# Aplikasi Turunan

- **GARIS SINGGUNG**
- **MAKSIMISASI ATAU MINIMISASI (MAXIMIZATION ATAU MINIMIZATION) : A FREE OPTIMUM DAN A CONSTRAINED OPTIMUM**

Turunan fungsi biasa digunakan saat menentukan gradien garis singgung suatu kurva, menentukan dimana interval naik turun fungsi, menentukan jenis nilai stasioner dan beberapa aplikasi pada persamaan gerak atau masalah terkait maksimum dan minimum. Berikut contoh-contoh soal aplikasi turunan:

<u>Soal Nomor 1</u>
Diberikan suatu fungsi dengan persamaan y = 2x − √x
Tentukan persamaan garis singgung kurva melalui titik (9, 16)

<u>Pembahasan</u>
Penggunaan turunan untuk menentukan persamaan garis singgung. Turunkan fungsi untuk mendapatkan gradien dan masukkan x untuk mendapat nilainya.

$$y = 2x - \sqrt{x}$$
$$y = 2x - x^{\frac{1}{2}}$$
$$m = y' = 2 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2 - \frac{1}{2\sqrt{9}} = 2 - \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$$

Persamaan garis yang melalui titik (9 , 16) dengan gradien $^{11}/_{6}$ adalah

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 16 = \frac{11}{6}(x - 9)$$
$$6(y - 16) = 11(x - 9)$$
$$6y - 96 = 11x - 99$$
$$6y - 11x - 96 + 99 = 0$$
$$6y - 11x + 3 = 0$$

<u>Soal Nomor 2</u>
Sebuah benda bergerak dengan persamaan gerak $y = 5t^2 - 4t + 8$ dengan y dalam meter dan t dalam satuan detik. Tentukan kecepatan benda saat t = 2 detik

**Pembahasan**
Persamaan kecepatan benda diperoleh dengan menurunkan persamaan posisi benda.
$y = 5t^2 - 4t + 8$
$v = y' = 10t - 4$

Untuk $t = 2$ detik dengan demikian kecepatan benda adalah
$v = 10(2) - 4 = 20 - 4 = 16$ m/detik

**Soal Nomor 3**
Persamaan garis yang menyinggung kurva $y = x^3 + 2x^2 - 5x$ di titik $(1, -2)$ adalah....

**Pembahasan**
Tentukan dulu gradien garis singgung
$y = x^3 + 2x^2 - 5x$
$m = y' = 3x^2 + 4x - 5$

Nilai m diperoleh dengan memasukkan $x = 1$
$m = 3(1)^2 + 4(1) - 5 = 2$

Persamaan garis dengan gradiennya 2 dan melalui titik $(1, -2)$ adalah
$y - y_1 = m(x - x_1)$
$y - (-2) = 2(x - 1)$
$y + 2 = 2x - 2$
$y = 2x - 4$

**Soal Nomor 4**
Tentukan nilai maksimum dari fungsi $f(x) = 3x(x^2 - 12)$

**Pembahasan**
Nilai maksimum diperoleh saat $f'(x) = 0$
Urai kemudian turunkan
$f(x) = 3x(x^2 - 12)$
$f(x) = 3x^3 - 36x$
$f'(x) = 9x^2 - 36 = 0$
$9x^2 = 36$
$x^2 = 4$
$x = \sqrt{4} = \pm 2$

*Untuk $x = +2$*
$f(x) = 3x^3 - 36x = 3(2)^3 - 36(2) = 24 - 72 = -48$

*Untuk $x = -2$*
$f(x) = 3x^3 - 36x = 3(-2)^3 - 36(-2) = -24 + 72 = 48$

Dengan demikian nilai maksimumnya adalah 48

Soal Nomor 5

Suatu proyek pembangunan gedung sekolah dapat diselesaikan dalam *x* hari

dengan biaya proyek perhari $\left(3x - 900 + \dfrac{120}{x}\right)$ ratus ribu rupiah.

Agar biaya minimum maka proyek tersebut diselesaikan dalam waktu....

Pembahasan

Tentukan dulu fungsi biaya proyek dalam *x* hari, kalikan biaya pada soal dengan *x*

$$B(x) = x\left(3x - 900 + \frac{120}{x}\right)$$
$$B(x) = 3x^2 - 900x + 120$$

Biaya minimum tercapai saat turunannya = 0,

$$B'(x) = 6x - 900 = 0$$
$$6x = 900$$
$$x = \frac{900}{6} = 150$$

Soal Nomor 6

Suatu perusahaan memproduksi x buah barang. Setiap barang yang diproduksi memberikan keuntungan $(225x - x^2)$ rupiah. Supaya total keuntungan mencapai maksimum, banyak barang yang harus diproduksi adalah...

Pembahasan

Keuntungan satu barang adalah $(225x - x^2)$, sehingga jika diproduksi x buah barang maka persamaan keuntungannya adalah keuntungan satu barang dikalikan dengan x

$U(x) = x(225x - x^2)$

$U(x) = 225x^2 - x^3$

Nilai maksimum U (x) diperoleh saat turunannya sama dengan nol

$U'(x) = 0$

$450x - 3x^2 = 0$

Faktorkan untuk memperoleh x
3x(150 − x) = 0
x = 0, x = 150

Sehingga banyak barang yang harus diproduksi adalah 150 buah.

Jadi berapa keuntungan maksimumnya? Masukkan nilai x = 150 ke fungsi U (x) untuk memperoleh besarnya keuntungan maksimum.

