

MODUL ALJABAR LINIER

 (MIK106)

Materi 4

Matrik Minor, Kofaktor dan Adjoin

Disusun Oleh

Mieke Nurmalasari, M.Si, M.Sc

UNIVERSITAS ESA UNGGUL

2018

**MATERI 4**

**Matrik Minor, Kofaktor dan Adjoin**

1. **Pendahuluan**

Pada materi sebelumnya sudah dijelaskan mengenai determinan suatu matrik. Determinan suati matriks yang berordo 3x3 atau lebih dapat dilakukan dengan meetode minor dan kofaktor artinya mencari matriks minor dan kofaktornya. Nilai determinan suatu matriks, kemudian matriks minor, kofaktor dan adjoin ini saling terkait. Keempat hal ini nantinya sangat berguna untuk menghitung invers suatu matriks.

Pada materi keempat ini akan dijelaskan mengenai matriks minio, kofaktor dan adjoin dan kaitannya satu sama lainnya. Pada tahap awal kita akan menghitung minor suati matriks, kemudian baru menghitung kofaktor dan terakhir menghitung adjoin matriks.

1. **Kompetensi Dasar**

 Mengetahui hubungan antara matriks minor, matriks kofaktor dan adjoin matriks.

1. **Kemampuan Akhir yang Diharapkan**
* Mahasiswa diharapkan mampu mencari matriks minor.
* Mahasiswa diharapkan mampu mencari matriks kofaktor
* Mahasiswa diharapkan mampu mencari matriks adjoin
* Mahasiswa memahami keterkaitan ketiga matriks ini.
1. **Kegiatan Belajar**

**Matriks Minor, Kofaktor dan Adjoin**

Jika kita sedang mempelajari determinan dan invers suatu matriks, maka istilah-istilah seperti minor, kofaktor dan adjoin matriks akan sering kita temukan. Determinan matriks dapat dihitung jika suatu matriks mempunyai jumlah baris dan jumlah kolom yang sama, dengan kata lain matriksnya merupakan matriks persegi atau bujur sangkar.

**MINOR**

 Minor suatu matrik adalah determinan matriks bagian dari matriks A yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemennya pada baris ke-i dan elemen pada kolom ke-j.

$$A=\left[\begin{matrix}a\_{11}^{}&a\_{12}&a\_{13}\\a\_{21}&a\_{22}&a\_{23}\\a\_{31}&a\_{32}&a\_{33}\end{matrix}\right]$$

Yang dimaksud dengan MINOR unsur $a\_{ij}$ adalah :

* Determinan yang berasal dari determinan orde ke-n dikurangi dengan dengan baris ke-i kolom ke-j.
* Dinotasikan dengan $M\_{ij}$
* Contoh Minor dari elemen $a\_{11}$
* $A=\left[\begin{matrix}a\_{11}^{}&a\_{12}&a\_{13}\\a\_{21}&a\_{22}&a\_{23}\\a\_{31}&a\_{32}&a\_{33}\end{matrix}\right]$
* Sehingga $M\_{11}=\left|\begin{matrix}a\_{22}&a\_{23}\\a\_{32}&a\_{33}\end{matrix}\right|. $Hal yang sama dapat dilakukan untuk mencari Minor lainnya, misal $M\_{12}$ dan seterusnya.



Agar lebih jelas, mari kita lihat contoh cara mencari minor matriks berikut ini:

**Contoh 1:**

Diketahui matriks:

$$A=\left[\begin{matrix}3&1&2\\1&-2&-9\\4&3&1\end{matrix}\right]$$

Tentukan Minor matriks!

Jawaban :

1. Minor (Mij)

M11 =$\left|\begin{matrix}-2&-9\\3&1\end{matrix}\right|$= (-2)(1) – (-9)(3)

 = -2 – (-18)

= 16

M12 = $\left|\begin{matrix}1&-9\\4&1\end{matrix}\right|$= (1)(1) – (-9)(4)

=1– (-36)

= 37

M13= $\left|\begin{matrix}1&-2\\4&3\end{matrix}\right|$= (1)(3) – (-2)(4)

=3– (-8)

= 11

M21 = $\left|\begin{matrix}1&2\\3&1\end{matrix}\right|$= (1)(1) – (2)(3)

=1– 6

= -5

M22 = $\left|\begin{matrix}3&2\\4&1\end{matrix}\right|$= (3)(1) – (2)(4)

=3– 8

= -5

M23 = $\left|\begin{matrix}3&1\\4&3\end{matrix}\right|$= (3)(3) – (1)(4)

=9– 4

= 5

M31 = $\left|\begin{matrix}1&2\\-2&-9\end{matrix}\right|$= (1)(-9) – (2)(-2)

= -9 – (-4)

= -5

M32 = $\left|\begin{matrix}3&2\\1&-9\end{matrix}\right|$= (3)(-9) – (2)(1)

= -27 – 2

= -29

M33 = $\left|\begin{matrix}3&1\\1&-2\end{matrix}\right|$= (3)(-2) – (1)(1)

= -6 – 1

= -7

**KOFAKTOR**

Setelah kita mendapatkan nilai minor dari masing-masing elemen matriks, maka baru dapat  dilanjutkan dengan menentukan nilai kofaktor. Dengan demikian, nilai kofaktor dapat dicari apabila nilai minor dicari terlebih dahulu.

Nilai kofaktor yaitu suatu nilai yang mengandung nilai positif (+) atau nilai minus (-) pada masing-masing nilai minor.

