MODUL MATEMATIKA 2

(IND 124)

MODUL SESI 4

BENTUK TAK TENTU DAN INTEGRAL TAK LAZIM

DISUSUN OLEH

SEPTIAN RAHMAT ADNAN, S.Si.,M.Si

UNIVERSITAS ESA UNGGUL

2020

Pokok Bahasan : BENTUK TAK TENTU DAN INTEGRAL TAK LAZIM

Sub Pokok Bahasan :

- Bentuk taktentu 0/0
- Bentuk taktentu lainnya

Tujuan Instruksional Umum :
Agar mahasiswa dapat memahami menyelesaikan soal-soal terkait dengan fungsi limit tak tentu

Tujuan Instruksional Khusus :
Agar mahasiswa mampu menjelaskan dan dapat menyelesaikan masalah yang terkait dengan :

- Bentuk taktentu 0/0
- Bentuk taktentu lainnya

BENTUK TAK TENTU DAN INTEGRAL TAK LAZIM

A. BENTUK TAK TENTU TIPE 0/0

Pada beberapa kasus di kalkulus kita akan menemukan beberapa bentuk yang tidak biasa khususnuya pada bentuk limit. sering kita jumpai juga bentuk limit 0/0 sehingga untuk dapat menyelesaikan kasus tersebut kita perlu melakukan beberapa langkah seperti yang sudah dipelajari pada matakuliah matematika 1. Beberapa bentuk yang sering kita jumpai adalah sebagai berikut :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

bentuk pertama telahdiuraikan pada subbab sebelumnya dan bentuk ketiga pada dasarnya mendefinisikan turunan. ketiga limit tersebut memiliki hasil bagi, baik pembilang maupun penyebut memiliki limit 0.

Anda tentu masih ingat bahwa sebuah argumentasi geometric yang rumit telah mengarahkan kita pada kesimpulan hasil limit (sin x) / x = 1. disisi lain, pemfaktoran secara aljabar akan menghasilkan :

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x \to 3} \frac{x+3}{x+2} = \frac{6}{5}$$

ATURAN L'HOPITAL

ATURAN L'HOPITAL untuk BENTUK 0/0

Andaikan suatu fungsi limit sebagai berikut :

$$\lim_{x \to u} f(x) = \lim_{x \to u} g(x) = 0$$

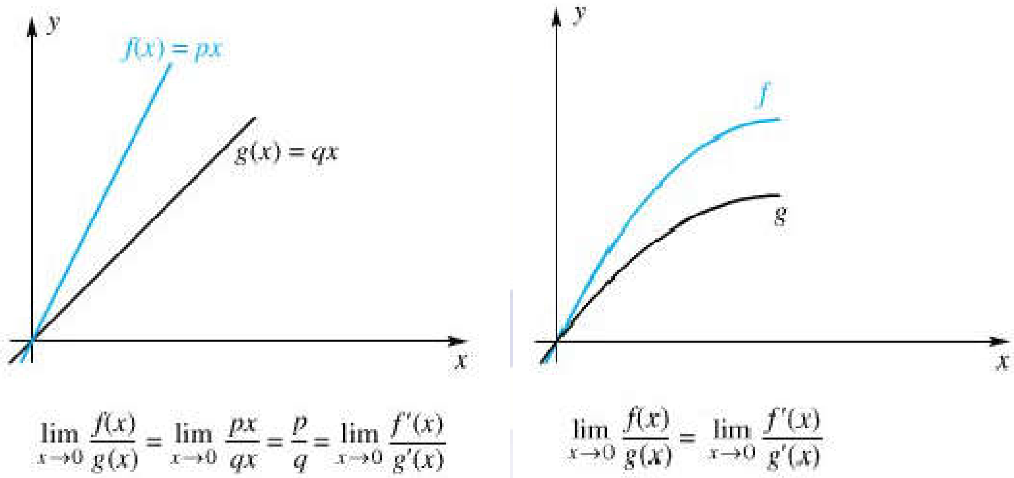
dan

$$\lim_{x \to u} \left[f'(x) / g'(x) \right]$$

berbentuk bilangan terhingga (finite) atau tak terhingga (infinite), maka

$$\lim_{x \to u} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Pelajarilah diagram berikut ini. Digram-diagram ini selayaknya dapat memperjelas aturanL’Hopital



