MODUL MATEMATIKA 2

(IND 124)

MODUL SESI 3

TEKNIK INTEGRASI/ANTI TURUNAN (Lanjutan)

DISUSUN OLEH

SEPTIAN RAHMAT ADNAN, S.Si.,M.Si

UNIVERSITAS ESA UNGGUL

2020

Pokok Bahasan : TEKNIK INTEGRASI/ANTI TURUNAN (Lanjutan)
Sub Pokok Bahasan :

- Integrasi Fungsi Trigonometri
- Rasionalisasi metode subtitusi

Tujuan Instruksional Umum :
Agar mahasiswa dapat memahami dan dapat menyelesaikan problem kalkulus terkait dengan fungsi trigonometri

Tujuan Instruksional Khusus :
Agar mahasiswa mampu menjelaskan dan dapat menyelesaikan masalah yang terkait dengan :

- Integrasi Fungsi Trigonometri
- Rasionalisasi metode subtitusi

INTEGRAL TRIGONOMETRI

Pada modul sebelumnya kita telah membahas beberapa metode integrasi. Pada modul ini kita akan melajutkan beberapa metode integral untuk beberapa kasus trigonometri.

1. Integral Trigonometri

Pada beberapa kasus kalkulus ataupun kasus aplikasi akan ditemui dalam bentuk trigonometri. untuk melakukan integrasi pada kasus trigonometri dapat dilakukan dengan cara mensubtitusi. dari kebanyakan soal integral trigonometri umumnya dalam 5 bentuk seperti berikut :

Tipe 1 :

$$\int \sin^n x dx$$

$$\int \cos^n x dx$$

Tipe 2 :

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

Tipe 3 :

$$\int \sin mx \cos nx dx, \int \sin mx \sin nx dx, \int \cos mx \cos nx dx$$

Tipe 4 :

$$\int \tan^n x dx, \int \cot^n x dx$$

Tipe 5 :

$$\int \tan^m \sec^n x dx, \int \cot^m x \csc^n x dx$$

Contoh 1 :

Tentukan solusi persamaan di bawah ini (dengan n ganjil) :

$$\int \sin^5 x dx$$

untuk menyelesaikan soal tersebut, maka kita dapat gunakan beberapa aturan phytagoras yaitu :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

maka penyelesaian soal tersebut adalah :

$$\int \sin^5 x dx = \int \sin^4 x \sin x dx$$

$$= \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \sin x dx$$

$$= \int \left(1-2\cos^2 x + \cos^4 x\right) \sin x dx$$

$$= -\int \left(1-2\cos^2 x + \cos^4 x\right)\left(-\sin x dx\right)$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

Contoh 2 :
Tentukan solusi persamaan di bawah ini (dengan n genap) :

$$\int \sin^2 x dx$$

dengan mengguakan beberapa aturan phytagoras, maka kita dapatkan solusi soal tersebut adalah :

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int \left(\cos 2x\right)\left(2dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

Contoh 3 :
Tentukan solusi persamaan di bawah ini (dengan n genap) :

$$\int \cos^4 x dx$$

dengan mengguakan beberapa aturan phytagoras, maka kita dapatkan solusi soal tersebut adalah :

$$= \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 2x + \cos^2 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 2x(2xdx) + \frac{1}{8}\int \left(1+\cos 4x\right) dx$$

$$= \frac{3}{8}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 2x(2xdx) + \frac{1}{32}\int \cos 4x(4dx)$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

Contoh beberapa soal untuk Tipe 2 dengan n atau m adalah bilangan ganjil
Contoh 4 :
Tentukan solusi persamaan di bawah ini (dengan n genap) :

$$\int \sin^3 x \cos^{-4} x dx$$

dengan menggunakan beberapa aturan phytagoras, maka kita dapatkan solusi soal tersebut adalah :

$$\int \sin^3 x \cos^{-4} x dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)\left(\cos^{-4} x\right)\left(\sin x\right) dx$$

$$= -\int \left(\cos^{-4} x - \cos^{-2} x\right)\left(-\sin x dx\right)$$

$$= -\left[\frac{\left(\cos x\right)^{-3}}{-3} - \frac{\left(\cos x\right)^{-1}}{-1}\right] + C$$

$$= \frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C$$

Contoh beberapa soal untuk Tipe 2 dengan n atau m adalah bilangan genap
Contoh 5 :
Tentukan solusi persamaan di bawah ini (dengan m dan n genap) :