 Berikut ini adalah nilai kofaktor untuk sebuah matriks nxn

Jika kita ambil contoh diatas, dari nilai minor matriks ordo 3x3 yang sudah diketahui, maka:

Kofaktor (Cij)

C11 = + M11 = +16 = 16

C12 = –M12 = –37 = –37

C13 = +M13 = +11 = 11

C21 = –M21 = –(–5) = 5

C22 = +M22 = +(–5) = –5

C23 = –M23 = –5 = –5

C31 = +M31 =+(–5) = –5

C32 = –M32 = –(–29) = 29

C33 = +M32 = +(–7) = –7

Sehingga matriks kofaktornya adalah :

$$A=\left[\begin{matrix}16&-37&11\\5&-5&-5\\-5&29&-7\end{matrix}\right]$$

**Adjoin**

Setelah didapatkan matriks kofaktor (C), maka  kita sudah bisa mendapatkan Adjoin dari matrik tersebut dengan cara melakukan transpose matriks.

1. Kofaktor Matriks A

$A=\left[\begin{matrix}16&-37&11\\5&-5&-5\\-5&29&-7\end{matrix}\right]$

1. Adjoin Matriks A dengan mencari transfos dari Kofaktor Matriks A,

$Adj A=\left[\begin{matrix}16&5&-5\\-37&-5&29\\11&-5&-7\end{matrix}\right]$

**Contoh 2:**

Diketahui matriks:

$$A=\left[\begin{matrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{matrix}\right]$$

Tentukan Minor, kofaktor dan adjoin matrik di atas!

Jawaban :

1. Minor (Mij)

M11 =$\left|\begin{matrix}5&6\\8&9\end{matrix}\right|$= (5)(9) – (8)(6)

 = 45 – (48)

= -3

M12 = $\left|\begin{matrix}4&6\\7&9\end{matrix}\right|$= (4)(9) – (7)(6)

=36– (42)

= -6

M13= $\left|\begin{matrix}4&5\\7&8\end{matrix}\right|$= (4)(8) – (7)(5)

=32– (35)

= -3

M21 = $\left|\begin{matrix}2&3\\8&9\end{matrix}\right|$= (2)(9) – (8)(3)

=18– 24

= -6

M22 = $\left|\begin{matrix}2&3\\7&9\end{matrix}\right|$= (2)(9) – (7)(3)

=18– 21

= -3

M23 = $\left|\begin{matrix}1&2\\7&8\end{matrix}\right|$= (1)(8) – (7)(2)

= 8 – 14

= -6

M31 = $\left|\begin{matrix}2&3\\5&6\end{matrix}\right|$= (2)(6) – (5)(3)

= 12 – (15)

= -3

M32 = $\left|\begin{matrix}1&3\\4&6\end{matrix}\right|$= (1)(6) – (4)(3)

= 6 – 12

= -6

M33 = $\left|\begin{matrix}1&2\\4&5\end{matrix}\right|$= (1)(5) – (4)(2)

= 5 – 8

= -3

**KOFAKTOR**

Setelah kita mendapatkan nilai minor dari masing-masing elemen matriks, maka baru dapat  dilanjutkan dengan menentukan nilai kofaktor. Dengan demikian, nilai kofaktor dapat dicari apabila nilai minor dicari terlebih dahulu.

Nilai kofaktor yaitu suatu nilai yang mengandung nilai positif (+) atau nilai minus (-) pada masing-masing nilai minor.

 Berikut ini adalah nilai kofaktor untuk sebuah matriks nxn

Jika kita ambil contoh diatas, dari nilai minor matriks ordo 3x3 yang sudah diketahui, maka:

Kofaktor (Cij)

C11 = + M11 = +(-3) = -3

C12 = –M12 = –(-6) = 6

C13 = +M13 = +(-3) = -3

C21 = –M21 = –(–6) = 6

C22 = +M22 = +(–3) = –3

C23 = –M23 = –(-6) = 6

C31 = +M31 =+(–3) = –3

C32 = –M32 = –(-6) = 6

C33 = +M32 = +(–3) = –3

Sehingga matriks kofaktornya adalah :

$$A=\left[\begin{matrix}-3&6&-3\\6&-3&6\\-3&6&-3\end{matrix}\right]$$

**Adjoin**

Setelah didapatkan matriks kofaktor (C), maka  kita sudah bisa mendapatkan Adjoin dari matrik tersebut dengan cara melakukan transpose matriks.

1. Kofaktor Matriks A

$A=\left[\begin{matrix}-3&6&-3\\6&-3&6\\-3&6&-3\end{matrix}\right]$

1. Adjoin Matriks A dengan mencari transpos dari Kofaktor Matriks A,

$Adj A==\left[\begin{matrix}-3&6&-3\\6&-3&6\\-3&6&-3\end{matrix}\right]$

**Contoh 3:**

 Carilah Adjoin matriks berikut:

 

 Cari masing-masing minor dan kofaktor, sehingga diperoleh matriks berikut:

 

Setelah mendapatkan nilai kofaktor



**Contoh 4:**

 Carilah adjoin matriks berikut:

 

Didapatkan nilai kofaktornya



Setelah didapatkan nilai kofaktor, maka bisa diperoleh adjoin matriks dengan cara mentranspose matriks kofaktor.



Latihan Soal 1:

Diketahui matriks

$$A=\left[\begin{matrix}-3&1&2\\6&-2&3\\5&4&1\end{matrix}\right]$$

 maka:

1. Hitunglah determinan dari matriks di atas
2. Tentukan semua minor matrik di atas
3. Bentuklah matrik kofaktor
4. Bentuklah adjoin matrik di atas.

Latihan Soal 2:

Diketahui matriks

$$A=\left[\begin{matrix}3&1&3\\1&4&2\\0&5&2\end{matrix}\right]$$

 maka:

1. Hitunglah determinan dari matriks di atas
2. Tentukan semua minor matrik di atas
3. Bentuklah matrik kofaktor
4. Bentuklah adjoin matrik di atas.