MODUL MATEMATIKA 2

(IND 124)

MODUL SESI 12

INTEGRAL DALAM RUANG BERDIMENSI – n (Lanjutan)

DISUSUN OLEH

SEPTIAN RAHMAT ADNAN, S.Si.,M.Si

UNIVERSITAS ESA UNGGUL

2020

Pokok Bahasan : INTEGRAL DALAM RUANG BERDIMENSI – n (Lanjutan)
Sub Pokok Bahasan :

- Integral Lipat dua atas daerah bukan persegi panjang
- Integral lipat dua dalam koordinat kutub

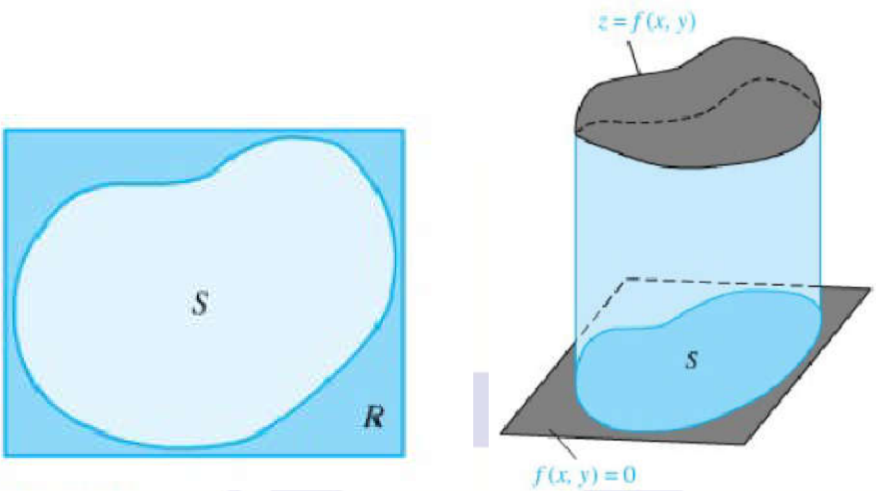
Tujuan Instruksional Umum :
Agar mahasiswa dapat memahami dan menyelesaikan soal dan aplikasi yang berkaitan dengan ntegral Lipat dua atas daerah bukan persegi panjang dan Integral lipat dua dalam koordinat kutub

Tujuan Instruksional Khusus :
Agar mahasiswa mampu menjelaskan dan dapat menyelesaikan masalah yang terkait dengan :

- Integral Lipat dua atas daerah bukan persegi panjang
- Integral lipat dua dalam koordinat kutub

A. INTEGRAL LIPAT DUA ATAS DAERAH BUKAN PERSEGI PANJANG

Tinjaulah suatu himpunan S yang tertutup dan terbatas pada bidang. Kelilingi S dengan sebuah persegi panjang R dengan sisi-sisi sejajar sumbu-sumbu koordinatnya (seperti pada gambar di bawah ini)



Andaikan f(x,y) disefinisikan di S dan didefinisikan f(x,y) = 0 pada bagian R di luar S. Kita mengatakan bahwa f dapat diintegralkan di S jika f dapat diintegralkan pad R dan kita menuliskannya dengan

$$\iint_S f(x,y)dA = \iint_R f(x,y)dA$$

Kita dapat menegaskan bahwa suatu integral lipat dua pada himpunan S adalah (1) linier, (2) dapat dijumlahkan pada himpunan-himpunan yang saling tumpang tindih hanya pada bagian kurva mulus dan (3) memenuhi sifat perbandingan.

PERHITUNGAN INTEGRAL LITAP DUA ATAS HIMPUNAN UMUM

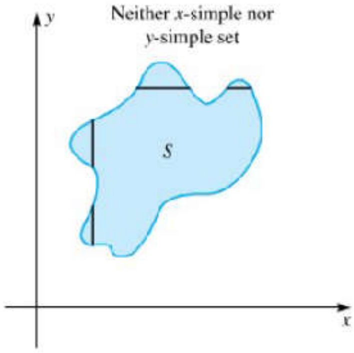
Himpunan dengan batas-batas yang melengkung bisa menjadi sangat rumit. Untuk tujuan yang hendak kita capai akan cukup memadai jika kita menggunakan himpunan sederhana x dan himpunan sederhana y (dan gabungan terhingga dari himpunan-himpunan tersebut). Sebuah himpunan S dikatakan sederhana-y, jika himpunan tersebut sederhana pada arah y, artinya bahwa sebuah garis pada arah ini memotong S dalam selang tunggal (atau titik atau tidak sama sekali). Jadi sebuah himpunan S disebut sederhana y (lihat pada gambar) jika terdapat fungsi φ_1 dan φ_2 pada [a,b] sedemikian rupa sehingga