Soal Nomor 7

Dua bilangan bulat m dan n memenuhi hubungan 2m − n = 40. Nilai minimum dari $p = m^2 + n^2$adalah....

Pembahasan

Nilai minimum tercapai saat p' = 0

$$2m - n = 40$$
$$n = 2m - 40$$
$$p = m^2 + n^2$$
$$p = m^2 + (2m - 40)^2$$

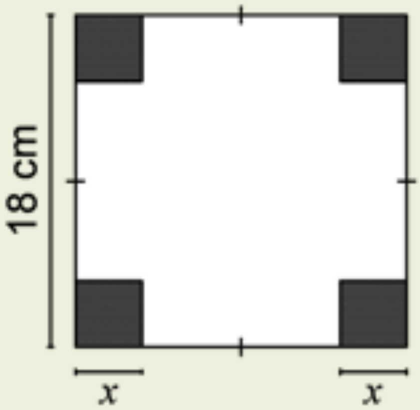
minimum tercapai saat:

$$p' = 0$$
$$2m + 4(2m - 40) = 0$$
$$2m + 8m - 160 = 0$$
$$10m = 160$$
$$m = 16$$

**Nilai p**

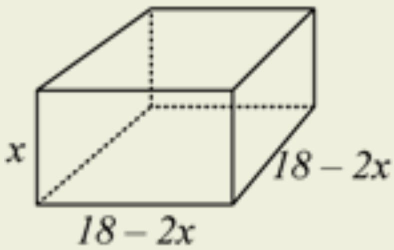
$$p = 16^2 + (2 \cdot 16 - 40)^2$$
$$p = 256 + 64 = 320$$

**Soal Nomor 8**
Dari selembar karton berbentuk persegi yang berukuran sisi 18 cm akan dibuat kotak tanpa tutup, dengan cara menggunting empat buah persegi di setiap pojok karton, seperti gambar berikut.




Volume kotak terbesar adalah...

**Pembahasan**
Kotak yang terbentuk memiliki sisi alas sepanjang $(18 - 2x)$ dan tingginya sebesar $x$ seperti gambar berikut:




Syarat yang diperlukan untuk nilai $x$ adalah $x > 0$
dan
$18 - 2x > 0$
$18 > 2x$
$x < 9$

Jadi nilai $x$ nantinya diantara 0 dan 9

Volume akan maksimum saat turunan pertamanya sama dengan nol.

$V = \text{Luas alas} \times \text{tinggi}$
$V = (18 - 2x)^2 x$
$V = (324 - 72x + 4x^2)x$
$V = (324x - 72x^2 + 4x^3$
Maksimum tercapai saat:
$V' = 0$
$324 - 144x + 12x^2 = 0$
$12x^2 - 144x + 324 = 0$
$x^2 - 12x + 27 = 0$
$(x - 9)(x - 3) = 0$
$x = 9 \text{ atau } x = 3$

Yang memenuhi syarat adalah untuk x = 3

$V = (18 - 2x)^2 x$
$V = (18 - 2 \cdot 3)^2 \cdot 3 = 432\ cm^3$

**Bahan 1.**

**APLIKASI TURUNAN : GARIS SINGGUNG**

Materi turunan dalam Matematika memiliki sub bab mengenai persamaan garis singgung suatu kurva, maka materi ini pasti akan di temui jika sedang mengulas mengenai turunan.

Sebelum kita belajar ke materi inti yaitu cara mencari persamaan garis singgung kurva, kita harus tahu dulu mengenai gradien garis yang disimbolkan dengan m, dimana :

- gradian garis untuk persamaan y=mx+c adalah m
- gradien garis untuk persamaan ax+by=c, maka m=-a/b
- gradien garis jika diketahui dua titik, misal (x1,y1) dan $(x_2,y_2)$ maka untuk mencari gradien garisnya $m=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$

Gradien dua garis lurus, berlaku ketentuan :

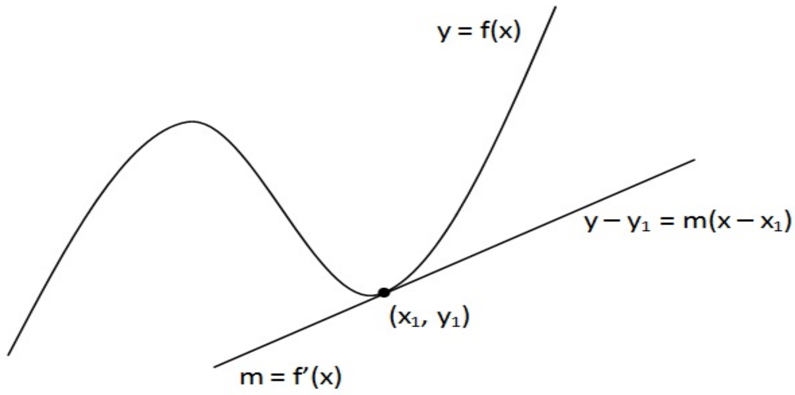
- jika saling sejajar maka $m_1=m_2$
- jika saling tegak lurus maka $m_1.m_2=-1$ atau $m_1=-1/(m_2)$

# Persamaan Garis Singgung Kurva

Jika terdapat kurva y = f(x) disinggung oleh sebuah garis di titik $(x_1, y_1)$ maka gradien garis singgung tersebut bisa dinyatakan dengan m = $f'(x_1)$. Sementara itu $x_1$ dan $y_1$ memiliki hubungan $y_1 = f(x_1)$. Sehingga persamaan garis singgungnya bisa dinyatakan dengan $y – y_1 = m(x – x_1)$.

