BEBERAPA PEMAKAIAN TURUNAN

Turunan ebagai salah satu bagian dari kalkulus banyak digunakan untuk menyelesaikan masalah dalam bidang ekonomi, bisnis, industri, fisika, biologi, ilmu sosial, dan ssebagainya. Pada bab ini akan dibahas beberapa diantaranya:

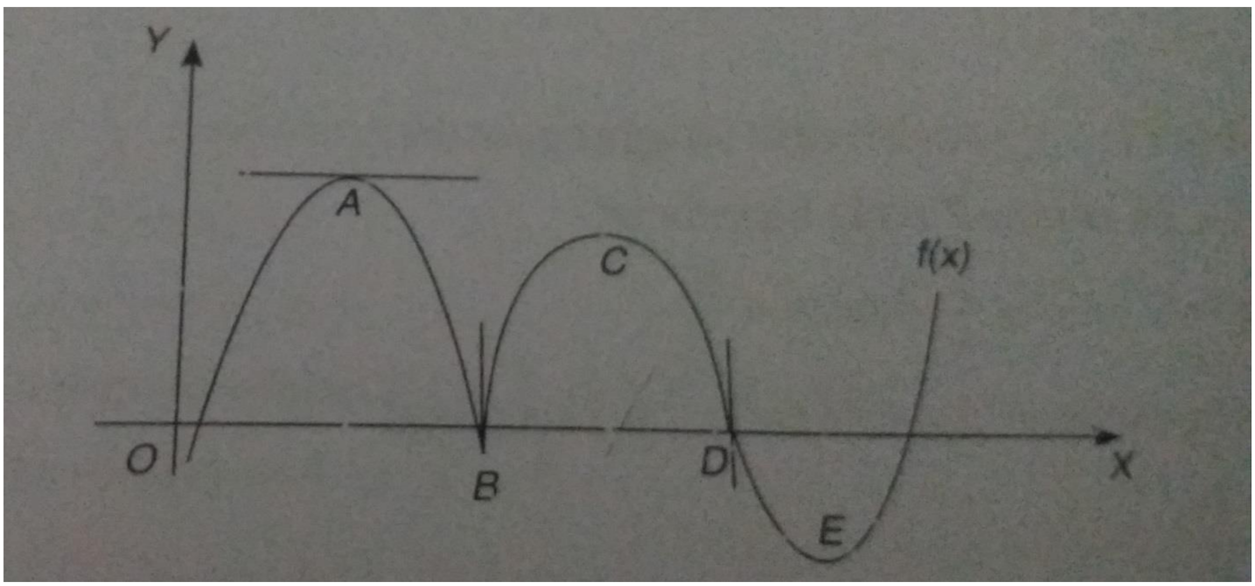
A. Garis Singgung dan Garis Normal

Jika fungsi f(x) mempunyai suatu turunan pertama f'(x) pada $x = x_0$ yang hingga, maka grafik y = f(x)mempunyai garis singgung di (x_0, y_0) dengan koefisien arah:

$$\boxed{m = \tan\theta = f'(x_0)}$$

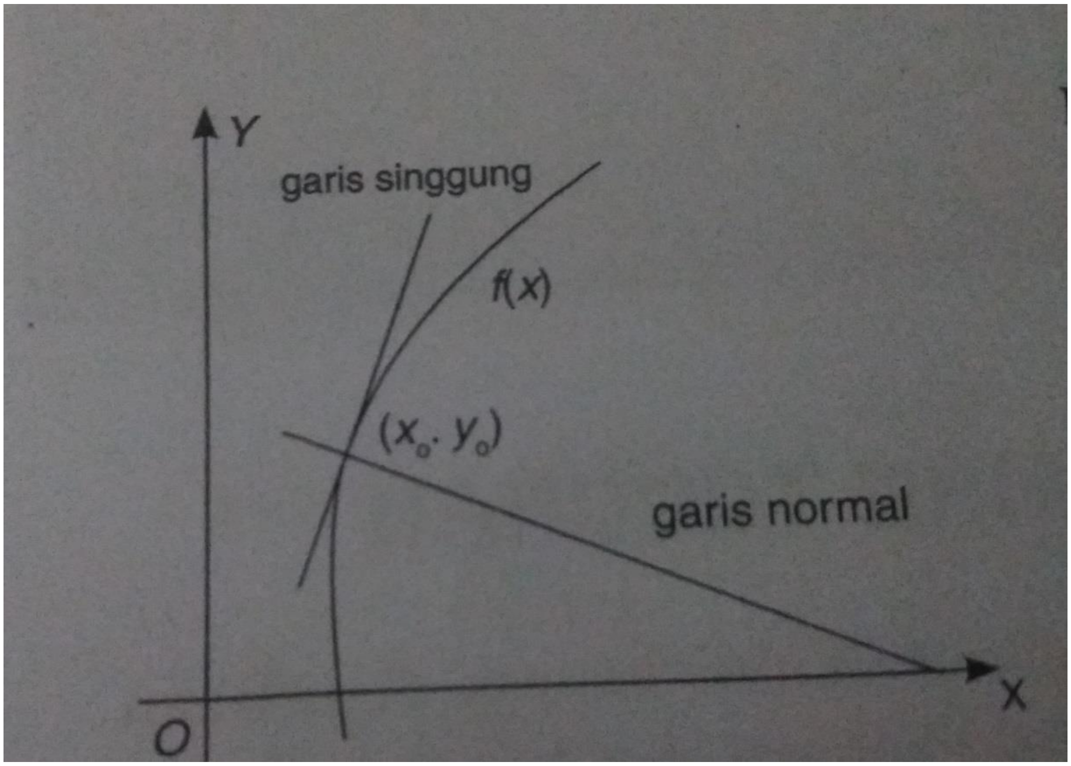
Jika m = 0 maka garis singgung sejajar sumbu X, persamaany = y_0. Garis singgung tersebut mempunyai persamaan

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$



Jika f(x) kontinu pada $x = x_0$, tetapi $f'(x) = \infty$ maka grafik mempunyai garis singgung yang sejajar sumbu Y, persamaannya: $x = x_0$. Contohnya, titik B dan titik D pada gambar.

Garis normal pada grafik fungsi f(x) pada salah satu titik adalah garis ang tegak lurus garis singgung pada titik tersebut.



Persamaan garis normal di $(x_{0,} y_0)$:

$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x)}(x - x_0)$

- Jika garis singgung // sumbu Y maka garis normal // sumbu X
- Jika garis singgung //sumbu X maka garis normal // sumbu Y

Sudut perpotongan antara dua buah grafikfungsi didefinisikan sebagai sudut antara kedua garis singgung pada titik potong kedua grafik tersebut. Untuk menentukan sudut perpotongan antara dua grafik fungsi, langkahnya ssebagai berikut:

1. Tentukan titik potong
2. Tentukan koefisien arah garis singgung m_1 dan m_2 pada titik potong tersebut
3. Jika $m_1 = m_2$, maka sudut perpotongan $\varphi = 0^0$
4. Jika $m_1 = -1/m_2$, maka sudut perpotongan $\varphi = 90^0$
5. Jika tidak memenuhi syarat diatas, maka:

   $\tan\varphi = \left|\frac{m1 - m2}{1 + m1m2}\right|$, dengan φ adalah sudut lancip

Panjang garis singgung adalah panjang perpotongan garis singgung dihitung dari titik singgung sampai titik potong dengan sumbu X. Sedangkan panjang proyeksi potongan garis tersebut pada sumbu X disebut panjang subgaris singgung (panjang subtangen).

Panjang garis normal adalah panjang potongan garis normal dihitung dari titik potong dengan garis singgung sampai titik potong dengan sumbu X. Sedangkan panjang proyeksi tersebut pada sumbu X disebut panjang subgaris normal (panjang subnormal). Seperti gambar dibawah ini:

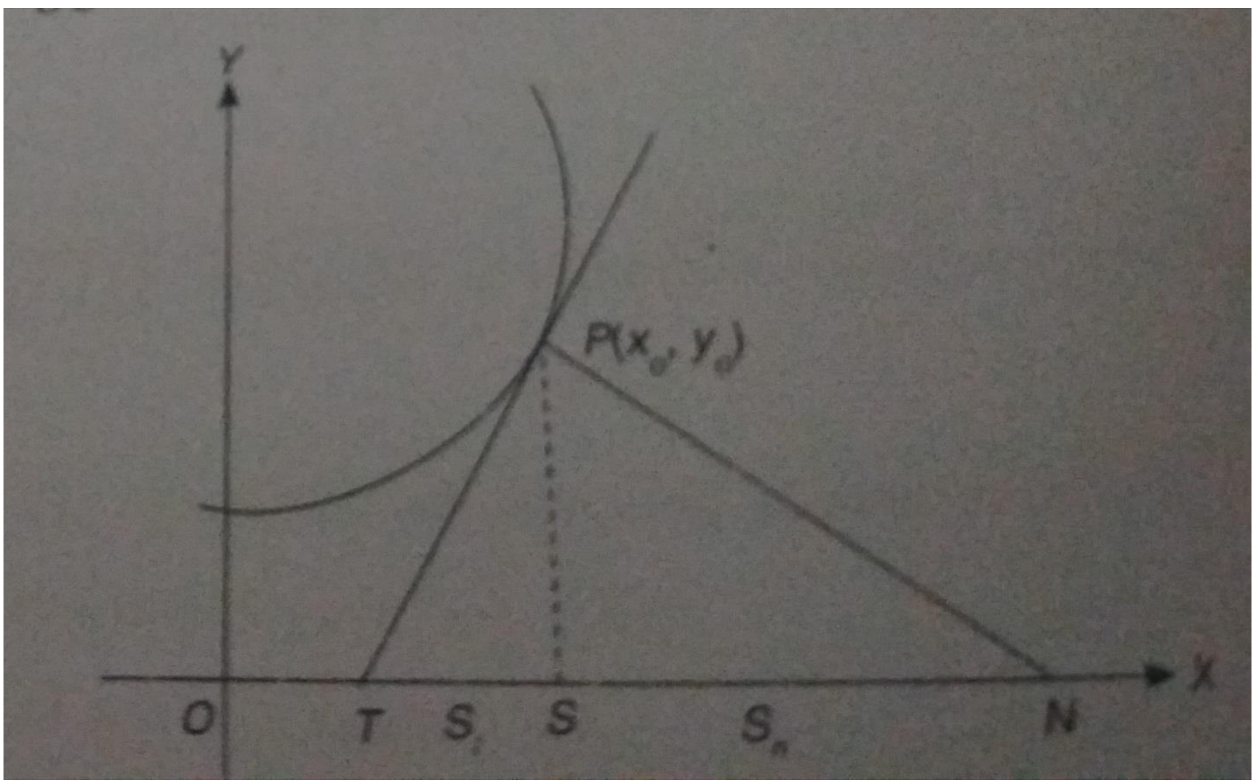
Jika m = tan φ = koefisien arah garis singgung