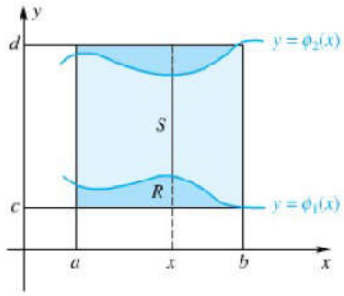
$$S = \{(x,y) : \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x), a \le x \le b\}$$

Himpunan S disebut sederhana x (lihat pada gambar). Jika terdapat fungsi φ_1 dan φ_2 [c,d] sedemikian ruap sehingga

$$S = \{(x,y) : \psi_1(y) \le y \le \psi_2(y), a \le x \le b\}$$

Gambar berikut menunjukan himpunan yang bukan sederhana x atau sederhana y





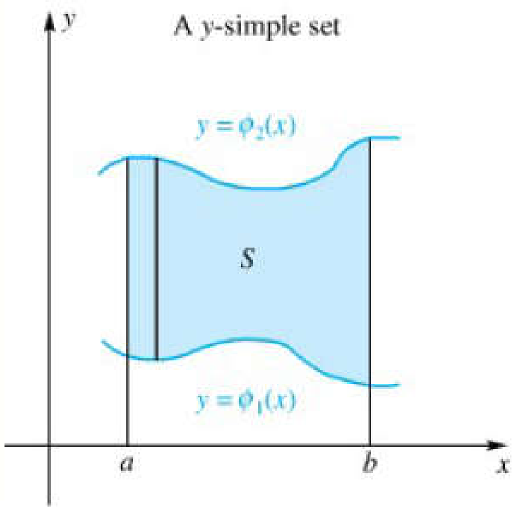
Selanjutnya, andaikan kita bermaksud untuk menghitung integral lipat dua dari fungsi f(x,y) atas sebuah himpunan sederhana –y S. Kita melingkupi S di dalam sebuah persegi panjang R dan membuat f(x,y) = 0 diluar S. Maka :

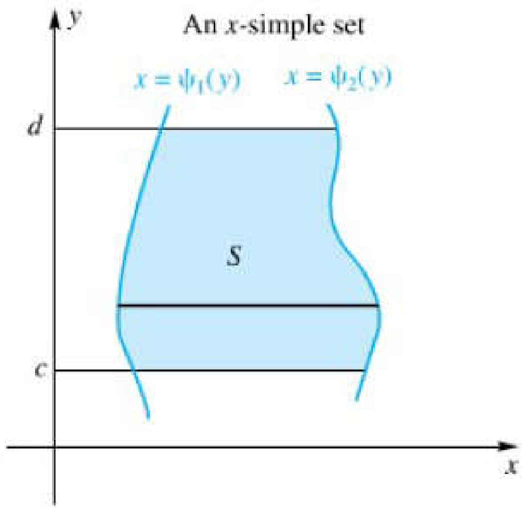
$$\iint_S f(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx$$

$$= \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

Ringkasnya,

$$\iint_S f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$





Pada pengintegralan sebelah dalam, x dipertahankan tetap, jadi pengintgeralan ini dilakukan sepanjang garis vertikal tebal seperti di tunjukan pada gambar di atas. Pengintgeralan ini menghasilkan luas A(x) dari suatu penampang melintang (cross section) yang ditunjukan pada gambar berikut diintegralkan dari a ke b. Jika himpunan S adalah sederhana x, maka dengan cara yang sama akan menghasilkan rumus