Jadi intinya jika kita akan mencari persamaan garis singgung suatu kurva jika diketahui gradiennya m dan menyinggung di titik (x1,y1) maka kita gunakan persamaan

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$




Sedangkan jika diketahui 2 titik, misalnya $(x_1,y_1)$ dan $(x_2,y_2)$ maka untuk mencari persamaan garis singgung dari dua titik tersebut kita dapat gunakan persamaan

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Agar lebih memahami mengenai materi persamaan garis singgung tersebut, perhatikan beberapa contoh soal berikut ini :

1. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = x^3 – 3x$ di titik (2, 3)

Jawab :
$f(x) = x^3 – 3x$
$f'(x) = 3x^2 – 3$
$m = f'(2) = 12 – 3 = 9$

Jadi, persamaan garis singgungnya adalah
$y – y1 = m(x – x1)$
$y – 3 = 9 (x – 2)$
$y – 3 = 9x – 18$
$y = 9x – 15$

2. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = x^4 – 7x^2 + 20$ di titik yang berabsis 2 ?

Jawab :
$x = 2$
$y = x^4 – 7x^2 + 20 = y = 2^4 – 7.2^2 + 20 = 16 – 28 + 20 = 8$
$m = y' = 4x^3 – 14 x = 4.2^3 – 14.2 = 32 – 28 = 4$

Jadi, persamaan garis singgungnya adalah
$y - y_1 = m(x - x_1)$
$y - 8 = 4(x - 2)$
$y - 8 = 4x - 8$
$y = 4x$

3. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = x^3 + 10$ di titik yang berordinat 18 ?

Jawab :
Ordinat adalah nilai y, maka $y = 18$
$x^3 + 10 = 18$
$x^3 = 8$
$x = 2$

$m = y' = 3x^2 = 3.2^2 = 12$

Sehingga persamaan garis singgungnya
$y - y_1 = m(x - x_1)$
$y - 18 = 12(x - 2)$
$y - 8 = 12x - 24$
$y = 12x - 16$

4.. Persamaan garis singgung pada kurva $y = 3x^4 - 20$ yang sejajar dengan garis $y = 12x + 8$ adalah

Jawab :

$y = 3x^4 - 20 \longrightarrow y' = 12x^3$

Persamaan garis yang sejajar dengan garis singgung adalah $y = 12x + 8$ maka gradien garis ini adalah $m_1 = 12$

Karena sejajar maka gradiennya sama sehingga gradien garis singgung ($m_2$) adalah $m_2 = m_1 = 12$

gradien garis singgung ini sama dengan turunan kurva sehingga $y' = 12$

$12x^3 = 12 \longrightarrow x^3 = 1 \longrightarrow x = 1$

maka $y = 3x^4 - 20 = 3 - 20 = -17$

Persamaan garis singgungnya adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$
$y + 17 = 12(x - 1)$
$y + 17 = 12x - 12$
$y = 12x - 29$

## Bahan 2.

## MAKSIMISASI ATAU MINIMISASI (MAXIMIZATION ATAU MINIMIZATION) : A FREE OPTIMUM

### 1. Pengertian dan persyaratan Global maximum atau Global minimum, Relative maximum atau Relative minimum : Dengan fungsi dari 1 (satu) independent variable y = f (x)

☑ Dependent variable dari fungsi merupakan the objective function yaitu obyek dari maksimisasi (maximization) atau minimisasi (minimization).
Maximization atau minimization menetapkan angka atau bilangan dari independent variables sehingga diperoleh angka atau nilai the objective function atau dependent variable tertinggi (maximum) atau terendah (minimum). Karena itu, independent variables juga disebut sebagai *choice variables*.

☑ Istilah :

✪ Baik global maximum atau minimum, maupun relative maximum atau minimum, disebut extremum (diagram di bawah).