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx$$

dengan menggunakan beberapa aturan phytagoras, maka kita dapatkan solusi soal tersebut adalah :

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1+\cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left[1+\cos 2x - \frac{1}{2}(1+\cos 4x) - \left(1-\sin^2 2x\right)\cos 2x\right] dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[\int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x(4dx) + \frac{1}{2}\int \sin^2 2x(2\cos 2x dx)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin^3 2x\right] + C$$

Contoh beberapa soal untuk Tipe 3

$$\int \sin mx \cos nx dx,$$

$$\int \sin mx \sin nx dx,$$

$$\int \cos mx \cos nx dx$$

integral pada tipe 3 muncul pada banyak aplikasi pada bidang fisika dan teknik. untuk dapat menyelesaikan integral pada tipe ini kita gunakan beberapa sifat dari trygonometri, yaitu :

$$1. \sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin\left(m+n\right)x + \sin(m-n)x\right]$$

$$2. \sin mx \sin nx = -\frac{1}{2}\left[\cos\left(m+n\right)x - \cos(m-n)x\right]$$

$$3. \cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos\left(m+n\right)x + \cos(m-n)x\right]$$

Contoh 6 :
Tentukan solusi persamaan di bawah ini :

$$\int \sin 2x \cos 3x dx$$

dengan menggunakan beberapa aturan phytagoras, maka kita dapatkan solusi soal tersebut adalah :

$$\int \sin 2x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int [\sin 5x + \sin(-x)]dx$$

$$= \frac{1}{10}\int \sin 5x(5dx) - \frac{1}{2}\int \sin x dx$$

$$= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C$$

Contoh 7 :
Jika m dan n adalah bilangan integer positif, tunjukan bahwa :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx$$

jika m ≠n maka solusi adalah 0
Jika m = n maka solusi adalah π

Solusi : Pada saat m ≠n

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\right]dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x - \frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= 0$$

Solusi : Pada saat m = n

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos 2mx - 1\right]dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2m}\sin 2mx - x\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[-2\pi\right] = \pi$$

Contoh 8 :
Tentukan solusi persamaan di bawah ini jika m dan n adalah bilangan integer positif :

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L} \sin\frac{n\pi x}{L} dx$$

Solusi :
dengan melakukan metode subtitusi untuk mempermudah mendapatkan solusi dari soal tersebut, yaitu :

u = πx/L maka du = πdx/L. Jika x = -L maka u = -π dan jika x = L maka u = π

Sehingga :

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{L}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mu\sin nudu$$

Solusi yang didapatkan adalah jika m ≠n adalah

$$\frac{L}{\pi}.0 = 0$$

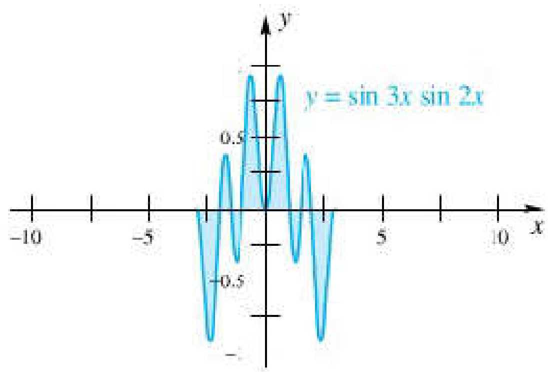
Solusi yang didapatkan adalah jika m = n adalah

$$\frac{L}{\pi}.\pi = L$$

Berikutnya kita akan mencoba menggambarkan pada koordinat kartesian untuk beberapa fungsi trigonometri