$$\iint_S f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

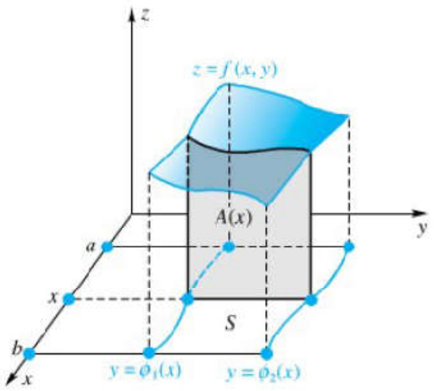


Figure 7

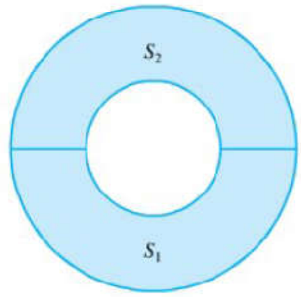


Figure 8

Jika himpunan S bukan sederhana x maupun sederhana y, maka biasanya himpunan tersebut dapat dilihat sebagai sebuah gabungan dari bagian-bagian yang mempunyai salah satu sifat ini atau sifat-sifat lainnya. Contohnya, lingkaran pada gambar di atas tidak sederhana dalam arah manapun, tetapi merupakan gabungan dari dua himpunan sederhana y S_1 dan S_2. Integral-integral dari bagian-bagian lingkaran ini dapat dihitung dan kemudian dijumlahkan untuk memperoleh integral atas S

Beberapa Contoh

Sebagai latihan pendahuluan, kita akan menghitung dua integral berulang di aman batas-batas pada tanda integral sebelah dalam berupa peubah-peubah.

Contoh 1

Hitungalh integral berulang

$$\int_3^5 \int_{-x}^{x^2} (4x + 10y)\,dy\,dx$$

Solusi

Pertama-tama kita melakukan pengintegralan sebelah dalam terhadap y, di mana untuk sementara kita memandang x sebagai sebuah konstanta, dan mendapatkan

$$\int_3^5\int_{-x}^{x^2}(4x+10y)dydx = \int_3^5\left[4xy+5y^2\right]_{-x}^{x^2}dx$$

$$= \int_3^5\left[\left(4x^3+5x^4\right)-\left(-4x^2+5x^2\right)\right]dx$$

$$= \int_3^5\left(5x^4+4x^3-x^2\right)dx = \left[x^5+x^4-\frac{x^3}{3}\right]_3^5$$

$$= 3393\frac{1}{3}$$

Perhatikan bahwa untuk integral berulang, integral sebelah luar tidak bisa mempunyai batas-batas yang bergantung pada peubah dari pengintegralan

Contoh 2
Hitunglan intgeral berulang

$$\int_0^1\int_0^{y^2} 2ye^x\,dxdy$$

Solusi

$$\int_0^1\int_0^{y^2} 2ye^x\,dxdy = \int_0^1\left[\int_0^{y^2} 2ye^x\,dx\right]dy$$

$$= \int_0^1\left[2ye^x\right]_0^{y^2} dy = \int_0^1\left(2ye^{2}-2ye^{0}\right)dy$$

$$= \int_0^1 e^{y^2}\left(2ydy\right)-2\int_0^1 ydy$$

$$= \left[e^{y^2}\right]_0^1 - 2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = e-1-2\left(\frac{1}{2}\right) = e-2$$

Kita kembali ke persoalan perhitungan volume dengan menggunakan integral berulang

Contoh 3

Gunakan integral lipat dua untuk menentukan volume dari tetrahedron yang dibatasi oleh bidang-bidang koordinat dan bidang 3x+6y+4z-12 = 0

Solusi

Daerah segitiga pada bidang xy yang membentuk alas tetrahedron dilambangkan dengan S (seperti ditunjukan pada gambar di bawah ini). Kita akan mencari volume benda padat di bawah permukaan

$$z = \frac{3}{4}(4 - x - 2y)$$

dan di atas daerah S.

Bidang tersebut memotong bidang xy di garis x+2y-4 = 0, suatu ruas yang merupakan bagian dari batas S. Karena persamaan ini dapat ditulis sebagai y = 2 – x/2 dan x = 4 – 2y, maka S dapat dipandang sebagai himpunan sederhana y

$$S = \left\{ (x, y) : 0 \le x \le 4, 0 \le x \le 2 - \frac{x}{2} \right\}$$

atau sebagai himpunan sederhana x

$$S = \left\{ (x, y) : 0 \le x \le 4 - 2y, 0 \le y \le 2 \right\}$$

Kita akan memperlakukan S sebagai sebuah himpunan sederhana y, hasil akhirnya akan sama dengan cara lain, sebagaimana yang harus anda buktikan.