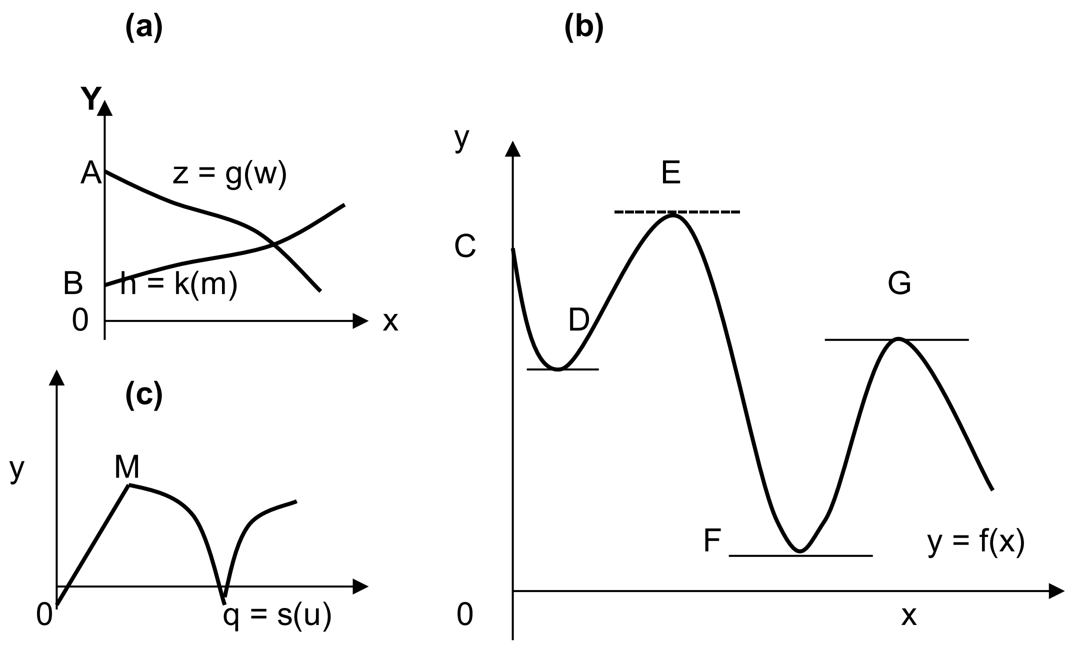



**Diagram 1. : Extremum Fungsi y = f (x)**

✪ Titik extremum disebut stationary point. Sedangkan angka atau nilai extremum dari fungsi atau dependent variable atau the objective function disebut a critical value atau stationary value. Selain itu, the slope dari the objective function pada titik extremum adalah 0 (nol).

✪ Global (absolute) maximum adalah titik atau angka tertinggi dari the objective function atau dependent variable. Contoh, titik A pada fungsi $z = g(w)$ di Diagram 1. (a) di atas.

✪ Sedangkan, global (absolute) minimum merupakan titik atau angka terendah. Contoh titik B pada fungsi $h = k(m)$ di Diagram 1. (a) atas.

✪ Relative (local) maximum adalah titik atau angka maximum di sekitar titik itu pada the objective function. Sedangkan, relative (local) minimum adalah titik atau angka minimum di sekitar titik itu pada the objective function.

Diantara 4 extremums pada diagram 1. (b) di atas, maka :

- Titik E adalah a global (absolute or free) maximum, sedangkan titik G adalah local (relative) maximum.
- Titik F adalah a global minimum, sedangkan titk D adalah local minimum.

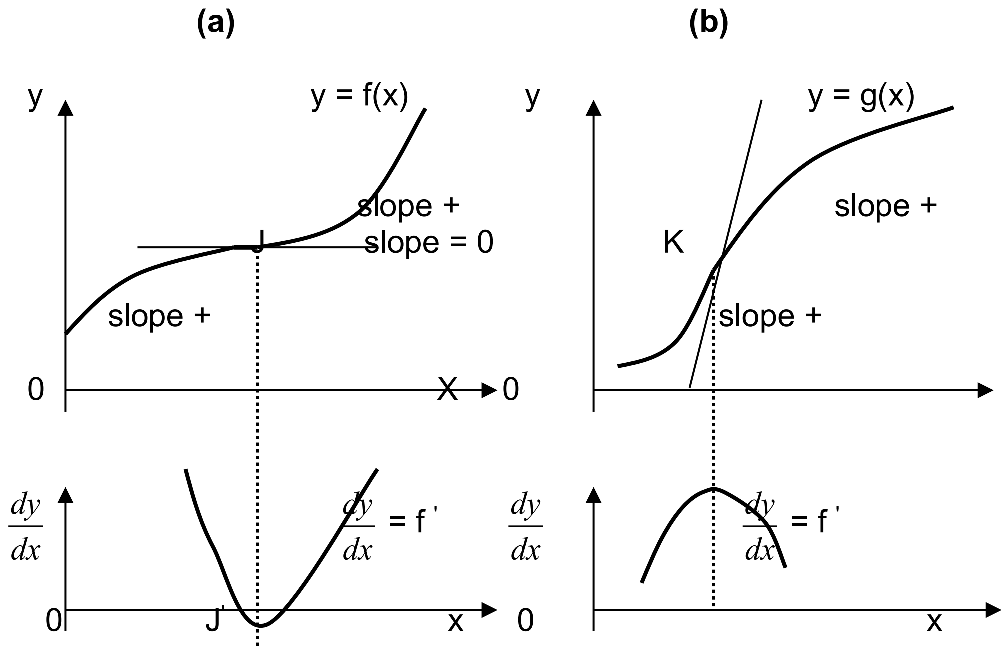
☑ Persyaratan untuk extremum dan inflection point : Dengan fungsi dari 1 (satu) independent variable) $y = f(x)$

<table>
<tr><th rowspan="2">PERSYARATAN</th><th colspan="2">EXTREMUM<br>(Global/Absolute and Local/Relative)</th><th rowspan="2">Inflectio n Point</th></tr>
<tr><th>Maximum</th><th>Minimum</th></tr>
<tr><td>Necessary Condition, or, First Order Condition (FOC) → (First Derivative Condition)</td><td>$f' = 0$</td><td>$f' = 0$</td><td>$f' = 0$</td></tr>
<tr><td>Sufficiet Condition, or, Second Order Conditi-on (SOC) → (Second Derivative Condition) :*)<br>a. SOC necessary<br>b. SOC sufficient</td><td>$f'' \le 0$<br><br>$f'' < 0$</td><td>$f'' \ge 0$<br><br>$f'' > 0$</td><td>)<br>) $f'' = 0$<br>)</td></tr>
<tr><td colspan="4">*) SOC bahwa $f''$ negative (< 0) / positif (> 0) pada nilai kritikal (the critical value) $x_0$ adalah cukup (sufficient) untuk relative maximum/relative minimum, merupakan hal yang tidak perlu (necessary).<br>Oleh karena itu, kehati-hatian diperlukan atas dasar kenyataan bahwa relative maximum/relative minimum dapat terjadi tidak hanya apabila $f''$ negative (< 0) / positif (> 0), tetapi juga apabila $f' = 0$.<br>Dengan demikian, SOC necessary harus dinyatakan dengan weak inequalities $f'' \le 0$) / $\ge 0$. Lihat C & W (Book 1) Ch. 9 hal 235.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Ingat :<br>1. Untuk the first derivative :<br>a. $f' > 0$ → berarti nilai fungsi (the value of the function) akan meningkat.<br>b. $f' > 0$ → berarti nilai fungsi (the value of the function) akan menurun..<br>2. Untuk the second derivative :<br>a. $f'' > 0$ → berarti the slope of the function or the curve akan meningkat.<br>b. $f'' > 0$ → berarti the slope of the function or the curve akan meningkat<br>.</td></tr>
</table>