Contoh 1 :
Dengan menggunakan aturan L’hopital tunjukan bahwa :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

dan

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

Solusi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{d \sin x}{dx} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

dan

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{d\left(1 - \cos x\right)}{dx} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{1} = 0$$

Contoh 2 :
Tentukan solusi persamaan di bawah ini :

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6}$$

dan

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+3x-10}{x^2-4x+4}$$

karena keduanya merupakan bentuk 0/0, maka untuk mendapatkan solusi dari soal tersebut kita gunakan aturan L'Hopital adalah :

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-x-6}=\lim_{x\to 3}\frac{2x}{2x-1}=\frac{6}{5}$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+3x-10}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2x+3}{2x-4}=\infty$$

Contoh 3 :
Tentukan solusi persamaan di bawah ini :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\ln(1+x)}$$

karena keduanya merupakan bentuk 0/0, maka untuk mendapatkan solusi dari soal tersebut kita gunakan aturan L'Hopital adalah :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 2x}{1/\left(1+x\right)}=\frac{2}{1}=2$$

Contoh 4 :
Tentukan solusi persamaan di bawah ini :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$$

karena keduanya merupakan bentuk 0/0, maka untuk mendapatkan solusi dari soal tersebut kita gunakan aturan L'Hopital pertama :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}\equiv\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$$

kita gunakan aturan L'Hopital kedua :

$$\equiv\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x}$$

kita gunakan aturan L'Hopital ketiga, maka kita dapatkan solusi sebagai berikut :

$$\equiv\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6}=-\frac{1}{6}$$

Contoh 5 :
Tentukan solusi persamaan di bawah ini :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2+3x}$$

karena keduanya merupakan bentuk 0/0, maka untuk mendapatkan solusi dari soal tersebut kita gunakan aturan L'Hopital :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2+3x} \equiv \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x+3} \equiv \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

aturan L'Hopital yang digunakan untuk cara penyelesaian soal di atas untuk aturan L'hopital pertama adalah benar, sedangkan aturan L'hopital kedua adalah salah karena setelah dilakukan aturan L'hopital pertama hasil limitnya tidak lagi 0/0 sehingga solusi yang benar adalah sebagai berikut :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2+3x} \equiv \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x+3} = 0$$

untuk beberapa kasus seperti kasus di atas kita harus berhenti melakukan aturan L'hopital saat hasil limit penyebut atau pembilang tidak lagi bernilai 0

Contoh 6 :
Tentukan solusi persamaan di bawah ini :

$$\lim_{x\to \infty}\frac{e^{-x}}{x^{-1}}$$

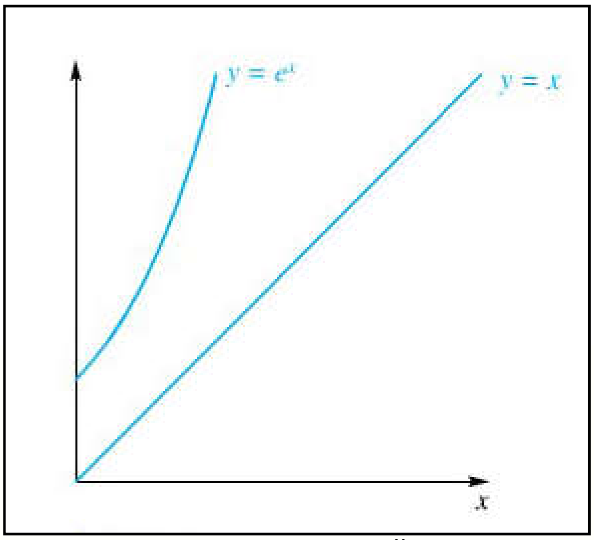
karena keduanya merupakan bentuk 0/0, maka untuk mendapatkan solusi dari soal tersebut kita gunakan aturan L'Hopital :

