Universitas Esa Unggul Kampus Harapan Indah	MODUL II **Matematika**

Judul	**HIMPUNAN**	
Penyusun	**Distribusi**	**Perkuliahan**
Nixon Erzed	PAMU UNIVERSITAS ESA UNGGUL	Pertemuan – II ONLINE

Tujuan :

Mahasiswa mampu menyelesaikan masalah yang terkait himpunan dan operasi himpunan

Materi:

1. Definisi Himpunan
2. Penyajian Himpunan
3. Kardinalitas
4. Himpunan Kosong
5. Himpunan Bagian
6. Himpunan yang sama
7. Himpunan yang ekivalen
8. Himpunan saling lepas
9. Himpunan Kuasa
10. Operasi terhadap himpunan
11. Perampatan Operasi
12. Prinsip Inklusi Esklusi
13. Hukum-hukum himpunan
14. Pembuktian Proposisi

Referensi :

1. Kalkulus I Edwin Purcell
2. Matematika Diskrit – Rinaldi Munir

HIMPUNAN

1. Definisi-definisi

Definisi Himpunan

- Himpunan adalah → kumpulan objek-objek diskrit (berbeda)
- Objek di dalam himpunan disebut elemen, unsur, atau anggota.

Keanggotaan Himpunan

$x \in A$: *x* merupakan anggota himpunan *A*;

$x \notin A$: *x* bukan merupakan anggota himpunan *A*.

Penyajian Himpunan

- Enumerasi

Menuliskan semua objek yang menjadi anggota/elemen himpunan

Contoh :

- Himpunan warna = {merah, hijau, kuning}
- Himpunan empat bilangan asli pertama: A = {1, 2, 3, 4}.
- Himpunan lima bilangan genap positif pertama: B = {4, 6, 8, 10}.
- C = {kucing, a, Amir, 10, paku}
- R = { a, b, {a, b, c}, {a, c} }
- C = {a, {a}, {{a}} }
- K = { {} }
- Himpunan 100 buah bilangan asli pertama: {1, 2, ..., 100 }
- Himpunan bilangan bulat ditulis sebagai {…, -2, -1, 0, 1, 2, …}.

- Simbol-simbol baku

  Untuk beberapa himpunan yang baku terdapat simbol-simbol yang sudah baku

  P → himpunan bilangan bulat positif

  N → himpunan bilangan asli

  Z → himpunan bilangan bulat

  Q → himpunan bilangan rasional

  R → himpunan bilangan riil

  C → himpunan bilangan kompleks

- Notasi pembentuk himpunan

  { variabel | syarat yang harus dipenuhi oleh variabel }

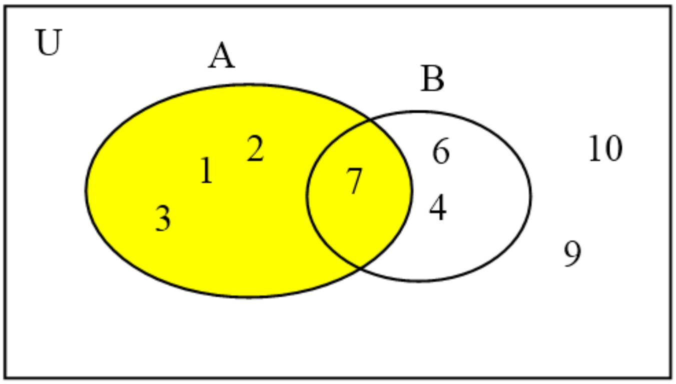
  Misal :