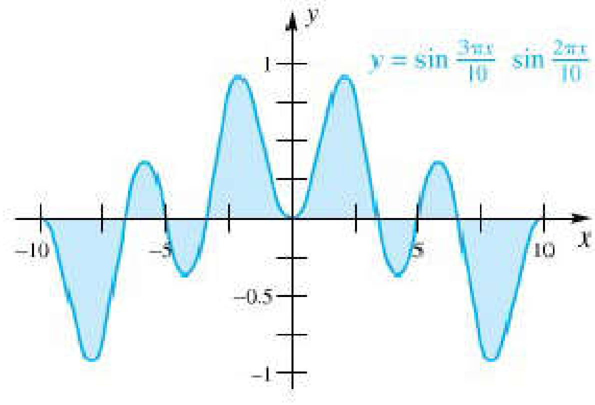
Fungsi 1 :

$$y = \sin 3x \sin 2x$$



Fungsi 2 :

$$y = \sin\left(\frac{3\pi x}{10}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{10}\right)$$



Tipe 4 dengan fungsi :

$$\int \tan^n x dx, \int \cot^n x dx$$

Pada tipe 4 sebagaian besar kasus yang ditemui dibutuhkan faktor-faktor sebagai berikut :

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$$

Contoh beberapa soal untuk Tipe 4, sebagai berikut :
Contoh 9 :
Tentukan solusi persamaan di bawah ini :

$$\int \cot^4 x dx$$

untuk mendapatkan solusi soal tersebut, maka kita gunakan faktor yang telah diketahui sebagai berikut :

$$\int \cot^4 x dx = \int \cot^2 x(\csc^2 x -)dx$$

$$= \int \cot^2 x \csc^2 x dx - \int \cot^2 x dx$$

$$= -\int \cot^2 x(-\csc^2 x dx) - \int (\csc^2 x - 1)dx$$

$$= -\frac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + x + C$$

$$\int \tan^5 x dx = \int \tan^3 x(\sec^2 x - 1)dx$$

$$= \int \tan^3 x \sec^2 x dx - \int \tan^3 x dx$$

$$= \int \tan^3 x(\sec^2 x dx) - \int \tan x\left(\sec^2 x - 1\right)dx$$

$$= \int \tan^3 x(\sec^2 x dx) - \int \tan x(\sec^2 x dx) + \int \tan x dx$$

$$= \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln\left|\cos x\right| + C$$

Contoh 11 :
Tentukan solusi persamaan di bawah ini dengan n adalah bilangan genap dan m bilangan bebas :

$$\int \tan^{-3/2} x \sec^4 x dx$$

untuk mendapatkan solusi soal tersebut, maka kita gunakan faktor yang telah diketahui sebagai berikut :

$$\int \tan^{-3/2} x \sec^4 x dx = \int (\tan^{-3/2} x)(1 + \tan^2 x)\sec^2 x dx$$

$$= \int (\tan^{-3/2})\sec^2 x dx + \int (\tan^{1/2} x)\sec^2 x dx$$

$$= -2\tan^{-1/2} x + \frac{2}{3}\tan^{3/2} + C$$

Contoh 12 :
Tentukan solusi persamaan di bawah ini dengan m adalah bilangan ganjil dan n bilangan bebas :

$$\int \tan^3 x \sec^{-1/2} x dx$$

untuk mendapatkan solusi soal tersebut, maka kita gunakan faktor yang telah diketahui sebagai berikut :

$$\int \tan^3 x \sec^{-1/2} x dx = \int \left(\tan^2 x\right)\left(\sec^{-3/2} x\right)\left(\sec x \tan x\right) dx$$

$$= \int \left(\sec^2 x - 1\right) \sec^{-3/2} x \left(\sec x \tan x dx\right)$$

$$= \int \sec^{1/2} x \left(\sec x \tan x dx\right) - \int \sec^{-3/2} x \left(\sec x \tan x dx\right)$$

$$= \frac{2}{3} \sec^{3/2} x + 2 \sec^{-1/2} x + C$$

LATIHAN SOAL

Jawablah pertanyaan di bawah ini dengan tepat !