$$\lim_{x\to \infty}\frac{e^{-x}}{x^{-1}} \equiv \lim_{x\to \infty}\frac{e^{-x}}{x^{-2}} \equiv \lim_{x\to \infty}\frac{e^{-x}}{2x^{-3}} = \ldots$$

dari hasil aturan L'Hopital kita lihat bahwa dengan menerapkan aturan L'Hopital pada kasus ini kita membuat soal menjadi lebih sulit. Untuk menyelesaikan soal ini kita perlu melakukan sedikit pendekatan aljabar :

$$\lim_{x\to \infty}\frac{e^{-x}}{x^{-1}} = \lim_{x\to \infty}\frac{x}{e^{x}}$$

maka dari hasil tersebut limit pada kasus ini tidak dapat didefinisikan dengan bentuk ∞/∞, tetapi anda dapat menebak solusi dari soal ini adalah 0 dengan melihat kurva tren e^x.



Kurva fungsi e^x

TEOREMA NILAI RATA-RATA CAUCHY
Pembuktian dari aturan L'Hopital bergantung pada nilai Teorema Nilai Rata-Rata Cauchy untuk direrensiasi atau turunan berdasarkan dari Augustin Louis Chaucy (1789 – 1857)

Teorema B
Jika suatu fungsi f fan g merupakan fungsi yang dapat diturunkan pada a,b dan selanjutnya pada a,b. Jika g'(x) ≠ 0 untuk semua x pada (a,b), maka terdapat angka c yang diantara nilai a dan b seperti berikut :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

SOAL LATIHAN
Tentukan solusi pertanyaan di bawah ini dengan tepat !

1. $\lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin x}{x}$

2. $\lim_{x\to \pi/2} \frac{\cos x}{\frac{1}{2}\pi - x}$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin 2x}{\tan x}$

4. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1} 3x}{\sin^{-1} x}$

5. $\lim_{x\to -2} \frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 - 3x - 10}$

6. $\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 3x^2 + x}{x^3 - 2x}$

7. $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 1}$

8. $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x^2}{x^2 - 1}$

9. $\lim_{x\to \pi/2} \frac{\ln(\sin x)^3}{\frac{1}{2}\pi - x}$

10. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2\sin x}$

11. $\lim_{t\to 1} \frac{\sqrt{t} - t^2}{\ln t}$

12. $\lim_{x\to 0^+} \frac{7^{\sqrt{x}} - 1}{2^{\sqrt{x}} - 1}$

13. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos 2x}{7x^2}$

14. $\lim_{x\to 0^-} \frac{3\sin x}{\sqrt{-x}}$

15. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{\sin 2x - 2x}$

16. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^2 \sin x}$

17. $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\sin x - x}$

Teorema C

Aturan L'Hopital untuk bentuk tipe ∞/∞

Jika suatu fungsi limit dengan bentuk berikut :

$$\lim_{x\to u} |f(x)| = \lim_{x\to u} |g(x)| = \infty$$

Jika didapatkan seperti di bawah ini

$$\lim_{x\to u} \left[f'(x) / g'(x) \right]$$

dengan terbatas atau tidak terbatas, maka :

$$\lim_{x\to u} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

untuk dapat memahami lebih lanjut teorema ini, berikut adalah beberapa contoh soal dari teorema tersebut :

Contoh 1 :

Tentukan solusi persamaan di bawah ini :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$$

karena keduanya merupakan bentuk ∞/∞, maka untuk mendapatkan solusi dari soal tersebut kita gunakan aturan L'Hopital :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to u}\frac{d(x)}{d(e^x)}=0$$

