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx$
11. $\int_0^4 \frac{dx}{(2-3x)^{1/3}}$	12. $\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} \frac{x}{(16-2x^2)^{2/3}}\,dx$
13. $\int_0^{-4} \frac{x}{16-2x^2}\,dx$	14. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$
15. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x+1)^{4/3}}$	16. $\int_0^3 \frac{dx}{x^2+x-2}$

DAFTAR PUSTAKA

- **Varberg, Purcell, Rigdon, ,KALKULUS, edisi kesembilan , Erlangga, Jakarta, 2011**
- **Murray R.Spieqel,CALCULUS LANJUT, edisi kedua, Erlangga, Jakarta, 2008.**