☑ Catatan :

- ✪ Titik M dan N pada Diagram 1.(c) di atas, tidak dapat dianggap extremum karena pada kedua titik itu fungsi g = s(u) tidak kontinyu sehingga tidak terdapat derivatif dari fungsi g.
- ✪ Titik infleksi (inflection point) adalah titik dimana tidak terdapat extremum (maximum atau minimum).

**Diagram 2. : Inflection point pada fungsi y = f (x) dan y = g (x)**




Penjelasan inflection point :

Pada diagram di atas, titik J dan K disebut inflection point karena tanda slope tidak berubah dari sebelum ke sesudah titik J atau K :

- ◎ Pada digaram 2.(a), walaupun mempunyai fungsi f(x) derivatif pada titik J = 0 atau f′ = 0, yang juga digambarkan dengan slope pada titik J′ = 0. Tetapi tanda slope atau derivatif f′ tetap sama positif (slope +) baik sebelum dan sesudah titik J dan J′.
  Padahal syarat titik J menjadi extremum, apabila tanda slope berubah dari sebelum ke sesudah titik extremum J. Apabila titik J minimum, maka tanda slope berubah dari negatif untuk sebelum titik J menjadi positif untuk setelah titik J. Atau sebaliknya, apabila titik J.

- ◎ Pada Diagram 2. (b) di atas, derivatif atau slope fungsi g(x) pada titik K tertinggi maximum (tidak sama dengan 0 (nol)) seperti terlihat pada titik K′. Tetapi slope atau derivatif atau f′ sebelum titik K naik (+) tajam dan setelah titik K tetap naik (+) tetapi dengan melandai atau menurun.

**2. Contoh Maximisasi dan Minimisasi dengan fungsi dari 1 (satu) Independent variable**

☑ Minimisasi dari fungsi y = f(x) = 4 $x^2$ − x
dimana kurva berbentuk U (U-shaped curve)

✪ Syarat :

✓ The first order condition (FOC) atau necessary condition

$\frac{dy}{dx} = f^{/} = 8x - 1 = 0$ → maka : 8 x = 1 → berarti x = ⅛

✓ The second order condition (SOC) atau sufficient condition :

$\frac{d^2y}{dx^2} = f^{//} = 8$ > 0

✓ Karena SOC terpenuhi yaitu $\frac{d^2y}{dx^2} = f^{//}$> 0 atau ≠ 0 tapi pisitif, maka nilai minimum dari fungsi atau dependent variable (the stationary value pada x = ⅛, yaitu
y = 4.(⅛)$^2$ − ⅛ = − $1/16$.

☑ Maximisasi laba

✪ Teori dan diagram

Laba (Π) = Total Penerimaan (Total Revenue or TR) −
− Total Biaya (Total Costs or TC)

Π = TR − TC yang merupakan fungsi dari
volume jual dan produksi (Q), jadi :

Π (Q) = TR (Q) − TC (Q)