Contoh 2 :
Buktikan jika a merupakan bilangan real positif maka :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{e^x}=0$$

dengan mengambil contoh a = 2,5 dan kita lakukan aturan L'Hopital maka kita dapatkan :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2,5}}{e^x}\equiv\lim_{x\to\infty}\frac{2,5x^{1,5}}{e^x}\equiv\lim_{x\to\infty}\frac{(2,5)(1,5)x^{0,5}}{e^x}$$

$$\equiv\lim_{x\to\infty}\frac{(2,5)(1,5)(0,5)x^{0,5}}{x^{0,5}e^x}=0$$

bentuk ini dapat diaplikasikan untuk soal dengan tipe yang sama dan nilai a > 0

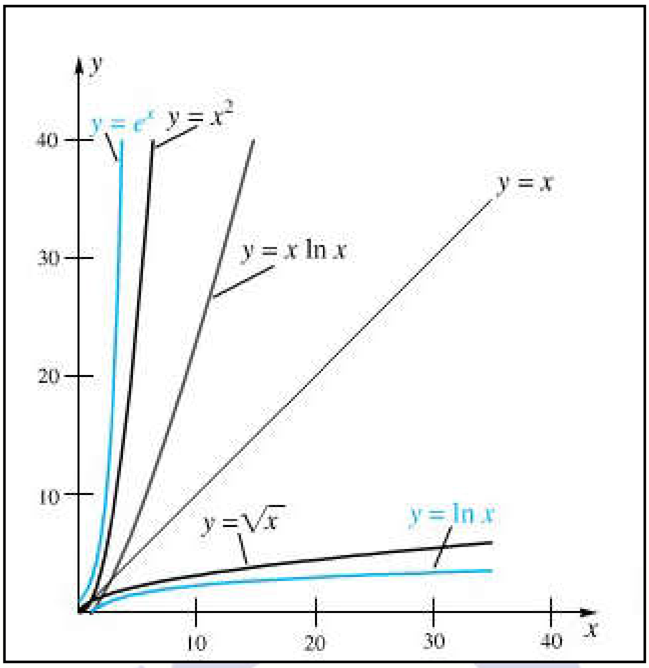
Contoh 3 :
Buktikan jika a merupakan bilangan real positif maka :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^a}=0$$

dengan nilai ln x dan x^a berinilai ∞ dengan x mendekati ∞, maka kita lakukan aturan L'Hopital maka kita dapatkan :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^a}\equiv\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{ax^{a-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{ax^a}=0$$

Jika kita amati lebih detail berbagai macam fungsi dari kasus limit dan kita plot/gambarkan pada kurva koordinat kartesian, maka gambaran fungsi tersebut dapat dilihat pada kurva di bawah ini :



Contoh 4 :
Tentukan solusi persamaan di bawah ini :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x}$$

karena keduanya merupakan bentuk ∞/∞, maka untuk mendapatkan solusi dari soal tersebut kita gunakan aturan L'Hopital dengan :

$$x \to 0^+$$

$$\ln x \to -\infty$$

$$\cot x \to \infty$$

maka didapatkan solusi :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} \equiv \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{1/x}{-\csc^2 x} \right]$$

persamaan ini masih merupakan bentuk tak tentu, tetapi daripada kita menerapkan kembali aturan L'Hopital (yang akan memperburuk keadaan), lebih baik kita menulis kembali pernyataan di dalam kurung sebagai :

$$\frac{1/x}{-\csc^2 x} = -\frac{\sin^2 x}{x} = -\sin x \frac{\sin x}{x}$$

dengan demikian

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\cot x}=\lim_{x\to 0^+}\left[-\sin x\frac{\sin x}{x}\right]=0.1=0$$

Contoh 5 :
Tentukan solusi persamaan di bawah ini :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\cot x}$$

karena keduanya merupakan bentuk ∞/∞, maka untuk mendapatkan solusi dari soal tersebut kita gunakan aturan L'Hopital dengan :

$$x\to 0^+$$
$$\ln x\to -\infty$$
$$\cot x\to \infty$$

maka didapatkan solusi :

$$\lim_{x\to\pi/2}\left(\tan x.\ln\sin x\right)=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln\sin x}{\cot x}$$

$$\equiv\lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{1}{\sin x}.\cos x}{-\csc^2 x}=\lim_{x\to\pi/2}\left(-\cos x.\sin x\right)=0$$

Contoh 6 :
Tentukan solusi persamaan di bawah ini :