Volume V dari benda padat adalah

$$V = \int_0^4 \int_0^{2-x/2} \frac{3}{4}(4 - x - 2y)\, dydx$$

dalam menuliskan rumus ini sebagai sebuah integral berulang, kita menetapkan x dan mengintegralkannya di sepanjang sebuah garis (seperti gambar di bawah ini) dari y = 0 sampai y = 2 – x/2 dan kemudian mengintegralkan hasilnya dari x = 0 sampai x = 4. Jadi

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^4 \int_0^{2-x/2} \frac{3}{4}(4 - x - 2y)\, dydx \\
&= \int_0^4 \left[\frac{3}{4} \int_0^{2-x/2} (4 - x - 2y)\, dy \right] dx \\
&= \int_0^4 \frac{3}{4} \left[4y - xy - y^2 \right]_0^{2-x/2} dx \\
&= \frac{3}{16} \int_0^4 \left(16 - 8x + x^2 \right) dx \\
&= \frac{3}{16} \left[16x - 4x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = 4
\end{aligned}$$

Ingat kembali bahwa volume suatu tetrahedron adalah sepertiga luas alas kali tinggi. Dalam kasus ini V = 1/3 (4)(3) = 4

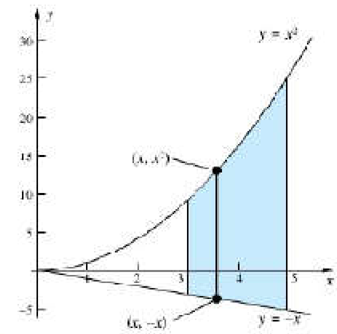
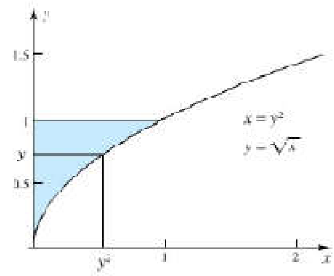


Figure 9



Contoh 4

Tentukan volume benda padat pada oktan pertama ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$) yang dibatasi oleh parabolid melingkar $z = x^2 + y^2$, silinder $x^2 + y^2 = 4$ dan bidang-bidang koordinat pada gambar di bawah ini

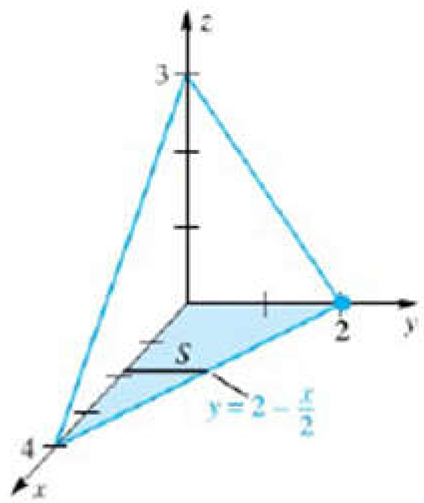
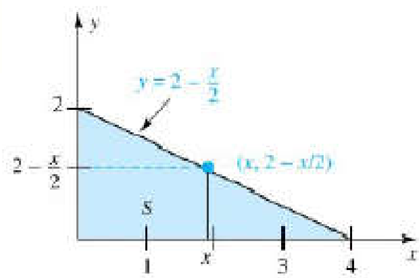


Figure 11



Solusi

Daerah S pada kuadran pertama bidang xy dibatasi oleh seperempat lingkaran $x^2+y^2 = 4$ dan garis $x = 0$ dan $y = 0$. Meskipun S dapat dipandang sebagai daerah sederhana x atau daerah sederhana y. Kita memperlakukan S sebagai daerah sederhana x dan menuliskan kurva-kurva batasnya sebagai

$$x = \sqrt{4 - y^2}$$

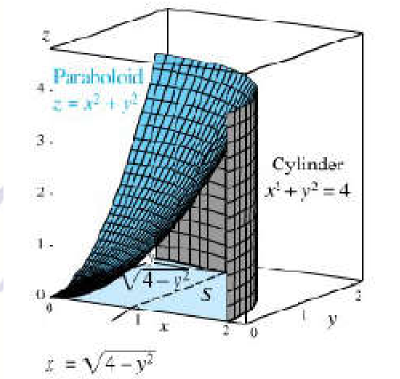
x = 0 dan y = 0. Jadi

......