1. $\int \sin^2 x dx$

2. $\int \sin^4 6x dx$

3. $\int \sin^3 x dx$

4. $\int \cos^3 x dx$

5. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x dx$

6. $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x dx$

$$7.\int \sin^5 4x\cos^2 4x dx$$

$$8.\int \left(\sin^3 2t\right)\sqrt{\cos 2t} dt$$

$$9.\int \cos^3 3x \sin^{-2} 3x dx$$

$$10.\int \sin^{1/2} 2x\cos^3 2x dx$$

SUB BAB 3. Rasionalisasi Subtitusi

Pada beberapa kasus kalkulus perlu dilakukan pendekatan yang berbeda salah satunya adalah rasionalisasi subtitusi. Pada subbab ini kita akan membahas tentang beberapa kasus pada kalkulus yang perlu dilakukan rasionalisasi pada metode subtitusi untuk mencari solusi dari soal yang ditanyakan

Berikut adalah beberapa contoh pada kasus rasionalisasi pada metode subtitusi :

Contoh 1 :

Tentukan solusi persamaan di bawah ini :

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$$

Solusi :

dengan melakukan metode subtitusi untuk mempermudah mendapatkan solusi dari soal tersebut, yaitu :

$$u = \sqrt{x} \rightarrow u^2 = x$$

$$2udu = dx$$

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}} = \int \frac{2u}{u^2-u} du = 2\int \frac{1}{u-1} du$$

$$= 2\ln|u-1| + C = 2\ln\left|\sqrt{x}-1\right| + C$$

Contoh 2 :

Tentukan solusi persamaan di bawah ini :

$$\int x\sqrt[3]{x-4} dx$$

Solusi :

dengan melakukan metode subtitusi untuk mempermudah mendapatkan solusi dari soal tersebut, yaitu :

$$u = \sqrt[3]{x-4} \Rightarrow u^3 = x-4$$

$$3u^2 du = dx$$

Maka solusi yang didapatkan adalah

$$\int x\sqrt[3]{x-4}\,dx = \int \left(u^3+4\right)u.\left(3u^2du\right)$$

$$= 3\int \left(u^6+4u^3\right)du = 3\left[\frac{u^7}{7}+u^4\right]+C$$

$$= \frac{3}{7}(x-4)^{7/3}+3(x-4)^{4/3}+C$$

Contoh 3 :

Tentukan solusi persamaan di bawah ini :

$$\int x\sqrt[5]{(x+1)^2}\,dx$$

Solusi :

dengan melakukan metode subtitusi untuk mempermudah mendapatkan solusi dari soal tersebut, yaitu :

$$u = \left(x+1^{1/5}\right) \Rightarrow u^5 = x+1$$

$$5u^4du = dx$$

Maka solusi yang didapatkan adalah

$$\int x(x+1)^{2/5}dx = \int \left(u^5-1\right)u^2.5u^4du$$

$$= 5\int \left(u^{11}-u^6\right)du = \frac{5}{12}u^{12}-\frac{5}{7}u^7+C$$

$$= \frac{5}{12}(x+1)^{12/5}-\frac{5}{7}(x+1)^{7/5}+C$$

Soal Latihan

Tentukan Solusi dari soal-soal di bawah ini !

1. $\int x\sqrt{x+1}\,dx$

2. $\int x\sqrt[3]{x+\pi}\,dx$

3. $\int \frac{t\,dt}{\sqrt{3t+4}}$

4. $\int \frac{x^2+3x}{\sqrt{x+4}}\,dx$

5. $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t}+e}$

6. $\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{t+1}\,dt$

7. $\int t(3t+2)^{3/2}\,dt$

8. $\int x(1-x)^{2/3}\,dx$

9. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx$

10. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$

DAFTAR PUSTAKA

- **Varberg, Purcell, Rigdon, ,KALKULUS, edisi kesembilan , Erlangga, Jakarta, 2011**
- **Murray R.Spieqel,CALCULUS LANJUT, edisi kedua, Erlangga, Jakarta, 2008.**