Panjang subtangen (S_t) = TS = $\left|\frac{y_0}{m}\right|$

Panjang subnormal (S_n) = SN = $|my_0|$

Panjang garis singgung = TP = $\sqrt{TS^2 + SP^2}$

Panjang garis normal = NP = $\sqrt{SN^2 + SP^2}$

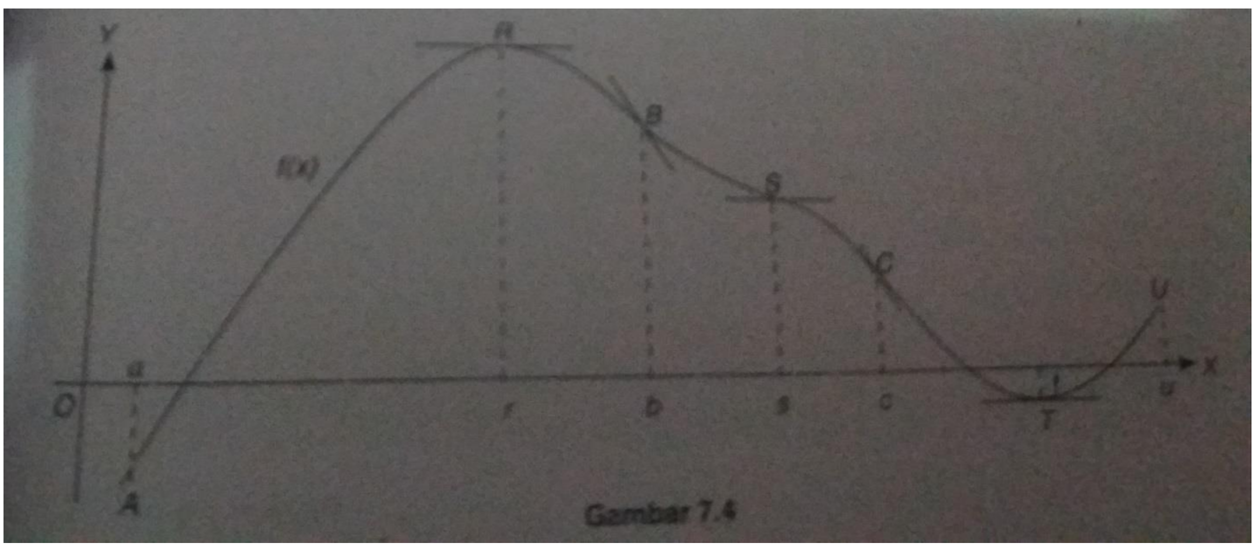


B. Maksima dan Minima

Definisi: Suatu fungsi $f(x)$ dikatakan naik pada titik $x = x_0$, jika untuk $h > 0$ yang cukup kecil, berlaku $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$

Fungsi $f(x)$ dikatakan turun pada titik $x = x_0$, jika untuk $h > 0$ yang cukup kecil, berlaku $f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h)$

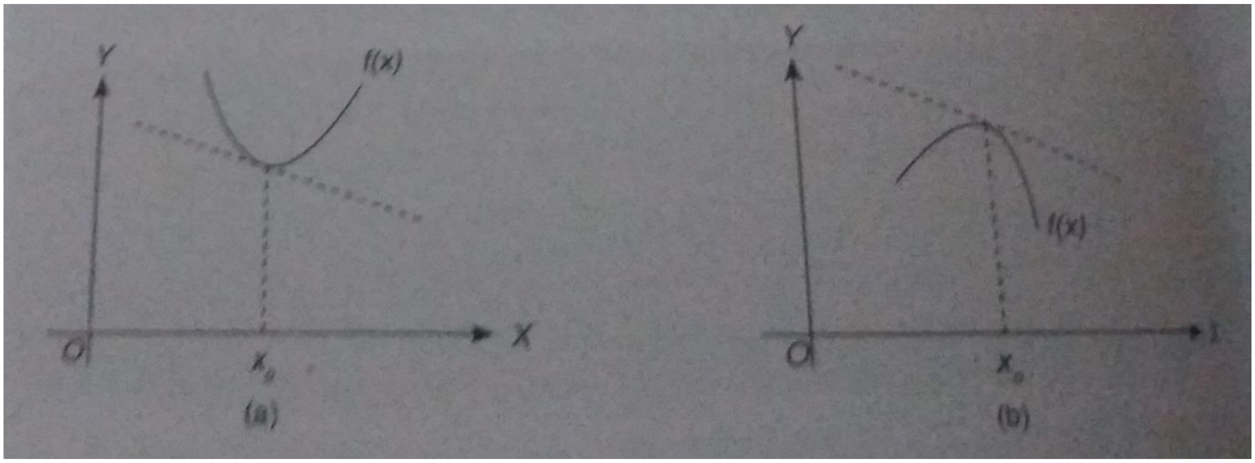
Telah diketahui bahwa turunan pertama pada titik $x = x_0$ menyatakan koefisien arah garis singgung pada titik $x = x_0$, maka definisi di atas dapat ditulis:
$f(x)$ naik pada titik $x = x_0$, jika $f'(X_0) > 0$
$f(x)$ turun pada titik $x = x_0$, jika $f'(X_0) < 0$
Apabila $f'(x) = 0$, dikatakan $f(x)$ mempunyai suatu titik kritis pada $x = x_0$
Suatu fungsi $f(x)$ dikatakan naik (monoton naik) pada suatu interval jika $f'(x) \geq 0$ untuk setiap x pada interval tersebut. Dan fungsi $f(x)$ dikatakan turun pada suatu interval jika $f'(x) \leq 0$ untuk setiap x pada interval tersebut. Seperti gambar dibawah ini.