  a. A = { x | 0 < x < 25, x∈ Z } ekivalen dengan {1, 2, 3, .. 24}

  b. *M* = { *x* | *x* adalah mahasiswa yang mengambil kuliah ESA143}

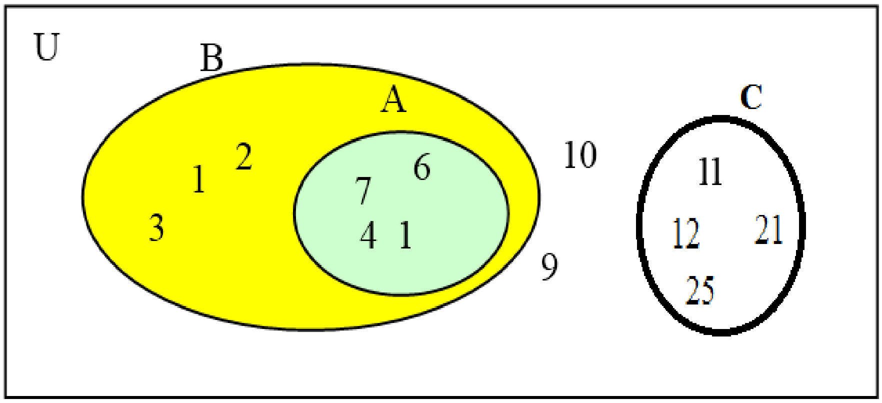
- Diagram venn

  Diasajikan berupa kurva tertutup yang didalamnya dituliskan keanggotaan himpunan tersebut



Himpunan Semesta

Himpunan semesta adalah himpunan yang anggotanya semua objek pembicaraan. Himpunan semesta dilambangkan dengan S atau U.



Kardinalitas

Kardinalitas adalah banyaknya elemen/anggota himpunan

Perhatikan contoh pada diagram venn

|A| = 4 |B| = 3 |U| = 8

Himpunan Kosong

Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak ada anggotanya

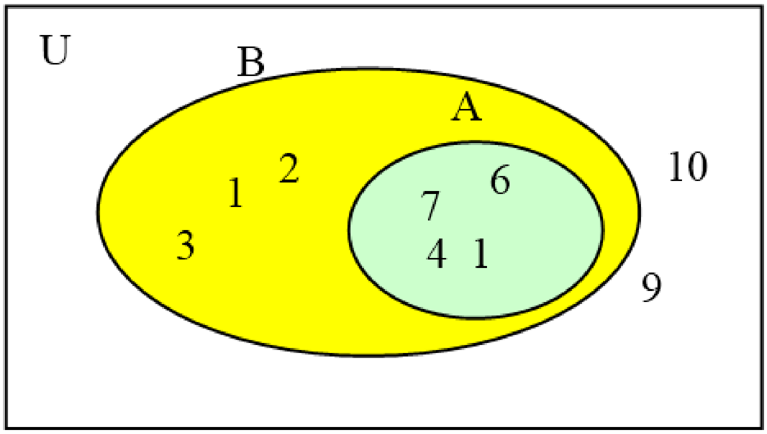
Dituliskan sebagai : { } atau Ø

Himpunan Bagian

Himpunan A adalah bagian dari himpunan B jika setiap elemen himpunan A juga menjadi anggota himpunan B

$$A \subseteq B \text{ jika } \forall a \in A \text{ maka juga } a \in B$$

Dengan diagram Venn, $A \subseteq B$ disajikan sebagai berikut :



Himpunan yang sama

A = B jika $\forall$ a $\in$ A adalah juga a $\in$ B dan sebaliknya

Atau Jika $A \subseteq B$ dan juga $B \subseteq A$ maka A = B

Misal : A = { a, z , x, t, s}
B = { x, t , a, s, z}

Himpunan yang ekivalen

A ekivalen dengan B jika jumlah elemen A sama dengan B

Atau dengan notasi himpunan dituliskan sebagai berikut :
$A \sim B$ jika |A| = |B|

Contoh :

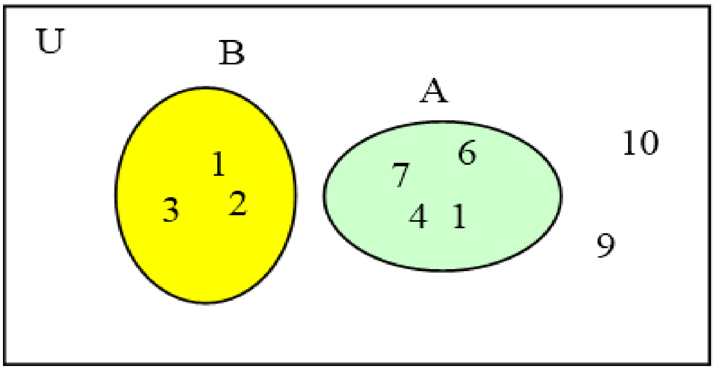
A = { merah, kuning, hijau}
B = {kayu, besi, gabus}

|A| = 3 dan |B| = 3 ➔ |A| = |B| ➔ A ekivalen dengan B

Himpunan saling lepas

Himpunan A saling lepas denga B, jika tidak ada elemen A yang juga elemen B, dan sebaliknya tidak ada elemen B yang juga elemen A