Selanjutnya tujuan kita adalah menghitung

$$S = \left\{ (x, y) : 0 \le x \le \sqrt{4 - y^2}, 0 \le y \le 2 \right\}$$

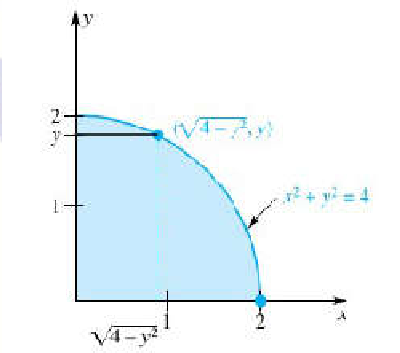
dengan menggunakan integral berulang. Sekarang terlebih dahulu kita menetapkan y dan mengintrgalkanya sepanjang sebuah garis dari x = 0 sampai x $x = \sqrt{4 - y^2}$



dan kemudian mengintgeralkan hasilnya dari y = 0 sampai y = 2.

$$V = \iint_S \left(x^2 + y^2 \right) dA = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \left(x^2 + y^2 \right) dx dy$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{1}{3} \left(4 - y^2 \right)^{3/2} + y^2 \sqrt{4 - y^2} \right] dy$$



Dengan menggunakan substitusi trigonometri y = 2 sin ϕ, maka intgeral yang terakhir dapat ditulis ulang sebagai :

$$V = \iint_S \left(x^2 + y^2\right) dA = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \left(x^2 + y^2\right) dx dy$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{1}{3}\left(4 - y^2\right)^{3/2} + y^2 \sqrt{4 - y^2} \right] dy$$

$$\int_0^{\pi/2} \left[\frac{8}{3}\cos^3\theta + 8\sin^2\theta\cos\theta \right] s\cos\theta d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{16}{3}\cos^4\theta + 16\sin^2\theta\cos^2\theta \right] d\theta$$

$$= \frac{16}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \left(1 - \sin^2\theta + 3\sin^2\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{16}{3} \int_0^{\pi/2} \left(\cos^2\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{16}{3} \int_0^{\pi/2} \left(\cos^2\theta + \frac{1}{2}\sin^2 2\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{16}{3} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \frac{1 - \cos 4\theta}{4}\right) d\theta = 2\pi$$

Contoh 5

Dengan mengubah susunan dari pengintegralan, hitunglah

$$\int_0^4 \int_{x/2}^2 e^{y^2} dy dx$$

Solusi

Integral didalamnya tidak dapat dihiyung sebagaimana adanya karena e^{y2} tidak mempunyai antiturunan elementer. Meskipun demikian, kita mengenali bahwa integral berulang tersebut sama dengan

$$\iint_S e^{y^2} dA$$

dimana

$$S = \left\{\left(x, y\right) : x/2 \le y \le 2, 0 \le x \le 4\right\} = \left\{\left(x, y\right) : 0 \le x \le 2y, 0 \le y \le 2\right\}$$

Jika kita menuliskan integral lipat dua ini sebagai sebuah integral berulang dengan pengintegralan x dilakukan terlebih dahulu, maka kita akan mendapatkan

$$\int_0^2 \int_0^{2y} e^{y^2} dx dy = \int_0^2 \left[xe^{y^2} \right]_0^{2y} dy$$

$$= \int_0^2 2ye^{y^2} dy = \left[e^{y^2} \right]_0^2 = e^4 - 1$$

LATIHAN SOAL A
HITUNGLAH INTGERAL BERULANG SOAL-SOAL BERIKUT

1. $\int_0^1 \int_0^{3x} x^2 \, dy \, dx$ **2.** $\int_1^2 \int_0^{x-1} y \, dy \, dx$

3. $\int_{-1}^3 \int_0^{3y} (x^2 + y^2) \, dx \, dy$ **4.** $\int_{-3}^1 \int_0^{x} (x^2 - y^3) \, dy \, dx$

5. $\int_1^3 \int_{-y}^{2y} xe^{y^3} \, dx \, dy$ **6.** $\int_1^5 \int_0^{x} \frac{3}{x^2 + y^2} \, dy \, dx$

7. $\int_{1/2}^1 \int_0^{2x} \cos(\pi x^2) \, dy \, dx$ **8.** $\int_0^{\pi/4} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}\cos\theta} r \, dr \, d\theta$

9. $\int_0^{\pi/9} \int_{\pi/4}^{3r} \sec^2 \theta \, d\theta \, dr$ **10.** $\int_0^2 \int_{-x}^{x} e^{-x^2} \, dy \, dx$

11. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin y} e^x \cos y \, dx \, dy$ **12.** $\int_1^2 \int_0^{x^2} \frac{y^2}{x} \, dy \, dx$

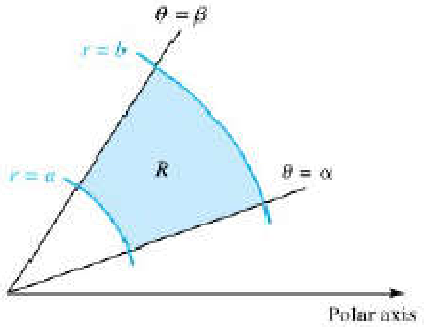
13. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x + y) \, dy \, dx$ **14.** $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^{\sin\theta} 6r \cos\theta \, dr \, d\theta$

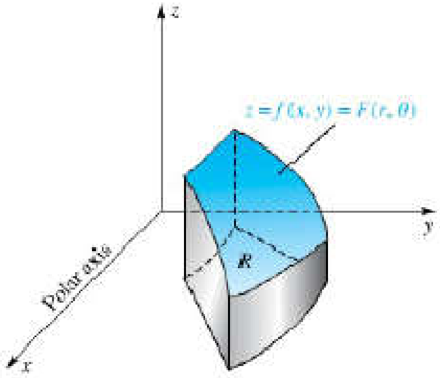
B. INTEGRAL LIPAT DUA DALAM KOORDINAT KUTUB

Kurva-kurva tertentu pada suatu bidang, seperti lingkaran, kardioid, dan mawar, lebih mudah dijelaskan dengan menggunakan koordinat Cartesius. Sehingga kita dapat mengharapkan bahwa intgeral lipat dua atas daerah yang tertutup oleh kurva-kurva seperti itu akan lebih mudah dihitung dengan menggunakan koordinat kutub.

Misalkan R mempunyai bentuk seperti yang ditunjukan pada gambar di bawah ini, yang kita sebut persegi panjnag kutub dan akan kita uraikan secara analitis sesaat lagi. Misalkan z = f(x,y) menentukan sebuah permukaan atas R andaikan f kontinu dan taknegatif. Maka volume V benda padat di bawah ini permukaan ini dan di atas R dapat dinyatakan dengan

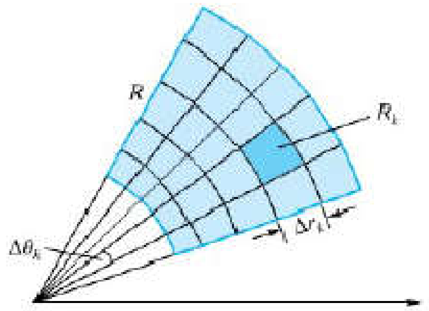
$$V = \iint_R f(x, y) \, dA$$





didalam koordinat kutub, persegi panjnag kutub R mempunyai bentuk

$$R = \{(r, \theta): a \le r \le b, \alpha \le \theta \le \beta\}$$



dimana a ≥ 0 dan $\beta - \alpha \le 2\pi$. Demikian pula persamaan permukaan dapat ditulis sebagai :

$$z = f(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = F(r, \theta)$$

kita akan menghitung volume V dengan cara baru, yaitu menggunakan koordinat kutub.
Kita akan membagi R menjadi partisi-partisi yang lebih kecil berbentuk persegi panjang kutub R_1, R_2, R_3, ..., R_n dengan menggunakan kisi kutub dan misalkan Δr_k dan $\Delta\theta_k$ menyatakan dimensi potongan R_k seperti pada gambar . Luas A(Rk) dinyatakan dengan

$$A(R_k) = \bar{r}_k\, \Delta r_k\, \Delta\theta_k$$

dimana r_k adalah jari-jari rata-rata R_k. Jadi

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} F(\bar{r}_k, \bar{\theta}_k)\bar{r}_k\, \Delta r_k\, \Delta\theta_k$$

Ketika kita menggunakan limit sebagai aturan pembagian partisi yang mendekati nol, maka kita akan memperoleh volume yang sebenarnya. Limit ini adalah sebuah integral lipat dua

$$V = \iint_R F(r, \theta)\, r\, dr\, d\theta = \iint_R f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

sekarang kita mempunyai dua rumus untuk V, yaitu (1) dan (2). Dengan menyusunnya ke dalam satu persatuan akan diperoleh