Gambar 7.4

$f(x)$ naik pada interval $a < x < r$ dan $t < x < u$
$f(x)$ turun pada interval $r < x < t$
Titik kritis dari $f(x)$ tersebut adalah titik R, S, dan T dimana garis singgung pada titik tersebut horiontal

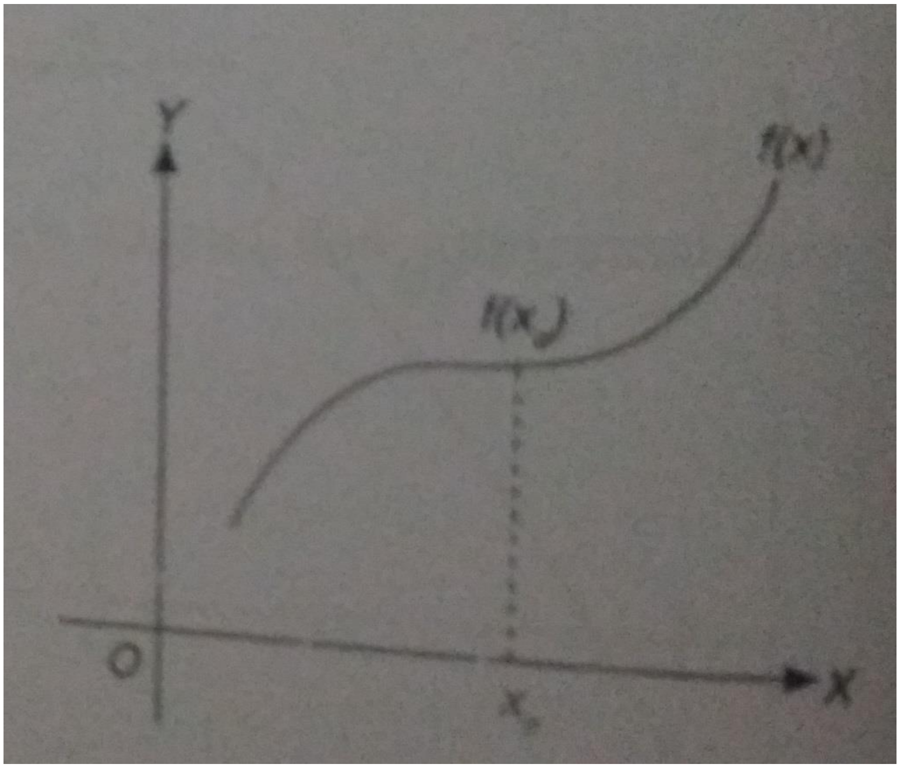
Busur dari f(x) pada gambar a disebut cembung dan busur dari f(x) pada gambar b disebut cekung
Busur dar f(x) disebut cembung apabila ditarik garis singgung pada suatu titik pada busur, maka semua titik lain pada busur tersebut terletak di atas garis singgung
Busur dar f(x) disebut cekung apabila ditarik garis singgung apabila semua titik lain pada busur tersebut terletak di bawah garis singgung tersebut
Dapat juga ditulis:
f(x) disekitar $x = x_0$ adalah cembung jika $f''(x_0) > 0$ dan f(x) cekung jika $f''(x_0) < 0$



Apabila pada $x = x_0$, busur dari f(x) berubah dari cembung ke cekung atau sebaliknya, dikatakan bahwa f(x) mempunyai titik belok pada $x = x_0$

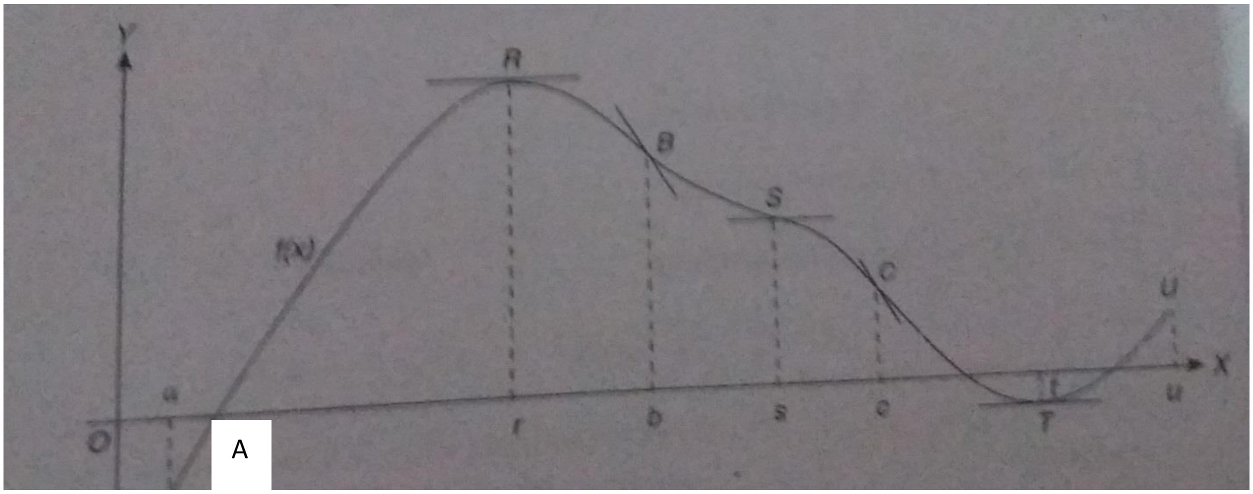
Dapat ditulis:

$P(x_0,f(x_0))$ adalah titik belok dari f(x) jika $f'(x_0) = 0$ dan $f''(x_0) \neq 0$



Definisi:
Fungsi f(x) dikatakan mempunyai harga maksimum relatif $f(x_0)$ di $x = x_0$, jika ada $q > 0$ yang cukup kecil, sedemikian sehingga $f(x) < f(x_0)$ untk setiap x dengan $0 < |x - x_0| < q$
Fungsi f(x) dikatakan mempunyai harga minimum relatif $f(x_0)$ di $x = x_0$, jika ada $q > 0$ yang cukup kecil, sedemikian sehingga $f(x) > f(x_0)$ untk setiap x dengan $0 < |x - x_0| < q$
Titik $(x_0,f(x_0))$ yang merupakan titik maksimum/minimum relatif disebut juga titik ekstrem dari f(x)

Jika f(x) didefinisikan pada suatu interval tertentu dan terdapat $x = x_0$ pada interval tersebut sedemikian sehingga $f(x_0) \geq f(x)$ untuk setiap f pada interval tersebut, maka f(x) dikatakan mempunyai maksimum mutlak $f(x_0)$ pada titik $x = x_0$
F(x) dikatakan mempunyai minimum mutlak bila $f(x_0) \leq f(x)$. Perhatikan gambar dibawah ini



Titik R adalah ttik maksimum relatif dari f(x), karena jika diambil q > 0 cukup kecil berlaku $f(x) \leq f(r)$ untuk $0 < |x - r| < q$. Titik T adalah titik minimum relatif. Sedangkan S bukan titik maksimum relatif.
Pada contoh diatas titik R merupakan titik maksimum mutlak pada interval $a \leq x \leq u$. Titik T bukan titik minimum mutlak pada interval $a \leq x \leq u$ karena $f(a) < f(t)$. Tetapi diambil interval $r \leq x \leq u$, maka T merupakan titik minimum mutlak

C. Cara Menghitung Ekstrem

Untuk menghitung ekstrem dapat dipergunakan suatu cara yang disebut tes turunan kedua. Langkah-langkahnya ebagai berikut:

1. Hitung titik kritis $x = x_0$ dari persamaan f'(x)
2. Untuk titik $x = x_0$, maka
   f(x) = mempunyai nilai maksimum relatif jika $f''(x_0) < 0$
   f(x) = mempunyai nilai minimum relatif jika $f''(x_0) > 0$

Apabila tes turunan kedua titik tidak kita gunakan atau gagal, pilihan lain adalah tes turunan pertama. Langkah sebagai berikut

1. Hitung titik kritis x_0 dari $f'(x) = 0$
2. Tentukan suatu interval $x_0 - q < x < x_0 + q$ dan tentukan tanda dari f'(x) pada interval tersebut
   - Jika tanda f'(x) berubah dari postif menjadi negatif pada $x = x_0$, maka titik $x = x_0$ adalah maksimum relatif
   - Jika tanda f'(x) berubah dari negatif menjadi positif pada $x = x_0$, maka titik $x = x_0$ adalah minimum relatif
   - Jika f'(x) tidak berubah tanda, berarti $x = x_0$, bukan maksimum atau minimum relatif

f(x) mungkin pula mempunyai ekstrem pada $x = x_0$, meskipun $f'(x_0)$tidak ada. Titik $x = x_0$ dimana $f(x_0)$ ada tetapi $f'(x_0)$ tidak ada juga merupakantitik kritis dari fungsi. Nilai $x = x_0$ ini dipergunakan untuk langkah (2) pada tes turunan pertama diatas