A // B jika $a \in A$ maka $a \notin B$
dan sebaliknya jika $a \in B$ maka $a \notin A$



Himpunan Kuasa

Untuk A maka P(A) adalah himpunan kuasa dari A, jika elemen P(A) adalah himpunan-himpunan bagian dari A

Contoh :

a. A = { a, b, c}
P(A) = { ∅, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c},{a,b,c} }

b. B = { 1, 2}
P(B) = { ∅, {1}, {2},{1,2} }

2. OPERASI-OPERASI PADA HIMPUNAN

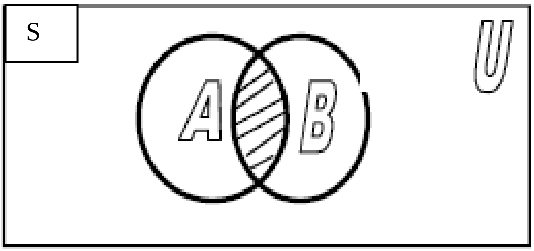
Operasi pada himpunan terdiri dari
- Irisan
- gabungan
- komplemen
- selisih
- beda setangkup *(symetric difference)*
- perkalian kartesian

a. Irisan (Intersection)

Diberikan himpunan A dan B. Irisan himpunan A dan B ditulis dengan $A \cap B$ adalah suatu himpunan yang anggotanya berada di A dan juga berada di B.

Jadi $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$

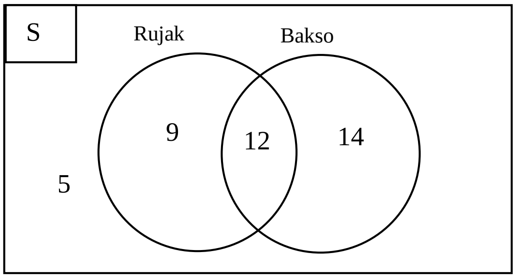
Diagram venn dari daerah yang diarsir menyatakan $A \cap B$



Contoh:

1. A = {*a,b,c,* } dan B = {*c,d,e,f*}. Maka $A \cap B$ = {*c*}
2. P = {*a,b,c*} dan Q = {*d,e,f*}. Maka $A \cap B = \phi$
3. Mahasiswa yang senang makan :
   - Rujak = 12 + 9 = 21 Orang
   - Bakso = 12 + 14 = 26 Orang
   - Rujak dan bakso = 12 orang
   - Mahasiswa yang tidak senang makan rujak maupun bakso = 5 orang
   - berapa jumlah mahasiswa seluruhnya?

Jawab :



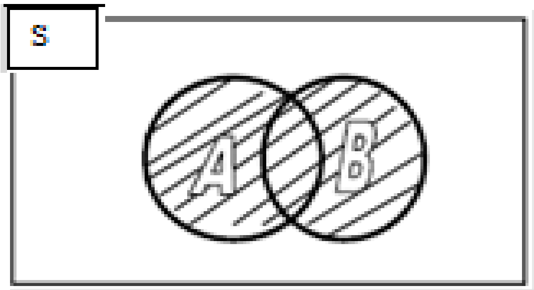
Banyak mahasiswa seluruhnya adalah:

9 + 12 + 14 + 5 = 40 orang

b. Gabungan (Union)

Diberikan himpunan A dan B. Gabungan himpunan A dan B ditulis dengan $A \cup B$ adalah suatu himpunan yang anggotanya berada di A atau berada di B. Jadi $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$

Diagram venn dari daerah yang diarsir menyatakan $A \cup B$



Contoh:

1. A = {*a,b,c*} dan B = {*c,d,e,f*}. Maka $A \cup B$ = {*a,b,c,d,e,f*}

2. Siswa yang senang makan rujak 21 orang, siswa yang senang makan bakso 26 orang dan siswa yang senang makan bakso dan rujak 12 orang.

   Berapa siswa yang senang makan rujak maupun bakso?