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_R f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

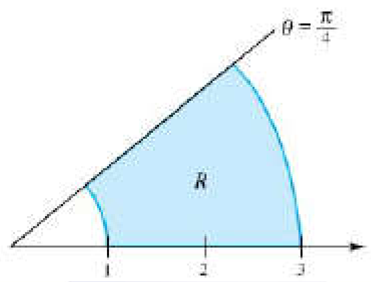
Persamaan di dalam kotak diturunkan dengan asumsi bahwa f tak negatif, tetapi baerlaku untuk fungs-fungsi yang sangat umum, khususnya untuk fungsi-sungsi kontinu dengan tanda sembarang

INTEGRAL BERULANG

Rumus-rumus yang dihasilkan di atas menjadi berguna ketika kita menuliskan integral lipat dua kutub sebgai integral berulang, seperti yang diilustrasikan berikut ini

Contoh 1

Tentukan volume V dari benda padat di atas persegi panjang kutub pada gambar



$$R = \{(r, \theta): 1 \le r \le 3, 0 \le \theta \le \pi/4\}$$

dan dibawah permukaan Z = $e^{x2 + y2}$

Solusi

Karena

$x^2 + y^2 = r^2$, maka

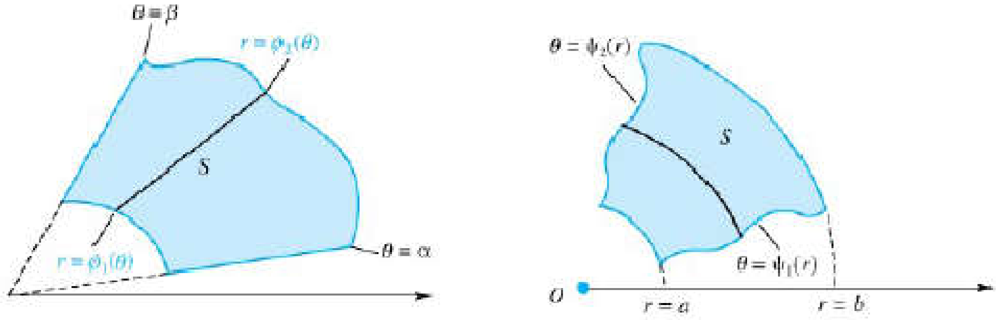
$$\begin{aligned} V &= \iint_R e^{x^2+y^2}\, dA \\ &= \int_0^{\pi/4} \left[\int_1^3 e^{r^2} r\, dr \right] d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \left[\frac{1}{2} e^{r^2} \right]_1^3 d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}(e^9 - e)\, d\theta = \frac{\pi}{8}(e^9 - e) \approx 3181 \end{aligned}$$

Tanpa bantuan koordinat kutub, kita tidak dapat menyelesaikan soal ini. Perhatikan bagaimana faktor tambahan r adalah faktor yang kita perlukan untuk meng antidiferensialkan e^{r2}

DAERAH UMUM

Ingat kembali bagaimana kita memperluas integral lipat dua atas persegi panjang biasa R menjadi integral atas sebuah himpunan umum S. Kita cukup melingkupi S di dalam sebuah persegi panjang dan membuat suatu fungsi yang bernilai nol di luar S untuk diintegralkan. Kita dapat melakukan hal yang sama untuk integral kutub lipat dua , kecuali bahwa kita mneggunakan persegi panjnag kutub dan bukannya persegi panjnag biasa. Tanpa menguraikan rinciannya, kita cukup memastikan bahwa hasil di dalam kota atas akan berlaku untuk himpunan-himpunan umum S.

Diantara hal yang menarik tentang integral kutub adalah apa yang kita sebut himpunan sederhana – r dan himpunan sederhana θ Kita menyebut himpunan S dengan sederhana – r jika himpunan tersebut berbentuk (gambar 5)



An r-simple set　　　　A θ-simple set

$$S = \{(r, \theta): \phi_1(\theta) \leq r \leq \phi_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

dan menyebutnya sederhana – θ jika berbentuk (gambar 6)