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$$

suku pertama bertambah tanpa batas, demikian pula dengan suku yang kedua. Kita mengatakan bahwa limit ini mempunyai bentuk tak tentu ∞ - ∞. Aturan L'Hopital akan menentukaan hasilnya, tetapi hanya dapat dilakukan setelah kita menulis ulang soal di atas dalam sebuah bentuk dimana aturan L'Hopital bisa berlaku. dalamhal ini, kedua bagian tersebut harus bergabung, sebuah prosedur yang akan mengubah soal di atas menjadi bentuk 0/0. Penerapan dua kali aturan L'Hopital akan menghasikan :

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$$

$$\equiv \lim_{x\to 1^+}\frac{x.1/x+\ln x-1}{(x-1)(1/x)+\ln x}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{x\ln x}{x-1+1xnx}\equiv \lim_{x\to 1^+}\frac{1+\ln x}{2+\ln x}=\frac{1}{2}$$

Bentuk Tak tentu 0^0, ∞^0,1^0, Sekarang kita akan beralih pada tiga bentuk taktentu jenis eksponensial. Disini, cara-cara yang digunakan bukan mengacu pada persamaan asli tetapi cenderung pada penggunaan loratitmanya. Biasanya, aturan L'Hopital akan berlaku pada logaritma.

Contoh 7 :

Tentukan solusi persamaan di bawah ini :

$$\lim_{x\to 0^+}(x+1)^{\cot x}$$

Soal ini akan menggunakan bentuk taktentu 1^∞, anggaplah y $(x+1)^{\text{cotx}}$ sehingga :

$$\ln y=\cot x\ln(x+1)=\frac{\ln(x+1)}{\tan x}$$

dengan menggunakan aturan L'Hopital untuk bentuk 0/0, kita memperoleh :

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{\tan x}\equiv \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x+1}}{\sec^2 x}=1$$

sekarang y = $e^{\ln y}$, dank arena fungsi eksponensial f(x) = e^x bersifat continue, maka :

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=\lim_{x\to 0^+}\exp(\ln y)$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to 0^+}\ln y\right)=\exp 1=e$$

Contoh 8 :

Tentukan solusi persamaan di bawah ini :

$$\lim_{x\to\pi/2^-} (\tan x)^{\cos x}$$

soal ini mempunyai bentuk takterntu ∞^0. Misalkan y = (tan x)$^{\cos x}$. Sehingga

$$\ln y = \cos x . \ln \tan x = \frac{\ln \tan x}{\sec x}$$

kemudian

$$\lim_{x\to\pi/2^-} \ln y = \lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\ln \tan x}{\sec x} \equiv \lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\frac{1}{\tan x}\sec^2 x}{\sec x \tan x}$$

$$= \lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\sec x}{\tan^2 x} = \lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\cos x}{\sin^2 x} = 0$$

dengan demikian

$$\lim_{x\to\pi/2^-} y = e^0 = 1$$

LATIHAN SOAL

Tentukan solusi dari soal-soal di bawah ini :

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x^{10000}}{x}$
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^2}{2^x}$
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{10000}}{e^x}$
4. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{\ln(100x + e^x)}$
5. $\lim_{x\to\pi/2} \frac{3\sec x + 5}{\tan x}$
6. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \sin^2 x}{3\ln \tan x}$
7. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln x^{1000})}{\ln x}$
8. $\lim_{x\to(1/2)^-} \frac{\ln(4-8x)^2}{\tan \pi x}$
9. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\cot x}{\sqrt{-\ln x}}$
10. $\lim_{x\to 0} \frac{2\csc^2 x}{\cot^2 x}$
11. $\lim_{x\to 0} (x \ln x^{1000})$
12. $\lim_{x\to 0} 3x^2 \csc^2 x$

DAFTAR PUSTAKA

- **Varberg, Purcell, Rigdon, ,KALKULUS, edisi kesembilan , Erlangga, Jakarta, 2011**
- **Murray R.Spieqel,CALCULUS LANJUT, edisi kedua, Erlangga, Jakarta, 2008.**