Jawab :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
$$= 21 + 26 - 12 = 35$$

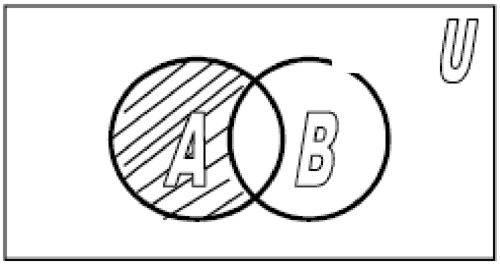
Jadi, yang senang makan rujak maupun bakso adalah 35 orang

c. Selisih

Selisih antara dua himpunan A dan B adalah himpunan yang terdiri dari semua anggota A yang bukan anggota B.

$$A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \}$$

Diagram Venn dari daerah yang diarsir menyatakan A – B



contoh:

A = {1,2,3,4,5}
B = {2,4,6,7,10}

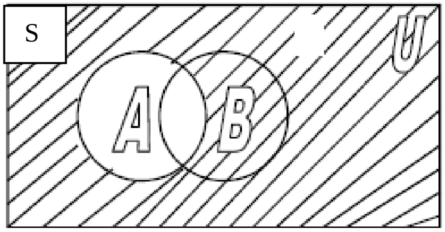
Maka A – B = {1,3,5}

d. Komplemen

Komplemen dari himpunan A adalah himpunan yang terdiri dari semua anggota himpunan S yang bukan anggota A.

$$A^c = \{ x \mid x \in S \text{ dan } x \notin A \}$$

Diagram Venn dari daerah yang diarsir menyatakan A^c



contoh:

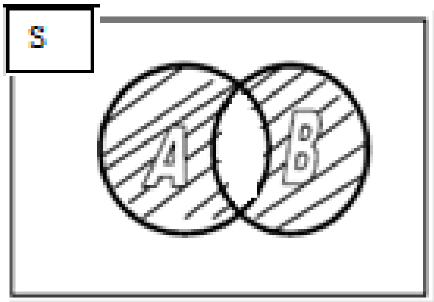
S = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

A = {1,2,3,4,5}

Maka A^c = {6,7,8,9,10}

e. Symetric Difference (beda setangkup) :

A beda setangkup B adalah gabungan A dan B selisih A dengan B dituliskan sebagai A $\oplus$ B



contoh:

A = {1,2,3,4,5}

B = {2,4,6,7,10}

Maka A $\oplus$ B = {1,3,5,6,7,10}

Contoh lain:

P = himpunan mahasiswa yang menjadi peserta lomba olah raga

Q = himpunan mahasiswa yang menjadi peserta lomba seni

Jika R = mahasiswa yang mengikuti kedua lomba (seni dan olahraga)
S = seluruh mahasiswa peserta lomba

Maka $P \oplus Q = S - R$

f. Perkalian

Perkalian dua buah himpunan A, dan B adalah memasangkan setiap elemen A dengan setiap elemen B

Contoh :

Dimiliki himpunan C = {1, 2} dan himpunan D = {x, y, z}

Maka perkalian C dengan D dituliskan sebagai C x D, yaitu :

C x D = {(1,x) (2,x) (1,y), (2, y), (1,z) (2,z)}

g. Prinsip Inklusi & Ekslusi

Prinsip inklusi-ekslusi adalah pendekatan dalam perhitungan kardinalitas hasil operasi gabungan 2 himpunan, dengan cara mengakumulasi kardinalitas himpunan himpunan dan mereduksi hasil akumulasi dengan kardinalitas irisan himpunan-himpunan. Pada gabungan lebih dari 2 himpunan, akumulasi dan reduksi dilakukan secara berulang.

Pola inklusi-ekslusi atau akumulasi-reduksi : + - + - dst

Kardinalitas gabungan 2 himpunan:

Kardinalitas gabungan 2 himpunan A dan B, sama dengan kardinalitas A ditambah kardinalitas B dan dikurangi kardinalitas irisan A dan B.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Kardinalitas gabungan 3 himpunan:

Kardinalitas gabungan 3 himpunan A, B dan C, sama dengan kardinalitas A ditambah kardinalitas B dan kardinalitas C, dikurangi kardinalitas irisan A dan B, A dan C, B dan C, dan ditambahi kardinalitas irisan A, B, C.