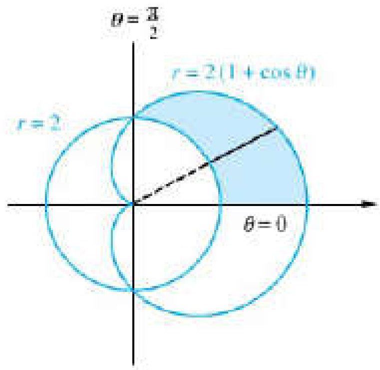
$$S = \{(r, \theta): a \leq r \leq b, \psi_1(r) \leq \theta \leq \psi_2(r)\}$$

Contoh 2
Hitunglah

$$\iint_S y\, dA$$

dimana S adalah daerah di kuadran pertama yang berada di luar lingkaran r = 2, serta didalam kardioid

$$r = 2(1 + \cos\theta)$$



Solusi
Karena S adalah sebuah himpunan sederhana – r, kita dapat menuliskan integral di atas sebagai integral kutub berulang dengan r sebagai peubah pengintgeralan sebelah dalam. Di dalam pengintgeralan sebelah dalam ini, θ dibuat tetap; pengintgeralan dilakukan di sepanjnag garis tebal pada gambar berikut dari r = 2 sampai

$$r = 2(1 + \cos\theta)$$

$$\iint_S y\, dA = \int_0^{\pi/2} \int_2^{2(1+\cos\theta)} (r \sin\theta) r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3} \sin\theta \right]_2^{2(1+\cos\theta)} d\theta$$

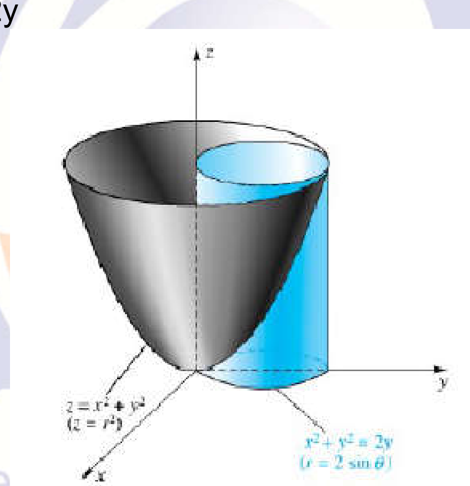
$$= \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} \left[(1 + \cos\theta)^3 \sin\theta - \sin\theta \right] d\theta$$

$$= \frac{8}{3} \left[-\frac{1}{4}(1 + \cos\theta)^4 + \cos\theta \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{8}{3} \left[-\frac{1}{4} + 0 - (-4 + 1) \right] = \frac{22}{3}$$

Contoh 3

Tentukan volume benda padat di bawah permukaan $z = x^2+y^2$ di atas bidang xy, dan di dalam silinder $x^2+y^2 = 2y$



Solusi

Berdasarkan sifat simetri, kita dapat menggandakan volume di oktan pertama. ketika kita menggunakan $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$, persamaan dari permukaan menjadi $z = r^2$ dan persamaan silinder menjadi, $r = 2\sin\theta$ Misalkan S menyatakan daerah yang ditunjukan pada gambar berikut , maka volume V dapat dinyatakan sebagai

$$V = 2 \iint_S (x^2 + y^2)\, dA = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\sin\theta} r^2 r\, dr\, d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{2\sin\theta} d\theta = 8 \int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\, d\theta$$

$$= 8 \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{2}$$

Contoh 4

Tunjukkan bahwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = 1$$

Solusi

Berdasarkan sifat simetri

$$u = x/\sqrt{2}, \text{ so } dx = \sqrt{2}\, du$$

sekarang kita lakukan subtitusi u = x/(2)$^{1/2}$, sehingga dx = (2)$^{1/2}$ du. Batas-batas pada integral tetap sama sehingga kita memperoleh

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx &= 2\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2} \sqrt{2}\, du \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-u^2}\, du \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1
\end{aligned}$$

LATIHAN SOAL B

Hitunglah Integral-integral Berulang berikut

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin\theta} r\, dr\, d\theta$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{\sin\theta} r^2\, dr\, d\theta$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{1-\cos\theta} r \sin\theta\, dr\, d\theta$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{2} r \cos\frac{\theta}{4}\, dr\, d\theta$

6. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta} r\, dr\, d\theta$

DAFTAR PUSTAKA

- **Varberg, Purcell, Rigdon, ,KALKULUS, edisi kesembilan , Erlangga, Jakarta, 2011**
- **Murray R.Spieqel,CALCULUS LANJUT, edisi kedua, Erlangga, Jakarta, 2008.**