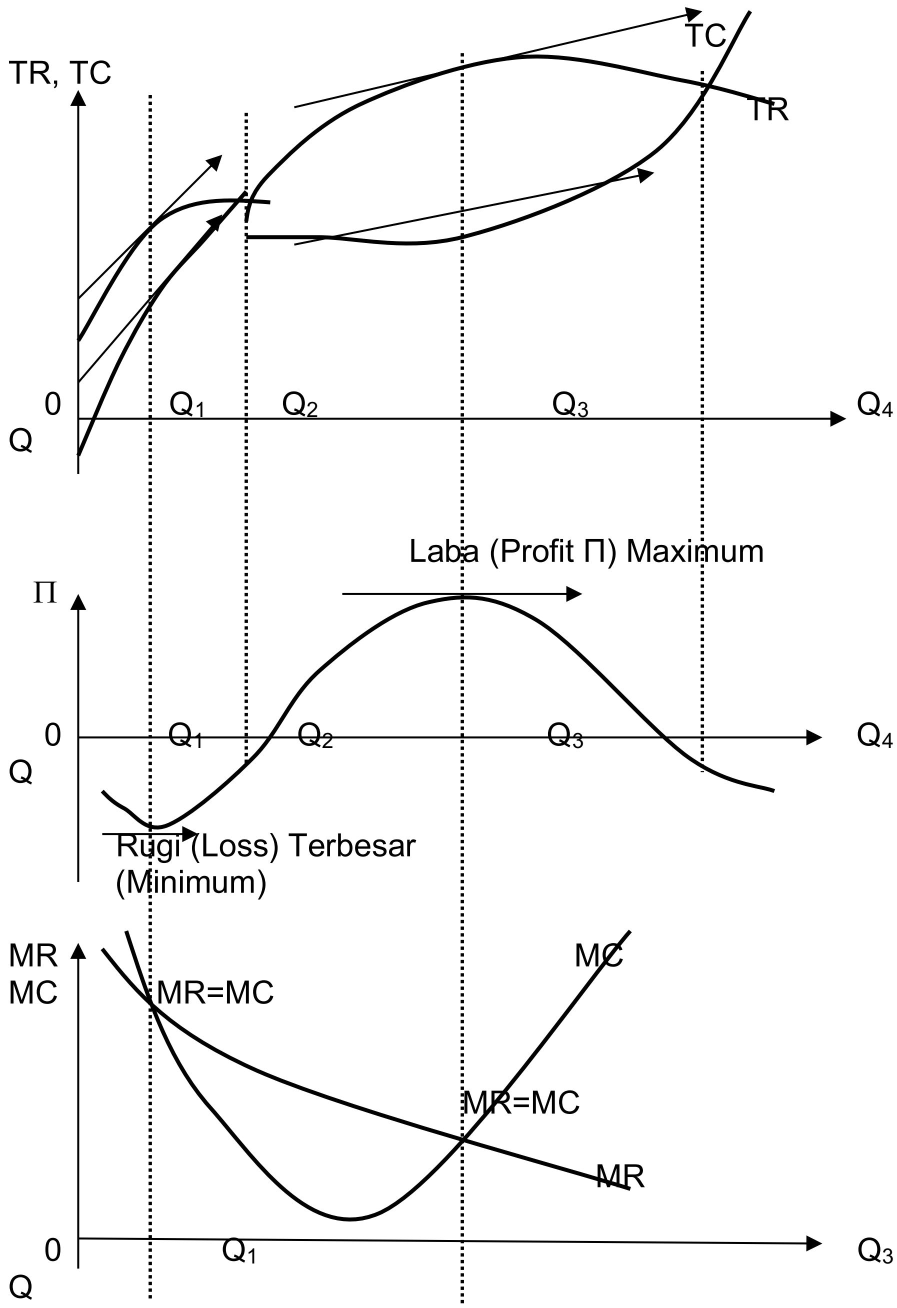
✓ Syarat :

► FOC : $\frac{d\Pi}{dQ} = \Pi^{/} = \frac{dTR}{dQ} - \frac{dTC}{dQ} = MR - MC = 0,$ berarti :
MR = MC, atau : slope TR = slope TC,
atau slope TR sejajar dengan slope TC

► $\frac{d^2\Pi}{dQ^2} = \Pi^{//} < 0$, berarti, (MR − MC ) < 0, atau,
MR < MC

✓ Diagram maksimisasi laba (profit maximization)

**Diagram 3. : Maksimum Laba (Maximum Profit)**




Catatan :

► Maximum profit pada MR = MC atau
slope TR = slope TC

► Juga untuk minimum (rugi terbesar) pada MR atau slope TR = slope TC

✪ Contoh maksimisasi laba $\Pi$

TR (Q) = 1,200 Q − 2 $Q^2$

TC (Q) = $Q^3$ − 61,25 $Q^2$ − 1.528,5 Q + 2.000

$\Pi$ (Q) = TR − TC
= {1,200 Q − 2 $Q^2$} − { $Q^3$ − 61,25 $Q^2$ − 1.528,5 Q + 2.000}
= − $Q^3$ + 59,25 $Q^2$ − 328,5 Q − 2.000

✓ FOC : $\frac{d\Pi}{dQ} = -3Q^2 + 118.5Q - 328.5 = 0$ → cek bahwa persamaan FOC hasil dari MR = MC
Dengan rumus abc diperoleh Q = 3 atau Q = 36.5

✓ SOC : $\frac{d^2\Pi}{dQ^2} = -6Q + 118.5 \rightarrow \left\{\frac{> 0 \Rightarrow \text{apabila Q} = 3}{< 0 \Rightarrow \text{apabila Q} = 36{,}5}\right\}$

✓ Karena maximum mensyaratkan SOC < 0, maka maksimum profit ($\Pi$) terjadi pada Q = 36.5

☑ Minimisasi biaya (costs)

TC (Q) = $Q^3$ − 61,25 $Q^2$ − 1.528,5 Q + 2.000

✪ FOC : $\frac{dTC}{dQ} = 3Q^2 - 121.5Q - 1.528.5 = 0$

Dengan rumus abc diperoleh Q = 60.4 atau Q = − 303.4

✪ SOC : $\frac{d^2\Pi}{dQ^2} = 6Q - 121.5 \rightarrow \left\{\frac{> 0 \Rightarrow apabilaQ = 60.4}{< 0 \Rightarrow apabilaQ = -303.4}\right\}$

✪ Karena minimum mensyaratkan SOC > 0, maka minimum costs terjadi pada Q = 60.4

☑ Cari Q untuk maksimum fungsi TR (Q) di atas.