$$|A \cup B \cup C| = |A|+|B|+|C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Kardinalitas gabungan 4 himpunan:

Untuk 4 himpunan A, B, C, & D berlaku :

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C \cup D| = \; & |A|+|B|+|C|+|D| \\ & - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| \\ & + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |B \cap C \cap D| + |A \cap C \cap D| \\ & - |A \cap B \cap C \cap D| \end{aligned}$$

5 himpunan dan seterusnya ikuti pola: + - + - dst

Contoh :

Diantara 50 mhs peserta kelas, 26 mhs mendapat nilai A dari matakuliah-I, 21 mhs memperoleh nilai A matakuliah-II, 17 mhs tidak memperoleh nilai A di matakuliah-I maupun matakuliah-II. Berapa mahasiswa yang memperoleh nilai A di kedua matakuliah

Penyelesaian:

X adalah peraih nilai A di mata kuliah 1 dan Y peraih nilai A di matakuliah 2.

$| U | = 50 \quad |X| = 26 \quad |Y| = 21 \quad |X \cap Y| \; ?$

$|\overline{X \cup Y}| = 17$

$|X \cup Y| = |U| - |X \cup Y| = 50 - 17 = 33$

Jadi

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

$$33 = 26 + 21 - |X \cap Y|$$

$$|X \cap Y| = 47 - 33 = 14$$

Contoh lain:

Dari 60 mhs: 28 ikut PS, 20 ikut Pers, 32 ikut Silat, 7 tidak ikut satu pun, 9 ikut PS dan silat, 12 ikut pers & silat dan 10 ikut pers & PS

a. Berapa mahasiswa yang ikut semua kegiatan ?
b. berapa mahasiswa yang ikut PS saja, Silat saja, Pers Saja

Penyelesaian :

$|U| = 60$ $|PS| = 28$ $|silat|\ 32$ $|Pers| = 20$

$|\overline{PS \cup Silat \cup Pers}| = 7$

$|PS \cup Silat \cup Pers| = 60 - 7 = 53$

$|PS \cap Silat| = 9$

$|PS \cap Pers| = 10$

$|Pers \cap Silat| = 12$

$|PS \cap Silat \cap pers| = x$

$$|PS \cup Silat \cup Pers| = |PS| + |silat| + |Pers| - (|PS \cap Silat| - |PS \cap Pers| - |Pers \cap Silat| + x$$

$$53 = 28+20+32 - 9 - 10 - 12 + x$$

$$x = 53 - 49 = 4$$

jadi ada 4 mahasiswa yang mengikuti semua kegiatan

4. Hukum-hukum himpunan

a) Hukum identitas

$A \cup \varnothing = A$ $\qquad$ $A \cap U = A$

b) Hukum Null (Dominasi)

$A \cup U = U$ $\qquad$ $A \cap \varnothing = \varnothing$

c) Hukum Komplemen

$A \cup \overline{A} = U$ $\qquad$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$

d) Hukum Idempoten

$A \cup A = A$ $\qquad$ $A \cap A = A$

e) Hukum involusi

$\overline{\overline{A}} = A$

f) Hukum 0/1 (hukum komplemen 2

$\overline{\varnothing} = U$ $\qquad$ $\overline{U} = \varnothing$

g) Hukum Absorpsi

$A \cup (A \cap B) = A$ $\qquad$ $A \cap (A \cup B) = A$

h) Hukum Komutatif

$A \cap B = B \cap A$ $\qquad$ $A \cup B = B \cup A$

i) Hukum Asosiatif

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $\qquad$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

j) Hukum Distributif

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

k) Hukum DeMorgan

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

l) Hukum Selisih

$X - Y = X \cap \overline{Y}$

Dengan menggunakan hukum-hukum himpunan, buktikan proposisi berikut :

$(A \oplus B) \cap A = A - B$

Pembuktian:

$$\begin{aligned}
(A \oplus B) \cap A &= A - B \\
[(A \cup B) - (A \cap B)] \cap A &= A - B \\
[(A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}] \cap A &= A - B \\
(A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} \cap A &= A - B \\
(A \cup B) \cap A \cap \overline{(A \cap B)} &= A - B \\
[(A \cup B) \cap A] \cap \overline{(A \cap B)} &= A - B \\
A \cap \overline{(A \cap B)} &= A - B \\
A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) &= A - B \\
(A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) &= A - B \\
\varnothing \cup (A \cap \overline{B}) &= A - B \\
(A \cap \overline{B}) &= A - B \\
A - B &= A - B \quad \text{………… terbukti}
\end{aligned}$$

Untuk latihan buktikan proposisi berikut :
(pembuktian tidak selalu harus terbukti) :

a. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$
b. $A \cap (A \cup B) = A$

5. Pemecahan Masalah Menggunakan Konsep Himpunan

Dalam kehidupan sehari-hari banyak sekali operasi himpunan diterapkan.