**3. Maksimisasi dan minimisasi : A free optimum dengan fungsi dari 2 (dua) atau lebih independent variables**[1]

Fungsi $z = f(x, y)$

✪ FOC :

| Persyaratan FOC untuk Extermum<br>bagi fungsi dengan 2 independent variable $z = f(x, y)$ | | |
|---|---|---|
| | Maximum | Minimum |
| FOC | $dz = 0$<br>untuk setiap nilai atau angka dx atau dy ≠ 0 atau hanya salah satu = 0, sehingga berarti : $f_x = 0$ dan $f_y = 0$ | $dz = 0$<br>untuk setiap nilai atau angka dx dan dy ≠ 0 atau hanya salah satu = 0, sehingga berarti : $f_x = 0$ dan $f_y = 0$ |
| dz = (The first) total differential dari fungsi $z = f(x, y)$ → $dz = \frac{\delta z}{\delta x}dx + \frac{\delta z}{\delta y}dy = f_x dx + f_y dy$, dimana :<br>$f_x = \frac{\delta z}{\delta x}$ = the partial derivative fungsi z terhadap independent variable x<br>$f_y = \frac{\delta z}{\delta y}$ = the partial derivative fungsi z terhadap independent variable y | | |
| Dengan FOC yaitu dz = 0 dan dx dan dy ≠ 0 sehingga partial derivatives $f_x$ dan $f_y$ = 0, maka angka atau nilai variabel x dan y diperoleh. | | |

[1] **Untuk lebih dari 2 (dua) independent variables FOC dan SOC diformulasikan dengan menggunakan matriks dan vectors, pada kuliah akan datang.**

SOC :

<table>
<tr><td colspan="3">Persyaratan SOC untuk Extermum<br>bagi fungsi dengan 2 independent variable</td></tr>
<tr><td></td><td>Maximum</td><td>Minimum</td></tr>
<tr><td>SOC necessary</td><td>$d^2z \leq 0$</td><td>$d^2z \geq 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">SOC sufficient</td><td>$d^2z < 0 \rightarrow$ berarti jika (iff)*:<br>$f_{xx} < 0$, $f_{yy} < 0$, serta<br>$f_{xx} f_{yy} > (f_{xy})^2$</td><td>$d^2z > 0 \rightarrow$ berarti jika (iff)* :<br>$f_{xx} > 0$, $f_{yy} > 0$, serta<br>$f_{xx} f_{yy} > (f_{xy})^2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">* Karena : $d^2z = d(dz) = \frac{\delta(dz)}{\delta x}dx + \frac{\delta(dz)}{\delta y}dy$ =<br>$d^2z = d(dz)$ = $\frac{\delta}{\delta x}(f_x dx + f_y dy)dx + \frac{\delta}{\delta y}(f_x dx + f_y dy)dy$ =<br>= $(f_{xx}dx + f_{xy}dy)dx + (f_{yx}dx + f_{yy}dy)dy$=<br>= $f_{xx}dx^2 + f_{xy}dydx + f_{yx}dxdy + f_{yy}dy^2$=<br>= $f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dydx + f_{yy}dy^2$<br>Catatan $f_{xy} = f_{yx}$ atau mempunyai angka atau nilai yang sama seperti didalilkan oleh Young's theorem.</td></tr>
</table>

☑ Contoh : $z = 8x^3 + 2xy - 3x^2 + y^2 + 1$

FOC :

$f_x = 24x^2 + 2y - 6x = 0$ dan $f_y = 2x + 2y = 0$

dengan substitusi, maka diperoleh 2 angka x dan y :

$x_1 = 0 \rightarrow$ berarti $y_1 = 0$; $x_2 = \frac{1}{3} \rightarrow$ berarti $y_2 = -\frac{1}{3}$

SOC :

Dengan $x_1 = 0$ dan $y_1 = 0$, maka :

$f_{xx} = 48x - 6 = -6$ (< 0);

$f_{yy} = 2$ (> 0),

$\{f_{xx} f_{yy} = -12\} < \{(f_{xy})^2 = (2)^2 = 4\}$

Jadi SOC tidak terpenuhi dengan $x_1 = 0$ dan $y_1 = 0$ baik untuk maximum maupun minimum

Dengan $x_2 = \frac{1}{3}$ dan $y_1 = -\frac{1}{3}$, maka :

$f_{xx} = 48x - 6 = 10$ ( > 0);

$f_{yy} = 2$ (> 0),

$\{f_{xx}\, f_{yy} = 20\} > \{(f_{xy})^2 = (2)^2 = 4\}$

Jadi SOC terpenuhi dengan $x_2 = \frac{1}{3}$ dan $y_1 = -\frac{1}{3}$, sehingga

nilai atau angka $z = \frac{8}{27} - \frac{2}{9} - \frac{3}{9} + \frac{1}{9} + 1 = \frac{23}{27}$

☑ Contoh : $z = x + 2\,ey - e^x - e^{2y}$

FOC : $f_x = 1 - e^x = 0$ dan $f_y = 2\,e + 2\,e^{2y} = 0$

dengan substitusi, maka diperoleh hanya 1 angka x dan y :

$x = 0 \rightarrow$ berarti $y = ½$

SOC :

Dengan $x = 0$ dan $y = ½$, maka :

$f_{xx} = -e^x = -1$ (< 0);

$f_{yy} = -4\,e^{2y} = -4\,e$ (< 0),

$\{f_{xx}\, f_{yy} = 4\} > \{(f_{xy})^2 = (0)^2 = 0\}$

Jadi SOC terpenuhi dengan $x = 0$ dan $y = ½$, sehingga nilai

atau angka $z = 0 + e - e^0 - e^1 = -1$

**Bahan 3.**

## MAKSIMISASI ATAU MINIMISASI (MAXIMIZATION ATAU MINIMIZATION) : A CONSTRAINED OPTIMUM (DENGAN BATASAN TERTENTU)

### 1. Pengertian a constrained opmization

- ☑ Pada butir 3. Bahan 8.2. di atas tentang maksimisasi (maximization) dan minimisasi (minimization) atau extremum tanpa batasan tertentu (a constraint), disebut a free optimum.