Melalui beberapa contoh dibawah ini Anda akan mengetahui penerapan operasi himpunan dalam kehidupan sehari-hari.

Contoh 1

Dari sekelompok mahasiswa yang terdiri dari 50 orang, 22 diantaranya gemar menari, 18 orang diantaranya gemar memancing, dan 2 orang gemar kedua duanya.

a. Gambarkan diagram venn untuk menunjukan keadaan tersebut
b. Berapakah jumlah mahasiswa yang gemar memancing atau menari
c. Berapakan jumlah mahasiswa yang tidak gemar kedua-duanya

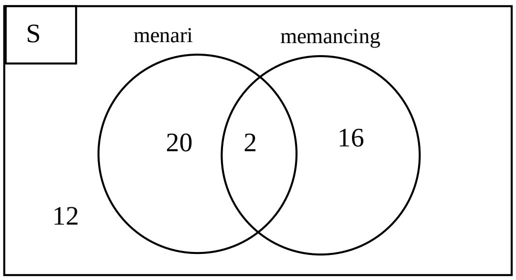
Penyelesaian

Misalkan

V=himpunan mahasiswa yang gemar menari
T=himpunan siswa yang gemar memancing

$V \cup T$ =himpunan siswa yang gemar menari dan memancing

a. Diagram Venn



b. Banyaknya mahasiswa yang gemar memancing atau menari:

(22+18)- 2=38 orang

c. Banyak siswa yang tidak gemar dua-duanya:

(50-38) orang= 12 orang.

Contoh 2

Hasil survei terhadap 120 orang siswa suatu sekolah didapat data, 42 siswa memelihara ayam, 40 siswa memelihara kucing, 30 siswa memelihara ikan, 12 siswa memelihara ayam dan kucing, 8 siswa memelihara ayam dan ikan, 10 siswa memelihara kucing dan ikan serta 6 siswa memelihara ketiganya. Berdasarkan keterangan diatas,

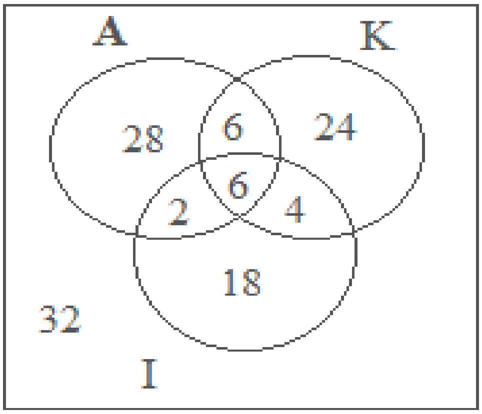
a. Gabarkan diagram ven untuk menunjukkan keadaan diatas

b. Tentukan banyak siswa yang memelihara:
   i. ayam atau kucing
   ii. ayam saja
   iii. salah satu dari ketiganya
   iv. kucing tetapi tidak memelihara ayam
   v. ayam tetapi tidak memelihara kucing
   vi. tidak memelihara ketiganya,

Penyelesaian

A= himpunan siswa yang memelihara Ayam
K= himpunan siswa yang memelihara kucing
I=himpunan siswa yang memelihara ikan

a. diagram venn yang menggambarkan keadaan diatas



b. banyaknya siswa yang memelihara

i. ayam atau kucing=(28+2+6+6+4+24)

ii. ayam saja=28 siswa

iii. salah satu dari ketiganya

iv. kucing tetapi tidak memelihara ayam=(24+4) siswa =28 siswa

v. ayam tetapi tidak memelihara ikan=(28+6) siswa=34 siswa

vi. tidak memelihara ketiganya=120-28-24-18-6-6-4-2=32 siswa