- ☑ Pada Bahan 8.3. ini tentang maximization dan minimization atau extremum dengan suatu batasan tertentu (a constraint atau subject to), disebut a constraint optimization.
  The constraint juga disebut, restraint, side relation, subsidiary condition, yang berfungsi membatasi (subject to) domain dari fungsi dan berarti akhirnya terhadap range dari fungsi itu sendiri (the objective function).
  Diagram perbedaan a free optimum dan a constrained optimum pada C&W (book 1) Ch.12 hal 347-349.

### 2. Penyelesaian a constrained optimum dengan dua cara[2]

The objective function : $U = x_1x_2 + 2\,x_1$
A constraint or subject to : $4\,x_1 + 2\,x_2 = 60$

- ☑ Penyelesaian atas dasar cara a free optimum seperti pada G.3. di atas

  Dari the constraint (a linear function) $4\,x_1 + 2\,x_2 = 60$ diperoleh

  $$x_2 = 30 - 2\,x_1$$

  Maka the objective function hanya dengan variable $x_1$ menjadi :

  $$U = x_1\,(30 - 2\,x_1) + 2\,x_1 = 32\,x_1 - 2\,x_1^2$$

  Kemudian cari dan buktikan extremum dalam hal ini maximum atas dasar persyaratan the free optimum seperti pada butir 3. Bahan 8.2. di atas :

---

[2] **Untuk lebih dari 2 (dua) independent variables FOC dan SOC diformulasikan dengan menggunakan matriks dan vectors, pada kuliah mendatang.**

$U' = 32 - 4\,x_1 = 0 \rightarrow$ diperoleh $x_1 = 8$ dan $x_2 = 14$
sehingga $U = 8.14 + 2.8 = 112 + 16 = 128$

$U = 128$ maksimum karena $U'' = -4$ ($< 0$) sehingga SOC untuk maksimum terpenuhi.

☑ Penyelesaian dengan Lagrange Multiplier method

✪ Esensi dari the Lagrange multiplier method adalah agar cara the free optimum dapat diaplikasikan pada the constrained optimum.
Untuk itu perlu dibentuk the Lagrangian function yang menyatukan the objective function dan the constrained function dengan the Lagrange (undermined) multiplier $\lambda$ (the Greek letter lambda).

✪ Dengan contoh fungsi-fungsi di atas, maka the Lagrangian function Z :

Max. (maximize) : $U = x_1x_2 + 2\,x_1$
S.t. (subject to) : $4\,x_1 + 2\,x_2 = 60$

$$Z(x_1, x_2, \lambda) = x_1x_2 + 2\,x_1 + \lambda\,\{60 - (4\,x_1 + 2\,x_2)\}$$

$$= x_1x_2 + 2\,x_1 + 60\,\lambda - 4\,\lambda\,x_1 - 2\,\lambda\,x_2$$

FOC :

- $Z_1 = \dfrac{\delta Z}{\delta x_1} = x_2 + 2 - 4\,\lambda = 0$

  Dapat disederhanakan : $\lambda = \dfrac{x_2 + 2}{4}$ ........(1)

- $Z_2 = \dfrac{\delta Z}{\delta x_2} = x_1 - 2\,\lambda = 0$

  Dapat disederhanakan : $\lambda = \dfrac{x_1}{2}$ ..........(2)

  Pers (1) dan (2) dapat disederhanakan menjadi

$$\lambda = \frac{x_2 + 2}{4} = \frac{x_1}{2} \quad\text{..................(3)}$$

Dari pers (3) diperoleh persamaan $2\ (x_2 + 2) = 4\ x_1$

Jika diselesaikan menjadi : $4\ x_1 - 2\ x_2 = 4$……………(3)

- $Z_\lambda = \dfrac{\delta Z}{\delta \lambda} = 60 - 4\ x_1 - 2\ x_2 = 0 \longrightarrow 4\ x_1 + 2\ x_2 = 60$……….(4)

Persamaan (3) dan (4) diselesaikan menjadi :

$$\begin{array}{r} 4\ x_1 - 2\ x_2 = 4 \\ 4\ x_1 + 2\ x_2 = 60\ - \\ \hline \end{array}$$

$- 4x_2 = - 56$ atau $4x_2 = 56 \longrightarrow x_2 = 14$

$x_1 = 8,\quad x_2 = 14,\quad \lambda = 4,$ sehingga

$Z = x_1x_2 + 2\ x_1 + \lambda\ \{60 - (4\ x_1 + 2\ x_2)\} = 128$

$U = x_1x_2 + 2\ x_1 = 8.14 + 2.8 = 128$

SOC : Akan dijelaskan dengan menggunakan matriks dan vectors.

✪ Bentuk umum penyelesaian dengan the Lagrangian function

The objective function : $z = f\ (x, y)$

Subject to the constraint : $g\ (x, y) = c$

The Lagrangian function : $Z = f\ (x, y) + \lambda\ \{c - g\ (x, y)\}$

FOC : $Z_x = f_x - \lambda\ g_x = 0$

$Z_y = f_y - \lambda\ g_y = 0$

$Z_\lambda = c - g\ (x, y) = 0$

SOC : Akan dijelaskan dengan menggunakan matriks dan vectors.